Dlhodobý Náboj

Úlohy dlhodobého Náboja môžeš riešiť kedykoľvek len budeš chcieť: ako poobedný program, počas prestávok či z dlhej chvíle na internátoch / doma. Kontrola riešení bude prebiehať zakaždým počas poobedného programu v niektorých z miestností M-I až M-VI. V týchto miestnostiach bude vedúci. Ak vyriešiš nejakú úlohu, príď za ním a vysvetli mu svoje riešenie. Vedúci skontroluje, či je Tvoje riešenie správne alebo nie. Ak si vyriešil úlohu správne Tvoje meno sa objaví pri danej úlohe na Nábojovej nástenke slávy.

Každý vedúci má napísané na dverách, ktoré úlohy opravuje primárne. Väčšinou Ti vie skontrolovať aj iné úlohy, ale ak budeš potrebovať radu, nemusí vedieť tak dobre poradiť ako o jeho úlohách.

Pokiaľ si nejakú dobu nevieš rady s nejakou úlohu, môžeš prísť za vedúcim v miestnosi, vysvetliť mu, na čo si prišiel / prišla a vedúci Ťa navedie ďalej.

Počas priebehu letnej školy budú nejaké úlohy pribúdať. Nájdeš ich pri Nábojovej nástenke slávy, nejaké môžeš dostať aj na prednáške alebo aj na stránke `kms.sk/letnaskola/dlhodoby_naboj/`

1 Základná sada úloh

Úlohy sú radené približne podľa obtiažnosti, t. j. ľahšie úlohy nájdeš skôr vyššie a ťažšie skôr nižšie.

Úloha 1.1. V Krajine majú mince s hodnotami 10 a 11 korún krajinských. Problém však je, že niektoré sumy sa nimi bez vydávania nedajú zaplatiť. Nájdite najvyššiu takú sumu.
b) Vláda v snahe zlepšiť situáciu zaradila do obehu aj mince s hodnotou 12 korún krajinských. Asi je vám jasné, že toto opatrenie vlády stále nestačí na to, aby sa dali zaplatiť všetky možné sumy. Aká je teraz najvyššia suma, ktorá sa nedá zaplatiť bez vydávania?

Úloha 1.2. Zistite, či je číslo $9^{9^9} + 6$ deliteľné 11-timi.

Úloha 1.3. Ondro má niekoľko rovnakých hrušiek, niekoľko rovnakých broskýň, takisto niekoľko jabĺk a sliviek. Prišiel na to, že hruška, slivka, broskyňa a jablko vážia spolu presne toľko, koľko vážia tri jablká. Hral sa ďalej a zistil, že slivka, hruška a jablko sú spolu len o 45 gramov ľahšie ako 5 broskýň. Ešte si všimol, že 11 jabĺk váži presne toľko, čo 17 broskýň. Koľko váži jedna hruška a jedna slivka?

Úloha 1.4. Ajka našla na zemi nakreslený kruh a po jeho obvode napísaných 26 čísel. Všimla si, že aritmetický priemer každých troch čísel, ktoré ležia vedľa seba, je vždy rovný číslu 19. Veľmi sa potešila a hneď, ako prišla do školy, to povedala Bebemu. Ten jej povedal, že všetky čísla na obvode kruhu boli rovnaké. To si už ale Ajka nepamätala. Mal Bebe pravdu?

Úloha 1.5. Každá zo strán pravidelného 2017-uholníka je zafarbená inou farbou (nie bielou). Jeho vrcholy sú biele. Na obvode 2017-uholníka si zvolíme tri body, aby žiaden z nich nebol biely. Trojuholník charakterizujeme tým, akými farbami sú zafarbené jeho vrcholy. Napr. ružovo-fialovo-ružový trojuholník má dva zo svojich vrcholov na ružovej strane a jeden na fialovej. V charakterizácii nám nezáleží na poradí (teda červeno-čierno-modrý trojuhloník je taký istý ako čierno-červeno-modrý trojuholník). Koľko existuje trojuholníkov s rôznou charakterizáciou?

