Mocnosť 1 príklady

Úloha 1 *Danná je kružnica k a bod M ležiaci mimo k. Priamka p prechádza bodom M a pretína k v bodoch A, B. Nech T je ľubovoľný bod na k. Ukážte, že MT je dotyčnicou ku k práve vtedy, keď* $|\measuredangle MAT| = |\measuredangle MTB|$.

Úloha 2 *Kružnice k, l sa pretínajú v bodoch A, B. Priamka AB pretne spoločnú dotyčnicu kružníc k, l, ktorá sa ich dotýka v bodoch T, U, v bode P. Ukážte, že* $|PT| = |PU|$.

Úloha 3 *Kružnice k, l sa pretínaju v bodoch X, Y. Bodom M vedieme priamky p a q, ktoré pretnú k, l v bodoch A, B resp. C, D. Dokážte, že body A, B, C, D ležia na kružnici práve vtedy, keď* $M \in XY$.

Úloha 4 *Na predĺžení tetivy KL kružnice k so stredom O leží bod A. Dotyčnice z bodu A ku kružnici k sa dotýkajú v bodoch T, U. Nech M je sted TU. Ukážte, že KLMO je tetivový štvoruholník.*

Úloha 5 *Nech S je stred obluku AB na kružnice k. Priamka p prechádza bodom S a pretína AB v K a k v L. Dokážte, že* $MA^2 = MK \cdot ML$.

Úloha 6 *Je danná kružnica k s priemerom AB. Body P, Q su danné na úsečke AB tak, že* $AP = BQ$. *Rovnobežné polpriamky vychádzajúce z P a Q pretnú k postupne v bodoch X a Y. Dokážte, že súčin* $PX \cdot QY$ *je pevný(nezávislý od voľby polpriamok).*

Úloha 7 *Nech A a B sú body v rôznych polrovinách určených priamkou m. Nájdite kružnicu k, ktorá prechádza bodmi A a B a na priamke m vytína úsek PQ minimálnej dĺžky.*

Úloha 8 *Nech v lichobežníku ABCD platí* $AB \parallel CD$, $|AB| > |CD|$, $AC \perp BD$. *Označme O stred kružnice opísanej trojuholníku ABC a E priesečník priamok OB a CD. Ukážte, že platí rovnosť*

$$|BC|^2 = |CD| \cdot |CE|$$

.

Úloha 9 *Sú danné dve nepretínajúce sa kružnice k, l. Zkonštruujeme ich spoločné štyri dotyčnice a na každej vyznačíme stred úsečky určenými príslušnými bodmi dotykov. Dokážte, že tieto štyri stredy ležia na priamke.*

Úloha 10 *Na kružnici k sú danné body A, B, ktoré netvoria jej priemer. Uvažujme všetky kružnice* k_a, k_b, *ktoré maju vnútorny dotyk s k v bodoch A, B a ktoré majú navyše samy vonkajší dotyk. Dokážte, že ich spoloční dotyčnica prechádza pevným bodom.*

Úloha 11 *Je danný štvorec ABCD. Kružnica k precházdajúca ces A a C pretína kružnicu l prechádzajúcu cez B a D v bodoch P, Q. Dokážte, že stred štvorca leží na PQ. Platí to isté pre obdĺžnik alebo kosoštvorec?*

Úloha 12 *Označme H ortocentrum ostrouhlého trojuholníka ABC. Kružnica* k_a *so stredom v strede strany BC prechádzajúca H, pretína stranu BC v bodoch* A_1, A_2. *Podobne definujeme body* B_1, B_2, C_1, C_2. *Dokážte, že* $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ *ležia na kružnici.*

Úloha 13 *Na stranách trojuholníka ABC sú danné body P, Q tak, že* $AP = AQ$. *Na úsečke BC sú danné body S, R tak, že B, S, R, C ležia na priamke v tomto poradí a súčastne* $\angle BPS = \angle PRS$ *a* $\angle CQR = \angle QSR$. *Ukážte, že P, Q, R, S ležia na kružnici.*

Úloha 14 *Nech L je ľubovoľný vnútorný bod kratšieho oblúka CD kružnice opísanej štvorcu ABCD. Označme K priesečník priamok AL a CD, M priesečník priamok AD a CL a N priesečník priamok MK a BC. Dokážte, že body B, L, M, N ležia na tej istej kružnici.*