Návody k 1. sérii letnej časti KMS 2016/2017

Úloha č. 1:
Vypíšte si zvyšky čísel 2^n a 3^m po delení 5-timi. Pre aké n a m je $2^n + 3^m$ deliteľné 5-timi?

Úloha č. 2:
V trojuholníku je veľa rovnobežiek. Uvedomte si, že malé trojuholníky sú si navzájom podobné. Z obsahov zistite pomery strán (v rôznych trojuholníkoch) a presuňte ich na strany veľkého trojuholníka.

Úloha č. 3:
Pomocou n liniek sa dá dostať z každej zastávky na každú inú na maximálne jeden prestup. Dokážte, že ak budeme používať len $n-1$ liniek, tak aspoň jedna zastávka nebude obsluhovaná.

Úloha č. 4:
Môže byť niektoré z čísel n, $n+1$, ..., $n+5$ deliteľné prvočíslom väčším ako 5? Dokážte, že aspoň jedno z čísel n, $n+1$, ..., $n+5$ nie je deliteľné 2-mi, 3-mi ani 5-timi.

Úloha č. 5:
Nájdite množinu bodov C, aby bol obsah (obvod) ABC konštantný. Aby bol obsah (obvod) čo najväčší, musí sa táto množina dotýkať kružnice.

Úloha č. 6:
$(a, b) \leq |a-b|$. Skúste pomocou toho odhadnúť ľavú stranu. „O koľko“ môžeme naše odhady pokaziť?

Úloha č. 7:
„Podstatou každého problému je nájsť 4 *body, ktoré ležia na jednej kružnici.“* (J. Švrček)
V tomto prípade ide o tetivové štvoruholníky $BCPQ$, $BIQZ$ a $ICPY$.

Úloha č. 8:
Využite nerovnosť preusporiadaní (po anglicky „rearrangement inequality“). Členy $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ a $(\frac{1}{s-a_1}, \frac{1}{s-a_2}, \dots, \frac{1}{s-a_n})$ sú rovnako usporiadané, preto výraz $\frac{a_1}{s-a_1} + \dots + \frac{a_n}{s-a_n}$ je maximálny spomedzi popárovaní členov zátvoriek. Využite to na získanie $n-1$ nerovníc, ktorých sčítaním dostaneme nerovnosť v zadaní.
`http://files.dokazy.webnode.sk/200000004-9d3329e2ca/Permuta%c4%8dn%c3%a1%20nerovnos%c5%a5.pdf` (Pozor! Časť „iné znenie“ obsahuje chybný zápis)
`https://en.wikipedia.org/wiki/Rearrangement_inequality`

Úloha č. 9:
Skúste dokončiť záhradu, v ktorej už máte vyznačené **všetky** nuly. Ukážte, že to ide dokončiť práve jedným spôsobom.

Úloha č. 10:
Nájdite trojuholník, v ktorom sú zadané priamky výškami.