Úloha 1.6. Ika má 4 pravé a 4 falošné diamanty, ktoré nevie rozlíšiť. Našťastie má špeciálny prístroj, ktorým môže robiť nasledovné meranie. Vloží doň ľubovoľný počet diamantov a prístroj jej povie, koľko z vložených diamantov je pravých. Ika by chcela (nevedno prečo) dva diamanty, z ktorých je jeden pravý a druhý falošný. Poraďte jej, ako ich môže nájsť na dve merania prístrojom.

Úloha 1.7. Na sústredení sa stretlo 32 účastníkov. Už pred sústredením každý poznal okrem seba aspoň 16 z ostatných účastníkov. Dokážte, že týchto účastníkov nevieme rozdeliť na dve (nie nutne rovnako veľké) neprázdne skupiny tak, aby sme nerozdelili žiadnu známosť, t. j. aby ľubovoľní dvaja účastníci, ktorí sa poznajú, boli v rovnakej skupine.

Úloha 1.8. Nájdite najmenšie číslo deliteľné číslom 12, ktoré sa v desiatkovej sústave dá zapísať pomocou piatich jednotiek a ľubovoľného počtu číslic 0 a 3.

Úloha 1.9. Dokážte, že ak je zlomok a/b v základnom tvare, tak aj zlomky

$$\frac{a-b}{ab}, \qquad \frac{a+b}{ab}$$

sú v základnom tvare.

Úloha 1.10. Označme E stred strany CD v obdĺžniku $ABCD$ a F priesečník uhlopriečky BD a úsečky AE. Vieme, že obsah trojuholníka DFE je 1cm^2. Zistite aký je obsah štvoruholníka $BCEF$.

Úloha 1.11. Trojuholník ABC je rozdelený na dva trojuholníky ADC a BCD, ktoré sú rovnoramenné a majú rovnaký obsah. Veľkosť uhla ADC je $100°$. Aká je veľkosť uhla ABC?

Úloha 1.12. Ak platí $a + b > 0$, dokážte:

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Úloha 1.13. Nech korene polynómu $P(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 11$ sú a, b, c a korene polynómu $x^3 + rx^2 + sx + t$ sú $a + b$, $b + c$, $c + a$. Nájdite t.

Úloha 1.14. Cifry prirodzeného čísla sme preusporiadali a číslo, ktoré vzniklo, sme pripočítali k pôvodnému. Dokážte, že nám nemohol výjsť výsledok $\underbrace{999\ldots999}_{\text{999-krát}}$.

Úloha 1.15. Nájdite korene polynómu a ich početnosť: $P(x) = x^6 + 7(x^5) + 13(x^4) - 7(x^3) - 34(x^2) - 4x + 24$

Úloha 1.16. V rovine máme n bodov tak, že nech vezmeme akúkoľvek trojicu z nich, určite bude existovať aspoň jedna dvojica bodov, ktorých vzdialenosť je menšia ako 1. Dokážte, že existujú dva kruhy s polomerom 1, ktorých zjednotenie obsahuje všetkých n bodov.

Úloha 1.17. Koľkými spôsobmi je možné šachovnicu 8x8 vyskladať z 15 dlaždíc tvaru T a jednej tvaru štvorca 2x2? Prečo?

Úloha 1.18. Ak sú $a, b, c > 0$ dokážte:

$$a^2b^2c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + a^2 + 2 \geq 2ab + 2bc + 2ca.$$

Úloha 1.19. Nájdite všetky prirodzené čísla n také, že $2^n - 1$ aj $2^n + 1$ sú prvočísla.

Úloha 1.20 (09/10-L1-4)**.** Na výlete daroval každý chlapec každému dievčaťu jeden keksík a každé dievča darovalo každému chlapcovi jeden rezeň. Neskôr zjedol každý chlapec dva svoje rezne a každé dievča zjedlo tri svoje keksíky. Ukázalo sa, že deti spolu zjedli štvrtinu zo všetkých darčekov. Najviac koľko detí sa mohlo na výlete zúčastniť? Zdôvodnite tiež, prečo ich nemohlo byť viac.

