Dirichletov princíp

Tvrdenie(jednoduchá verzia): Ak rozmiestnime n + 1 predmetov do n priehradiek, tak aspoň v jednej priehradke budú aspoň dva predmety.

úloha 1: V krabici máme biele, červené a modré gulôčky. Koľko ich najmenej treba vybrať, aby aspoň dve mali rovnakú farbu?

úloha 2: V triede je 29 žiakov. V diktáte urobil každý žiak menej ako 25 chýb. Dokáž, že existujú dvaja žiaci, ktorý urobili rovnyký počet chýb.

úloha 3: Na letnej škole máme 21 účastníkov. Títo účastníci sa rozdelili do troch skupín po 7 ľudí na prvú prednášku. Po prvej prednáške sa rozdelili znova do troch skupín po 7 ľudí na druhú prednášku. Dokáž, že existujú dvaja účastníci, ktorý boli na rovnakých prvých dvoch prednáškach.

úloha 4: Máme štvorcovú záhradu so stranou 7 metrov. Rastie tam 50 stromov. Dokážte, že existujú dva stromy, ktorých vzdialenosť je menšia ako $1,5$ metra.

úloha 5: Každý bod kocky so stranou dĺžky a zafarbíme na červeno, na modro alebo na zeleno. Dokážte, že potom existujú dva body rovnakej farby, ktorých vzdialenosť je väčšia ako $\frac{7a}{5}$.

úloha 6: Máme $n+1$ prirodzených čísel. Dokážte, že rozdiel niektorých dvoch je deliteľný číslom n.

úloha 7: Máme lúku tvaru pravidelného 6-uholníka so stranou dĺžky a. 7 detí si tam hádže frisbee. Dokážte, že vzdialenosť medzi niektorými dvoma je menšia ako a.

úloha 8: Na párty je n ľudí. Každý zo zúčastnených pozná niekoľko ľudí na párty. Ak ja poznám teba, tak aj ty mňa. Dokážte, že existujú dvaja ľudia, ktorý poznajú rovnako veľa ľudí na párty.

úloha 9: Máme štvorec so stranou dĺžky 10 metrov. V ňom je 101 bodov. Dokážte, že existuje trojuholník s obsahom $1m^2$, v ktorom sú dva body.

úloha 10: Dokážte, že ak je zadaných 9 mrežových bodov v priestore, potom existujú aspoň dva z nich také, že aj stred úsečky nimi určenej je mrežový bod.

Tvrdenie(všeobecná verzia): Ak je viac ako $m \times n$ predmetov rozdelených do n priehradiek, tak aspoň v jednej priehradke je viac ako m predmetov.

úloha 11: Máme skupinu 25 ľudí. Dokážte, že aspoň traja z nich sa narodili v rovnakom mesiaci.

úloha 12: Máme štvorec so stranou dĺžky 6 metrov. V ňom je 37 bodov. Dokážte, že existuje štvorec so stranou dĺžky 2 metre, v ktorom je 5 bodov.

úloha 13: Máme 55 prirodzených čísel menších ako 101. Dokážte, že existujú dve čísla, ktorých rozdiel je 9, 10, 11(nie), 12 a 13.

úloha 14: Máme 30 žiakov v triede. Písali diktát. Vieme, že každý spravil menej ako 13 chýb. Dokážte, že aspoň traja spravili rovnaký počet chýb.

úloha 15: Dokáž, že medzi číslami 7, 77, 777, ... existujú dve, ktorých rozdiel je deliteľný číslom 4.

úloha 16: Dokáž, že existuje číslo napísané len pomocou 1 a 0, ktoré je násobkom 7.

úloha 17: Dokáž, že z množiny $\{1, 2, \ldots, 200\}$ vyberieme 101, budú medzi nimi dve také, že jedno je deliteľom druhého. Dokáž, že je možné vybrať 100 čísel takých, že žiadne nie je deliteľom druhého.

úloha 18: Máme šachovnicu a na nej 25 veží, ktoré sú ale fancy a ohrozujú všetky políčka v svojom riadku a stĺpci. Dokážte, že existujú 4 také veže, ktoré sa neohruzujú (ľubovoľná z nich neohrozuje zvyšné tri).

úloha 19: Dokáž, že ak z množiny $\{1, 2, \ldots, 99\}$ vyberieme ľubovoľnú 10-prvkovú podmnožinu P,tak medzi jej podmnožinami existujú dve disjunktné, ktoré majú rovnaký súčet prvkov.