Zadania náboja KMS 2009, seniori

Úloha 1. V Amerike sa teplota nemeria v Celsiových stupňoch, ale vo Fahrenheitových stupňoch. Prepočet Celsiových stupňov na Fahrenheitove je daný vzorcom $f = 9c/5 + 32$ (c je teplota v Celsiových a f vo Fahrenheitových stupňoch). Akú teplotu Európan aj Američan vyjadria rovnakou hodnotou?

Úloha 2. Mišáč mal v zošite čísla a, b s vlastnosťou, že čísla 10, a, b, ab tvoria v tomto poradí aritmetickú postupnosť. Aké dve čísla mohol mať v zošite? Nájdite všetky možnosti.

Úloha 3. Bebe dostal na skúške z mikroekonómie desať otázok, na ktoré sa dá odpovedať iba *áno* alebo *nie*. Test je pripravený tak, že ak Bebe odpovie na ľubovoľných 5 otázok *áno* a na zvyšných 5 *nie*, tak bude mať vždy aspoň štyri správne odpovede. Zistite, koľkými spôsobmi sa dá taký test pripraviť. (Inak povedané, koľko existuje rôznych odpoveďových hárkov, ktoré spĺňajú podmienku zo zadania?)

Úloha 4. Foto sa pred pár dňami chválil, že našiel najmenšiu možnú hodnotu parametra a takú, že nerovnosť $x \geq 14\sqrt{x} - a$ platí pre všetky nezáporné reálne čísla x. Nájdite ju aj vy.

Úloha 5. Zuska sa rada hrá so svojou obľúbenou kockou. Raz jej napadlo, že poráta, koľko rôznych vnútorných uhlov majú spolu všetky možné trojuholníky, ktorých vrcholy sú vo vrcholoch tejto kocky. Koľko rôznych uhlov narátala?

Úloha 6. Kaja si na papierik napísala čísla $-7, -6, -5, \ldots, 5, 6, 7$ v nejakom poradí. Všimla si, že sú usporiadané podľa veľkosti absolútnej hodnoty (začala s číslom s najmenšou absolútnou hodnotou). Koľkými rôznymi spôsobmi to mohla spraviť?

Úloha 7. Feráčov pravidelný osemsten $ABCDEF$ má stranu dĺžky 3 a je tvorený štvorbokými ihlanmi $ABCDE$ a $ABCDF$. Určte obsah štvrouholníka $EAFC$.

Úloha 8. Do políčok tabuľky 5×5 sú po riadkoch (v rámci riadku zľava doprava) vpísané čísla $1, 2, \ldots, 25$ v tomto poradí. Vyberieme päť políčok tak, aby žiadne dve neboli v rovnakom riadku ani v rovnakom stĺpci, a čísla na týchto políčkach sčítame. Aké hodnoty súčtu môžeme takýmto spôsobom dostať?

Úloha 9. Pomôžte Busovi nájsť hodnotu výrazu

$$\frac{\tan^2(20^\circ) - \sin^2(20^\circ)}{\tan^2(20^\circ)\sin^2(20^\circ)}$$

v čo najjednoduchšom tvare.

Úloha 10. Ajka našla 2009 po sebe idúcich prirodzených čísel, ktoré majú rovnaký súčet ako 2008 po nich nasledujúcich čísel. Aké bolo najmenšie z Ajkiných čísel?

Úloha 11. Určte, ktorému celému číslu sa rovná výraz

$$\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} \cdot \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}} \cdots \frac{\frac{1}{98} - \frac{1}{99}}{\frac{1}{99} - \frac{1}{100}}.$$

Úloha 12. Nech x a y sú reálne čísla a navyše $0 \leq y \leq \pi/2$. Určte, akú hodnotu môže nadobúdať výraz $x+y$, ak x, y spĺňajú vzťahy

$$\begin{aligned} x + \sin y &= 2009, \\ x + 2009 \cos y &= 2008. \end{aligned}$$

Úloha 13. Pre postupnosť čísel $a_2, a_3, a_4, \dots$ platí $a_2 = 5$ a

$$a_n = \left\lfloor \frac{n^2}{a_{n-1}} \right\rfloor$$

pre $n > 2$. Zistite hodnotu a_{999}. Výraz $\lfloor x \rfloor$ značí najväčšie celé číslo, ktoré neprevyšuje x.

Úloha 14. Pre ktoré prirodzené čísla n platí, že $n!$ nie je násobkom n^2? Pripomíname, že pre prirodzené číslo m platí $m! = m \cdot (m-1) \cdots 2 \cdot 1$. (Napríklad $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.)