Úloha 1.21. Dvaja hráči hrajú takúto hru: na tabuľu píšu čísla od 1 do 1 000 vrátane, pričom ak je nejaké číslo c už napísané na tabuli, ďalší hráč na ťahu môže pripísať buď číslo $c + 1$, alebo číslo $2c$. Čísla sa z tabule nezotierajú a každé môže byť napísané najviac raz. Prvý hráč začína, pričom na tabuli je napísané iba číslo 1. Vyhrá ten, kto prvý napíše číslo 1 000. Pre ktorého z hráčov existuje víťazná stratégia? Popíšte ju.

Úloha 1.22. Dokážte, že pre ľubovoľné $n > 2$ vieme nájsť n navzájom rôznych prirodzených čísel tak, že súčet ich prevrátených hodnôt je 1.

Úloha 1.23. Pre reálne x dokážte:

$$x^6 - 4x^5 + 8x^4 - 10x^3 + 8x^2 - 4x + 1 \geq 0.$$

Úloha 1.24. Petržlen bol u Ondreja na izbe a zbadal jeho prešibanú krysu. Nedalo sa nevšimnúť, že mala niečo za ľubom. (Vlastne ako vždy.) Ofarbovala prirodzené čísla rôznymi farbami (každé číslo práve jednou farbou) tak, aby platilo: Ak je rozdiel dvoch rôznych prirodzených čísel prvočíslo, tak tieto čísla majú rôznu farbu. S akým najmenším počtom rôznych farieb sa to mohlo kryse podariť? Vysvetlite tiež, prečo by jej menej farieb nestačilo.

Úloha 1.25. Dada má krúžok a na ňom n kľúčov ($n \geq 3$). Keď ho vyberie z vrecka, nevie, či sa jej náhodou nepootočil alebo neobrátil. Jediný spôsob, ako rozlíšiť kľúče, je zafarbiť ich (každý kľúč dostane jednu farbu). Aký je najmenší možný počet farieb, ktoré Dada potrebuje?

Úloha 1.26. Kuna rada skáče po prirodzených číslach. Avšak neskáče hocijako, robí len nasledovné skoky: Z čísla n sa vie dostať na číslo $2n$ a naopak. Z čísla n sa vie taktiež dostať na číslo $3n + 1$ alebo naopak. Vie sa z každého prirodzeného čísla nejakou postupnosťou skokov dostať na číslo 1?

Úloha 1.27. Cifry prirodzeného čísla sme preusporiadali a číslo, ktoré vzniklo, sme pripočítali k pôvodnému. Dostali sme tak výsledok 10^{10}. Dokážte, že pôvodné číslo bolo deliteľné desiatimi.

Úloha 1.28. Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník, ktorého vnútorné uhly BAD a BCD majú rovnakú veľkosť. Os uhla ABC pretína priamku AD v bode P. Kolmica z bodu A na priamku BP pretína priamku BC v bode Q. Dokážte, že priamky PQ a CD sú rovnobežné.

Úloha 1.29. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník s vnútorným uhlom $30°$ pri vrchole A. Nech V je priesečník jeho výšok a M stred strany BC. Označme U obraz bodu V v stredovej súmernosti so stredom M. Dokážte, že $|AU| = 2|BC|$.

Úloha 1.30. Pre ktoré prirodzené čísla n je výraz $n^2 + 3^n$ druhou mocninou prirodzeného čísla?

Úloha 1.31. Dokážte, že čísla 1, 2, ..., 16 vieme rozmiestniť na šachovnicu 4×4 tak, že každé použijeme práve raz a rozdiel čísel na ľubovoľných dvoch políčkach susediacich stranou bude najviac 4. Dokážte, že ich nevieme rozmiestniť tak, aby sme opäť každé použili práve raz, ale rozdiel čísel na ľubovoľných dvoch susedných políčkach bol vždy najviac 3.

Úloha 1.32. V 99 škatuliach sa nachádzajú nejaké jablká a nejaké pomaranče. Dokážte, že môžeme vybrať 50 škatúľ tak, že obsahujú aspoň polovicu všetkých jabĺk a aspoň polovicu všetkých pomarančov.

