

# Uhly úlohy

## Na rozcvičku

**Úloha 1 (Švrčkov bod)** *Danný je trojuholník  $ABC$  a jemu opísaná kružnica  $k$ . Nech  $I$  je stred vpísanej kružnice trojuholníku  $ABC$  a  $E$  stred prírísanej kružnice ku strane  $BC$ .*

- 1. Dokážte, že os uhla  $\angle BAC$  a os strany  $BC$  sa pretínajú na  $k$ . (Označíme tento bod  $D$ )*
- 2. Dokážte, že body  $B, C, I, E$  ležia na kružnici so stredom v  $D$ .*

**Úloha 2** *Danné sú kružnice  $k, l$ , ktoré sa pretínajú v bodoch  $A, B$ . Na kružnici  $k$  zvolíme bod  $X$ . Priesečník priamky  $XB$  s kružnicou  $l$  označíme ako  $Y$ . Ukážte, že vnútorné trojuholníka  $AXY$  sú nezávisle od výberu  $X$ .*

**Úloha 3** *Danný je trojuholník  $ABC$ . Zostrojíme kružnicu  $k$ , ktorá sa dotýka strany  $AB$  v bode  $A$  a prechádza bodom  $C$ . Analogicky zostrojíme kružnice  $l, m$ . Dokážte, že tieto  $k, l, m$  sa pretínajú v jednom bode.*

**Úloha 4** *Je danný trojuholník  $ABC$  a bod  $D$  na jeho kružnici opísanej. Z bodu  $D$  spustíme kolmice na strany  $BC, CA, AB$ , a ich päty označíme  $P, Q, R$ . Dokážte, že  $P, Q, R$  ležia na priamke.*

**Úloha 5** *Na stranách  $BC, CD$  štvorca  $ABCD$  sú zvolené body  $P, Q$  tak, že  $|\angle QAP| = 45^\circ$ . Nech  $X$  je priesečník  $AP$  s  $BD$  a  $Y$  priesečník  $AQ$  s  $BD$ . Ukážte, že body  $X, Y, P, Q, C$  ležia na kružnici.*

**Úloha 6** *Danný je rovnobežník  $ABCD$  a bod  $P$  vo vnútri tak, že platí  $|\angle APB| + |\angle CPD| = 180^\circ$ . Dokážte  $|\angle PBC| = |\angle PDC|$ .*

## Pokročilé úlohy

**Úloha 7** *Danný je tetivový štvoruholník  $ABCD$ . Označme  $P = AB \cap CD, Q = BC \cap DA$ . Dokážte, že osy uhlov  $\angle APD$  a  $\angle BQD$  sú na seba kolmé.*

**Úloha 8** *Štvorec  $ABCD$  je vpísaný do kružnice  $k$ . Na kratšom obluku  $CD$  kružnice  $k$  zvolíme bod  $L$ . Nech,  $K = AL \cap CD, M = AD \cap CL$  a  $N = MK \cap BC$ . Dokážte, že body  $B, L, M, N$  ležia na kružnici.*

**Úloha 9** *Nech  $ABC$  je ostrouhlý trojuholník, v ktorom vnútorný uhol pri vrchole  $A$  má veľkosť  $45^\circ$ . Označme  $D$  päť výšky z vrcholu  $C$ . Uvažujme ďalej ľubovoľný vnútorný bod  $P$  výšky  $CD$ . Dokážte, že priamky  $AP$  a  $BC$  sú navzájom kolmé práve vtedy, keď úsečky  $AP$  a  $BC$  sú zhodné.*

**Úloha 10** *Danný je ostrouhlý trojuholník  $ABC$  s pätami výšok  $D, E, F$  ležiacimi postupne na stranách  $AB, BC, CA$ . Obray bodu  $F$  v stredovej súmernosti podľa stredu strany  $AB$  leží na priamke  $DE$ . Určte veľkosť uhla  $BAC$ .*

**Úloha 11** *Danný je trojuholník  $ABC$  so stredom kružnice vpísanej  $I$  a vnútorným bodom  $P$ , pričom platí :*

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$$

*Ukážte, že  $|AP| \geq |AI|$ , pričom rovnosť nastáva práve vtedy keď  $I = P$*

**Úloha 12** *V rovnoramennom trojuholníku  $ABC$  ( $|AC| = |BC|$ ) sa jemu vpísana kružnica  $k$  dotýka strán  $AB, BC$  postupne v bodoch  $D$  a  $E$ . Priamka  $l$  prechádzajúca bodom  $A$ , rôzna od priamky  $AE$ , pretína  $k$  v bodoch  $F$  a  $G$ . Priamka  $AB$  pretína  $EF$  a  $EG$  postupne v bodoch  $K$  a  $L$ . Ukážte, že  $|DK| = |DL|$ .*