Úloha 15. Majme pravidelný päťuholník $ABCDE$. Zostrojme rovnostranný trojuholník PAB tak, aby bod P ležal vnútri päťuholníka. Koľko stupňov má uhol PEC?

Úloha 16. Nájdite všetky reálne riešenia rovnice

$$\sqrt{x + \sqrt{4x + \sqrt{16x + \sqrt{\cdots + \sqrt{4^{2009}x + 3}}}}} - \sqrt{x} = 1.$$

Úloha 17. Nech a, b sú také konštanty, že body priestoru dané súradnicami $(1, a, b)$, $(a, 2, b)$ a $(a, b, 3)$ ležia na jednej priamke. Určte hodnotu výrazu $a + b$.

Úloha 18. Nájdite najväčšie prirodzené číslo n také, pre ktore je číslo $(2004!)!$ deliteľné číslom $((n!)!)!$. Pripomíname, že pre prirodzené číslo m platí $m! = m \cdot (m-1) \cdots 2 \cdot 1$. (Napríklad $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.)

Úloha 19. Funkcia f pre každé nezáporné reálne číslo x spĺňa $f(x) = \lfloor x \rfloor x$. Akú najväčšiu dvojcifernú celočíselnú hodnotu nadobúda funkcia f, ak uvažujeme len nezáporné x? Výraz $\lfloor x \rfloor$ značí najväčšie celé číslo, ktoré nepresahuje x.

Úloha 20. Škrečok upiekol dokonale okrúhlu palacinku a z jej stredu vykrojil kruh, takže z palacinky zostalo medzikružie. Keď sa na ňu chystal dať kečup, všimol si, že najdlhšia rovná čiara, ktorú vie kečupom nakresliť, aby ho pritom nevylial na stôl, je dlhá 12 cm. Akú plochu má Škrečkovo medzikružie?

Úloha 21. Zjednodušte súčet

$$\frac{1}{2\lfloor\sqrt{1}\rfloor + 1} + \frac{1}{2\lfloor\sqrt{2}\rfloor + 1} + \frac{1}{2\lfloor\sqrt{3}\rfloor + 1} + \cdots + \frac{1}{2\lfloor\sqrt{99}\rfloor + 1}.$$

Výraz $\lfloor x \rfloor$ značí najväčšie celé číslo, ktoré nepresahuje x.

Úloha 22. Vojenský pluk dlhý tri kilometre pochoduje. Plukovník pozdĺž nich jazdí v aute trikrát rýchlejšie, než vojaci pochodujú. Vyštartoval s posledným vojakom a ide priamo k prvému, otočí sa a ide späť k poslednému a takto stále dokola. Ako ďaleko bude plukovník od posledného vojaka v momente, keď budú mať vojaci odpochodovaných 10 km?

Úloha 23. Majme trojuholník ABC, pre ktorý platí $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BCA| = 42°$. Nech k je kružnica so stredom K, ktorá pretína stranu AB vo vnútorných bodoch P, Q, stranu BC vo vnútorných bodoch R, S a stranu CA vo vnútorných bodoch T, U. Nájdite veľkosť uhla CKB, ak viete, že $|PQ| = |RS| = |TU|$.

Úloha 24. Aký zvyšok dáva číslo 2^{9999} po delení číslom $2^7 - 1$?

Úloha 25. Určte počet podmnožín množiny $\{1, 2 \ldots, 63\}$ takých, že súčet ich prvkov je 2009.

Úloha 26. Nájdite najväčšie celé číslo, ktoré delí výraz $m^5 - 5m^3 + 4m$ pre každé $m \geq 10$.

Úloha 27. Do kružnice je vpísaný šesťuholník $ABCDEF$, pre ktorý platí

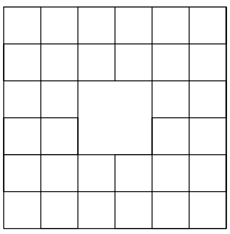
$$|AB| = |CD| = |EF| = 2|BC| = 2|DE| = 2|AF|.$$

Určte obvod šesťuholníka $ABCDEF$, ak viete, že $|AD| = 8$.

Úloha 28. Nech $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ je ľubovoľná permutácia čísel $1, 2, \ldots, n$. Pre koľko takýchto permutácií platí, že $s_k \geq k - 2$ pre každé $k = 1, 2, \ldots, n$?

Úloha 29. Zjednodušte čo najviac výraz $2\sqrt{1,5 + \sqrt{2}} - (1,5 + \sqrt{2})$.

Úloha 30. Koľko obdĺžnikov je nakreslených na obrázku?



