

Úvod do dôkazov

Jozef Rajník, Letná škola matematiky 31. 7. – 4. 8. 2017

Úloha 1. Trojuholník ABC je rozdelený na dva trojuholníky ABD a ADC , ktoré sú rovnoramenné tak, že platí $|BD| = |AD| = |CD|$. Veľkosť uhla ADB je 100° . Dokážte, že úsečky AC a BC zvierajú uhol 50° .

Úloha 2. Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla a, b platí

$$a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

Úloha 3. Dokážte, že ak celé čísla a, b sú deliteľné 47-mimi, tak číslo $a + b$ je tiež deliteľné 47-mimi.

Úloha 4. Dokážte, že ak 5 nedelí n , tak 25 nedelí n .

Úloha 5. Dokážte, že $\sqrt{2}$ je iracionálne číslo.

Úloha 6. Dokážte, že ak súčin dvoch reálnych čísel x a y je iracionálne číslo, musí byť aspoň jedno z čísel x a y iracionálne.

Úloha 7. Dokážte, že ak súčet dvoch celých čísel je párne číslo, musia mať tieto čísla rovnakú paritu (čiže rovnaký zvyšok po delení dvomi).

Úloha 8. Na sústreďení sa stretlo 32 účastníkov. Už pred sústreďením každý poznal okrem seba aspoň 16 z ostatných účastníkov. Dokážte, že týchto účastníkov nevieme rozdeliť na dve (nie nutne rovnako veľké) neprázdne skupiny tak, aby nikto z jednej skupiny nepoznal nikoho z druhej skupiny.

Úloha 9. Dokážte, že $\sqrt{3}$ je iracionálne číslo.

Úloha 10. Dokážte, že prirodzených čísel je nekonečne veľa

Úloha 11. Dokážte, že prvočísel je nekonečne veľa.

Úloha 12. Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené číslo n je číslo n^2 je deliteľné 7-mimi práve vtedy, keď je deliteľné 49-mi.

Úloha 13. Nech x, y sú celé čísla. Dokážte, že číslo $23x + y$ je deliteľné 50-timi práve vtedy, keď je číslo $19x + 3$ deliteľné 50-timi.

Úloha 14. Zapište číslo 2008 ako súčet niekoľkých prirodzených čísel, ktorých súčin je maximálny a ukážte, že neexistuje lepšie riešenie.

Úloha 15. Daných je 21 rôznych čísel takých, že súčet ľubovoľných jedenástich z nich je väčší ako súčet desiatich zvyšných čísel. Dokážte, že každé z daných čísel je väčšie ako 100.