

Počítanie zvyškov

Jozef Rajník, Letná škola matematiky 31. 7. – 4. 8. 2017

Úloha 1. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí

1. $2 \mid n^2 - n$,
2. $3 \mid n^3 - n$,
3. $3 \mid n^3 + 2n$,
4. $30 \mid n^5 - n$,
5. $60 \mid n^6 - n^2$,
6. $42 \mid n^7 - n$.

Úloha 2. Zistite, či je číslo $(9^9)^9 + 6$ deliteľné 11-timi.

Úloha 3. Dokážte, že aspoň jedno zo štyroch prirodzených čísel p , q , $p + q$, $p - q$ je deliteľné tromi.

Úloha 4. Dokážte, že súčet $2^{60} + 7^{30}$ je deliteľný číslom 13.

Úloha 5. Ukážte, že ak $7 \mid 2x + 1$, tak $7 \mid 3x - 2$.

Úloha 6. Dokážte, že pre všetky celé čísla x , y platí

$$50 \mid 19x + 3y \Leftrightarrow 50 \mid 23x + y.$$

Úloha 7. Nájdite všetky celé čísla a , b také, že pre všetky celé čísla x , y platí

$$50 \mid 19x + 3y \Leftrightarrow 50 \mid ax + by.$$

Úloha 8. Existuje také celé číslo a , že výraz

$$\frac{a^5}{5} + \frac{a^3}{3} + \frac{7a}{15}$$

nie je celým číslom?

Úloha 9. Nájdite zvyšok čísla $6^{83} + 8^{83}$ po delení

- a) číslom 7,
- b) číslom 49.

Úloha 10. Dokážte, že existuje nekonečne veľa členov Fibonacciho postupnosti deliteľných číslom a) 10, b) 11, c) 42, d) 47, e) 1 000?

Poznámka. Fibonacciho postupnosť 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... sa začína členmi 1, 1 a každý nasledujúci člen je určený ako súčet dvoch predchádzajúcich členov.