Úloha 1.33. Kružnica, rozdelená na n oblúkov bodmi postupne pomenovanými 1, 2, 3, ..., n, reprezentuje hraciu arénu pre dvoch hráčov, ktorí sa striedajú v ťahaní. V jednom ťahu si hráč vyberie dva zatiaľ voľné body (také, ktoré ešte nie sú koncom žiadnej úsečky) s rovnakou paritou a spojí ich úsečkou. Môže ale spojiť iba také body, aby novovzniknutá úsečka nepretínala žiadnu z predchádzajúcich úsečiek. Prehrá ten hráč, ktorý už nemôže spraviť ťah. Ak obaja hráči používajú optimálnu stratégiu, ktorý z nich vyhrá?

2 Riešenia

1.1 Sledujte posledné cifry cien. Zoberte si nejakú cifru a zistite, akú najväčšiu sumu, ktorá sa končí na vybranú cifru, nevieme zaplatiť bez vydávania.

V podúlohe a) je hľadanou sumou 89 Kk (korún krajinských). Najmenšia suma končiaca cifrou 9, ktorú vieme zaplatiť bez vydávania, je 99 Kk.

KMS 07/08-Z1-1

1.2 [KMS 15/16-Z1-1, upravené] Mocniny čísla 9 dávajú po delení 11-timi postupne zvyšky 9, 4, 3, 5, 1, 9, 4, 3, ..., teda sa periodicky opakujú s periódou 5. Ďalej $9^9 \equiv (-1)^9 \equiv -1 \equiv 4 \pmod{11}$. Preto $9^{9^9} \equiv 9^4 \equiv= 5 \pmod{11}$, čo sme chceli.

1.3 [08/09-Z3-1]

$$H + S + B + J = 3J, \tag{1}$$
$$H + S + J + 45 = 5B, \tag{2}$$
$$11J = 17B. \tag{3}$$

Označme $X = H + S$.

$$X + B - 2J = 0, \tag{4}$$
$$X - 5B + J = -45, \tag{5}$$
$$-17B + 11J = 0. \tag{6}$$
$$\tag{7}$$

$$-6B + 3J = -45, \tag{8}$$
$$-17B + 11J = 0. \tag{9}$$

Z toho $J = 2B - 15$, $B = 33$, $J = 51$ a $X = 69$.

1.4 [08/09-Z3-2] $a_1 + a_2 + a_3 = 57 = a_2 + a_3 + a_4$, teda $a_1 = a_4$, ďalej $a_1 = a_4 = a_7 = a_{10} = \dots$. Keďže 3 a 26 sú nesúdeliteľné dostaneme tak rovnosť všetkých čísel.

1.5 [08/09-Z3-3] 3-farebných je $\binom{2017}{3}$, dvojfarebných je $2017 \cdot 2016$, všetko ide, iné možnosti nie sú. Teda spolu

$$\binom{2017}{3} + 2017 \cdot 2016.$$

1.6 [09/10-L1-3] Napr. dá 4, prístroj povie:

- 0 – vie všetko,
- 1 – dá dva z nich,
- 2 – dá dva z nich,
- 3 – dá dva z nich,
- 4 – vie všetko.

1.7 [KMS 07/08-L2-3] Sporom. Jeden účastník musí byť v skupine so všetkými svojimi kamarátmi, teda spolu tam musí byť 17 ľudí. To iseté platí aj pre druhú skupinu a máme 34 ľudí, spor.

1.8 [05/06-L1-3] Neexistuje. Také číslo má vždy ciferný súčet 5, teda nie je deliteľné tromi.

1.9 [02/03-Z3-3] Sporom, nech $p \mid a \pm b$ a $p \mid ab$ pre prvočíslo p. Z $p \mid ab$ BUNV máme $p \mid a$, potom z $p \mid a \pm b$ zas $p \mid b$, čo je spor.

1.10 [08/09-Z3-4] $\triangle DEF \sim \triangle BAF$, preto výška DEF je $b/3$, obsah teda $ab/12 = 1$. Obsah $BCEF$ je $ab/2 - 1 = 6 - 1 = 5$.

1.11 [07/08-Z1-4] Úsečka DC je ťažnicou trojuholníka ABC. Preto $|AD| = |DB|$. Ramená trojuholníka ADC sú úsečky AD a CD, keďže zvierajú $100°$. Dopočíta sa, vyjde $50°$.

