

## Kongruencie príklady

**Úloha 1** Dokážte, že druhá mocnina prirodzeného čísla dáva po delení štyrmi len zvyšky 0 a 1.

**Úloha 2** Zistite zvyšky čísel  $2^{10}$ ,  $2^{100}$ ,  $2^{1000}$  po delení siedmimi a čísel  $2^{1000}$  a  $2^{2^{1000}}$  po delení 41.

**Úloha 3** Nech  $k$  je prirodzené číslo. Aký zvyšok môže dávať číslo  $2^{10^k}$  po delení číslami 7, 8, 9?

**Úloha 4** Zistíte nasledujúce zvyšky:

a)  $17^{341} \pmod{5}$

b)  $19^{19^{19^{19}}} \pmod{6}$

c)  $17^{10000} \pmod{30}$

d)  $10^{881} - 1 \pmod{23}$

**Úloha 5** Nájdite všetky riešenia:

a)  $7x \equiv 77 \pmod{40}$

b)  $12y \equiv 30 \pmod{54}$

**Úloha 6** Dokážte, že ak  $p$  a  $q$  sú dve navzájom rôzne prvočísla, tak  $p^q + q^p \equiv p + q \pmod{pq}$

**Úloha 7** Ukážte, že pre každé prvočíslo  $p$  vieme nájsť nekonečne veľa čísel  $n$  takých, že  $p$  delí  $2^n - n$

**Úloha 8** Dokážte, že pre každé prirodzené číslo  $n$ , je číslo  $2^{n+2} + 3^{2n+1}$  je deliteľné 7.

**Úloha 9** Nájdite všetky prvočísla  $p$ , pre ktoré  $p \mid 5^{p^2} + 1$ .

**Úloha 10** Ukážte, že  $2^{19} + 5^{40}$  nieje prvočíslo.

**Úloha 11** Nájdite všetky dvojice celých čísel  $x, y$  pre ktoré platí  $x^2 + y^2 = 2001(x - y)$ .

**Úloha 12** Nech  $n$  je prirodzené číslo také, že  $n(n + 1)/3$  je štvorec. Ukážte, že  $n$  je deliteľné 3 a že  $n + 1$  a  $n/3$  su tiež štvorce.

**Úloha 13** Označme ciferný súčet čísla  $n$  ako  $s(n)$ . Vypočítajte  $s(s(s(s(4444^{4444}))))$ .

**Úloha 14** Ukážte, že  $2^p + 3^p$  nieje  $n$ -tá mocnina ( $n > 1$ ) pre prvočíslo  $p$ .

**Úloha 15** Dokážte, že ak  $n$  je nesúdeliteľné s 10, tak existuje násobok  $n$ , ktorého zápis v desiatkovej sústave pozostáva zo samých deviatok.