Úloha 31. Mrežový bod v rovine je bod, ktorého obe súradnice sú celočíselné. Predpokladajme, že Hanka ide z bodu $(0, 2009)$ priamou cestou do náhodného mrežového bodu so súradnicami vo štvorci určenom štyrmi bodmi $(0, 0)$, $(0, 99)$, $(99, 99)$, $(99, 0)$ vrátane hraníc. Aká je pravdepodobnosť, že jej cesta bude prechádzať párnym počtom mrežových bodov? Do cesty počítame začiatok aj koniec.

Úloha 32. Označme si

$$m \circ n = \frac{m + n}{mn + 4}.$$

Spočítajte

$$((((2009 \circ 2008) \circ 2007) \circ \cdots \circ 2) \circ 1) \circ 0.$$

Úloha 33. Štvoruholník $ABCD$ má dĺžky strán $|AB| = 3$, $|BC| = 2$, $|CD| = 6$, $|DA| = 7$ a platí $|\sphericalangle ABC| = 90^\circ$. Prezradíme vám, že tento štvoruholník má vpísanú kružnicu. Viete určiť jej polomer?

Úloha 34. Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré je výraz $n^3 + 2n^2 + 9n + 8$ treťou mocninou nejakého prirodzeného čísla.

Úloha 35. Majme štvorec $ABCD$ so stranou 1 a vnútri toho štvorca bod P taký, že $|\sphericalangle PAC| = |\sphericalangle PCD|$. Navyše viete, že $|AP| = \sqrt{2}/2$. Určte vzdialenosť $|BP|$.

Úloha 36. Určte počet trojíc prirodzených čísel (a, b, c), ktoré súčasne spĺňajú vzťahy

$$abc + 2009 = ab + bc + ca, \qquad a + b + c = 2010.$$

Úloha 37. Majme desať prirodzených čísel usporiadaných v kruhu tak, že každé číslo je o jedna väčšie ako najväčší spoločný deliteľ jeho dvoch susedov. Nájdite najväčší možný súčet takto rozostavených čísel.

Úloha 38. Je daný pravidelný štvorsten $ABCD$ s dĺžkou hrany 2. Rovina ρ rovnobežná s hranami AB a CD prechádzajúca stredom AC rozreže $ABCD$ na dva kusy. Nájdite povrch jedného z týchto kusov.

Úloha 39. Všetky políčka tabuľky 8×8 vyplníme krížikmi a krúžkami tak, že v každom políčku bude práve jeden symbol. Navyše v každom stĺpci a v každom riadku bude nepárny počet krížikov. Koľkými spôsobmi môžeme takto tabuľku vyplniť?

Úloha 40. V Tramtárii je 10 miest. Spoločnosť KMS chce vytvoriť letecké linky medzi mestami v Tramtárii. Vie však, že vláda chce rozdeliť Tramtáriu na dva štáty, oba s piatimi mestami. Bohužiaľ sa nevie, ktoré mestá budú v ktorom štáte. Po rozdelení sa všetky linky medzi mestami z rôznych štátov zrušia. Poraďte KMS-ákom, aký najmenší počet liniek im stačí vytvoriť, aby po rozdelení Tramtárie mohli cestujúci s použitím leteckých liniek KMS cestovať medzi ľubovoľnými mestami rozdelených štátov (kľudne aj s prestupmi).

Úloha 41. Majme tetivový štvoruholník $TUVW$, ktorého opísaná kružnica má polomer 5. Dĺžky strán sú $|TU| = 6$, $|UV| = 7$, $|VW| = 8$. Určte dĺžku poslednej strany.

Úloha 42. Nech S je množina všetkých trojíc prirodzených čísel (a, b, c), pre ktoré platí $a + b + c = 17$. Určte

$$\sum_{(i,j,k)\in S} ijk.$$

Úloha 43. Je daný trojuholník ABC a jeho vpísaná kružnica so stredom I. Tá sa dotýka strany BC v bode D. Označme l kružnicu nad priemerom AI. Nech Q je jej druhý priesečník s priamkou BI a P jej druhý priesečník s priamkou CI. Ak viete, že $|BI| = 6$, $|CI| = 5$, $|DI| = 3$, určte $\left(\frac{|DP|}{|DQ|}\right)^2$.

Úloha 44. Je daná tabuľka 3×3, v ktorej ľavom hornom rohu je číslo 1 a v pravom dolnom číslo 2009. Rozhodnite, koľkými spôsobmi sa dajú vyplniť ostatné políčka prirodzenými číslami tak, aby každé číslo delilo číslo v políčku pod ním aj číslo v políčku napravo od neho.