1.12 použi $a^3 + b^3$ vzorček

1.13 Pomocou Vietovych vzťahoch získame $a + b + c = -3$, $ab + bc + ca = 4$, $abc = 11$. Ďalej tiež platí:
$t = -(a+b)(b+c)(c+a) = -a^2b - a^2c - ab^2 - 2abc - ac^2 - b^2c - bc^2 = -(-3-c)(-3-a)(-3-b) = -P(-3) = 23$.

1.14 [07/08-Z1-9] a) V novom čísle je namiesto cifry x cifra $9 - x$. Cifra $9 - x$ sa musí niekde nachádzať aj v prehádzanom čísle a takisto x niekde v pôvodnom čísle.

1.15 Veľa rôznymi spôsobmi, ktoré budú na prednáške, napríklad pomocou Hornerovej schémy sa dá ľahko prísť na to, že $P(x) = (x-1)^2(x+2)^3(x+3)$

1.16 Vezmime dvojicu bodov A, B s najväčšou vzdialenosťou d. Ak $d \leq 1$ máme po probléme, pretože všetky body sa nachádzajú v kruhu o vzdialenosti d od bodu A(resp.B), ak $d > 1$: vezmime akýkoľvek bod P, o ňom vieme povedať, že buď $|AP| < 1$ alebo $|BP| < 1$, no ale to znamená, že všetky body P sa nachádzajú v dvoch kruhoch, jeden kruh má stred v bode A a druhý v bode B.

1.17 Na šachovnici máme 32 bielych a 32 čiernych políčok. Použitím štvorca nám zostane ešte 30 bielych a 30 čiernych. V T-čku sú vždy 3 políčka jednej farby a 1 políčko zvyšnej. Keďže je T-čiek nepárny počet, nevieme ich rozdeliť na polovicu, teda aby pokryli rovnako bielych aj čiernych políčok, musí teda byť niektorých dominantných(3 z niektorej farby) viac a iných(z druhej farby) menej. To ale znamená, že aj celkovo bude z niektorej farby políčok viac ako z inej, ale to sa stať nesmie.

1.18 rozklad na súčet štvorcov Zkuste si rozmyslet, že pokud nerovnost platí pro všechna kladná čísla, pak platí už pro úplně všechna čísla. Při sestavování diskriminantu skládejte, co můžete, v součin. Až úlohu takto vyřešíte, zkuste ji vyřešit i rozkladem na součet čtverců.

1.19 [06/07-Z1-5] Všetky prvočísla okrem 2, 3 sú tvaru $6k \pm 1$, teda ak dávajú rozdiel dva, číslo medzi nimi, 2^n, musí byť násobok 6-tich. Čo však nie je, preto vyhovuje jedine $n = 2$.

1.20 Označte si počet chlapcov c a počet dievčat d. Dokážte, že platí $6d + 4c = cd$. Neznáme dajte na jednu stranu a rozložte na súčin.

Uvedenú rovnicu upravte do tvaru $(c-6)(d-4) = 24$. Preskúšajte všetky možnosti, ako rozložiť číslo 24 na súčin dvoch celých čísel.

1.21 [KMS 07/08-Z3-6] Hráč, ktorý napíše číslo 500 alebo 999, prehrá. Ktoré čísla musia byť napísané na tabuli, aby hráč na ťahu bol donútený napísať 500 alebo 999?

Vyhrá prvý hráč. Vždy napíše nejaké číslo (napr. najmenšie nenapísané) okrem 500, 501 a 999. Vďaka parite mu to funguje.

1.22 [07/08-Z1-7] Indukcia. Ak z indukčného predpokladu máme $1/k_1 + 1/k_2 + \ldots 1/k_n = 1$, tak $1/2 + 1/(2k_1) + 1/(2k_2) + \cdots + 1/(2k_n) = 1$. Na ľavej strane máme $n+1$ čísel. Ľahko overíme, že ich menovatele sú rôzne.

