Hallova veta

Jozef Rajník, Letná škola matematiky 31. 7. – 4. 8. 2017

Veta 1 (Hall)**.** Bipartitný graf G s partíciami A, B má perfektné párenie práve vtedy, keď ľubovoľná podmnožina vrcholov množiny A má aspoň toľko susedov ako prvkov.

Úloha 1. Nech G je bipartitný graf, v ktorom každý vrchol má stupeň $d > 0$. Dokážte, že jeho hrany možno zafarbiť d farbami tak, aby hrany so spoločným vrcholom mali rôznu farbu.

Úloha 2. Kúzelník zamiešal balíček 52 žolíkových kariet (bez žolíkov) a rozdelil ich na 13 kôpok po 4 karty. Dokážte, že Kúzelník vie z každej kôpky vybrať jednu kartu tak, aby z každej hodnoty vytiahol práve jednu kartu (t. j. dvojku, trojku, $\ldots$, kráľa a eso).

Úloha 3. Dané sú dva štvorcové kusy papiera, každý s obsahom 2003. Každý papier je rozdelený na 2003 mnohouholníkov s obsahom 1 (rozdelenia môžu byť rôzne). Jeden kus papiera položíme na druhý. Dokážte, že môžeme pomocou 2003 špendlíkov prepichnúť všetkých 4006 mnohouholníkov.

Úloha 4. Nech n je kladné celé číslo. Nech $S_1, S_2, \ldots, S_n$ sú podmnožiny množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ také, že pre ľubovoľné $1 \leq k \leq n$ zjednotenie ľubovoľných k podmnožín obsahuje aspoň k prvkov. Dokážte, že existuje permutácia $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ čísel $(1, 2, \ldots, n)$ taká, že $a_i \in S_i$.

Úloha 5. Na šachovnici $2n \times 2n$ políčok je v každom riadku a v každom stĺpci práve n kameňov. Dokážte, že vieme spomedzi nich vybrať $2n$ kameňov tak, že každý je v inom stĺpci a v inom riadku.

Úloha 6. Turnaja, ktorý trval $2n - 1$ dní, sa zúčastnilo $2n$ tímov. V jeden deň hral každý tím jednu hru proti inému tímu. V každej hre jeden tím vyhral a druhý prehral. Počas turnaja každý tím hral proti každému tímu práve raz. Je možné vybrať jeden víťazný tím z každého dňa bez toho, aby sme nejaký tím vybrali viackrát?

Úloha 7. Na každom políčku mriežky $n \times n$ je napísané číslo 0 alebo 1 tak, že ľubovoľná množina políčok, ktorá neobsahuje dve políčka v rovnakom riadku alebo v rovnakom stĺpci, obsahuje aspoň jednu jednotku. Dokážte, že existuje i riadkov a j stĺpcov, ktorých prienik obsahuje samé jednotky a navyše $i + j \geq n + 1$.

Úloha 8. Účastníci letných škôl išli autobusmi na výlet. Trojsten zabezpečil n autobusov rovnakej kapacity pre cestu tam aj späť. Každý účastník sedel na jednom sedadle. Pre všetkých účastníkov nestačilo $n - 1$ autobusov. Každý študent, ktorý išiel autobusom tam, išiel autobusom aj späť, ale nie nutne tým istým. Dokážte, že existuje n študentov takých, že každý dvaja študenti boli v rôznych autobusoch počas oboch jázd.

Úloha 9. Na istej planéte sa nachádza 2^N krajín, $N \geq 4$. Každá krajina má vlajku $1 \times N$ štvorčekov, na ktorej je každý štvorček zafarbený nažlto alebo namodro. Žiadne dve krajiny nemajú rovnakú vlajku. Hovoríme, že množina N vlajok je *pestrá*, ak tieto vlajky vieme usporiadať do štvorca $N \times N$ tak, že všetkých N štvorčekov na hlavnej diagonále má rovnakú farbu. Nájdite najmenšie kladné celé číslo M také, že z ľubovoľných M vlajok možno vybrať množinu N pestrých vlajok.