1.23 uhádni korene a všetko bude

1.24 4. 3 nestačia: 1, 3, 6, 8 sú vzdialené každé o prvočíslo. 4 stačia: ofarbíme podľa zvyškov mod 4 – rozdiel je vždy deliteľný 4-mi. [09/10-L1-7]

1.25 [07/08-Z2-7] Pre $n \geq 6$ stačia 2 farby: ABABBA a samé Ačka zvyšok. Ačko v strede má z jednej strany 2, z druhej 1 B, je tým jednoznačne určené a aj smery od neho. Pre menšie n sa rozoberie všetko, treba 3.

1.26 [07/08-L1-7] Áno, kuna to vie spraviť. Rozoberte všetky čísla podľa zvyšku po delení tromi.

- $3k \to 9k+1 \to 18k+2 \to 36k+4 \to 12k+1 \to 4k \to 2k \to k$,
- $3k+1 \to k$,
- $3k+2 \to 6k+4 \to 2k+1$.

1.27 [07/08-Z1-9] b) Skúste dôkaz sporom a pozrite sa na súčet všetkých cifier. Nech pôvodné číslo je $\overline{a_1 a_2 \ldots a_{10}}$ a poprehadzovaním jeho cifier dostaneme $\overline{b_1 b_2 \ldots b_{10}}$. Potom $(a_1+b_1)+\cdots+(a_9+b_9)+(a_{10}+b_{10}) = 9\cdot 9+10 = 91$. Môže byť táto hodnota nepárna?

1.28 [08/07-Z1-8] Priamky BU, CU sú postupne obrazmi výšok na stranu AB, AC v stredovej súmernosti so stredom M. Body A, B, U, C ležia na kružnici s priemerom AU.

1.29 [08/07-Z1-8] Dokážte, že body A, B, U, C ležia na kružnici s priemerom AU.

Na dokázanie prvého návodu využite, že priamky BU, CU sú postupne obrazmi výšok na stranu AB, AC v stredovej súmernosti so stredom M. Pre dokončenie úlohy si všimnite, že trojuholník BSC je rovnostranný.

1.30 [07/08-L1-9] Označte hodnotu výrazu ako x^2 a spolu s n^2 rozložte na súčin. Z rozkladu $3^n = (x-n)(x+n)$ musí platiť $x - n = 3^a$ a $x + n = 3^b$ pre $a < b$. Odčítaním rovníc dostaneme rovnicu $3^a(3^{b-a} - 1) = 2(a+b)$. Ukážte, že pre veľké hodnoty a, b táto rovnica nemá riešenie.

1.31 [07/08-Z3-9] V prvej časti úlohy stačí čísla zaradom napísať do tabuľky po riadkoch. V druhej časti úlohy môžu byť čísla 1 a 16 vzdialené:

1. 5 políčok (jedno je v rohu a druhé susedí s rohovým políčkom) – musí byť medzi nimi 1, 4, 7, 10, 13, 16, nemôžu byť všade.
2. 6 políčok (v protiľahlých rohoch) – ktoré čísla musia byť na uhlopriečke? A ktoré čísla tesne nad uhlopriečkou?

1.32 Usporiadajte si krabice podľa počtu pomarančov a krabicu s najväčším počtom pomarančov si odložte nabok. Zvyšok krabíc vhodne rozdeľte na polovice.

Zvyšných 98 krabíc usporiadaných podľa počtu pomarančov rozdeľte na polovice: jedna bude obsahovať krabice na párnych miestach a druhá na nepárnych. Ukážte že po pridaní odloženej krabice k ľubovoľnej skupine 49 krabíc dostaneme 50 krabíc obsahujúcich aspoň polovicu pomarančov.

1.33 [KMS 07/08-L1-11] Skúste nájsť a využiť rôzne typy symetrie. Pre $n = 4k$ urobí prvý hráč čiaru v strede, rozdelí tak arénu na dve symetrické polovice a potom len symetricky opakuje, čo robí druhý hráč. Pre $n = 4k+2$ je oproti každému párnemu bodu nepárny bod. Druhý hráč vie robiť ťahy symetricky podľa prvého. Pre nepárne n skúste prvým ťahom previesť situáciu s párnym počtom bodov.