Korešpondenčný matematický seminár

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Jednota slovenských matematikov a fyzikov

Milí študenti, učitelia a ostatní matematickí nadšenci!

Dostávate do rúk úvodný leták zimnej časti 39. ročníka Korešpondenčného Matematického Seminára (KMS). Táto súťaž organizovaná občianskym združením Trojsten na pôde Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave (FMFI UK) je pre stredoškolákov jedinečnou príležitosťou na zdokonalenie svojich matematických schopností a logického myslenia. Zručnosti a skúsenosti získané pri riešení tohto seminára, prípadne pri účasti na záverečnom sústredení, sú veľmi cennou devízou aj pri riešení Matematickej olympiády (MO). Mladším a začínajúcim študentom je určená kategória ALFA, pre starších a skúsenejších je kategória BETA. Každý môže, samozrejme, v rámci svojich možností, riešiť obidve kategórie. Podrobnejšie informácie o jednotlivých kategóriách nájdete v pravidlách. Pre tých, ktorí majú vyššie ambície a chceli by uspieť na celoštátnom kole MO-A, je určený seminár *i*KS (Medzinárodný korešpondenčný seminár), ktorý organizujú vedúci KMS v spolupráci s českými kolegami z Matematického korespondenčního semináře. Tento seminár má veľmi špecifický cieľ, ktorým je príprava študentov na CK MO-A a aj na Medzinárodnú matematickú olympiádu. Ak máte akékoľvek otázky alebo pripomienky, smelo nás kontaktujte e-mailom na adrese `kms@kms.sk`, prípadne ich pošlite písomne na adresu uvedenú pod zadaniami.

Veľa úspechov a radosti z riešenia vám želajú

vaši organizátori

Pravidlá KMS

Všeobecné informácie o korešpondenčnom matematickom seminári

Súťaž sa skladá z dvoch nezávislých častí — zimnej a letnej. Každá z nich prebieha v rámci školského polroka. Na konci každej časti budú najúspešnejší riešitelia pozvaní na záverečné sústredenie. Každá časť pozostáva z troch kôl (alebo aj sérií) úloh. Zadania jednotlivých kôl nájdeš na stránke `kms.sk/ulohy/` vždy aspoň mesiac pred termínom odovzdania daného kola. Zadania tretieho kola pošleme tým, ktorí nám pošlú prihlášku. Úlohy budú obodované počtom bodov od 0 po 9. Body sa pritom udeľujú aj za čiastkové či neúplné riešenia. Za každú sériu sa riešiteľovi do poradia započíta 5 úloh s najväčším bodovým ziskom.

Kategórie ALFA a BETA

Na to, aby si vedel, ktoré príklady môžeš riešiť, potrebuješ poznať svoj koeficient κ. Tento koeficient si môžeš vypočítať ako $\kappa = r + \frac{2}{3}u + c$, pričom výsledok zaokrúhli nahor na celé číslo. Číslo r je tvoj ročník, číslo u je počet tvojich úspešných semestrov a číslo c je počet tvojich účastí na celoštátnom kole Matematickej olympiády. Semester považuj za úspešný, ak sa ti počas neho podarilo získať pozvánku na sústredenie KMS alebo si sa ho zúčastnil ako náhradník. Tvoj ročník je prepočítavaný podľa počtu rokov do maturity tak, aby maturant mal ročník 4, teda napr. prváci 5-ročného štúdia majú ročník 0.

Kategóriu ALFA môžu riešiť len študenti stredných škôl, ktorí sa nezúčastnili celoštátneho kola matematickej olympiády a ktorých koeficient κ je najviac 3.

Kategóriu BETA môžu riešiť všetci (aj zahraniční) študenti stredných škôl. Riešitelia ALFY sa vo výsledkovej listine BETY objavia až po sérii, v ktorej pošlú aspoň jednu z úloh 8, 9 alebo 10.

Kategória ALFA

Pre riešiteľov kategórie ALFA sú určené príklady 1–7. Úlohu číslo 1 môžu súťažne riešiť len študenti s $\kappa \leq 1$ a úlohu číslo 2 len študenti s $\kappa \leq 2$. Ostatné úlohy (3–7) môžu riešiť všetci riešitelia kategórie ALFA.

Kategória BETA

Pre riešiteľov kategórie BETA sú určené príklady 4–10. Úlohu číslo 4 môžu súťažne riešiť len študenti s $\kappa \leq 4$ a úlohu číslo 5 len študenti s $\kappa \leq 7$. Ostatné úlohy (6–10) môžu riešiť všetci riešitelia kategórie BETA.

Pozývanie na sústredenia

Po každej časti, zimnej aj letnej, sa uskutočnia **dve** sústredenia pre najúspešnejších riešiteľov oboch kategórií ALFA a BETA. Na každé z nich bude pozvaných aspoň 30 najlepších riešiteľov príslušnej kategórie. Ostatní riešitelia môžu byť pozvaní ako náhradníci.

Pokyny pre riešiteľov

- Príklady rieš samostatne. Riešenie každej úlohy riadne zdôvodni. V prípade, že v časti či celom riešení používaš odbornú literatúru, uveď jej názov, autora, vydavateľstvo, rok vydania a stranu, prípadne odkaz na internetovú stránku, ak si čerpal z internetu. Samozrejme, aj v tomto prípade zašli kompletné riešenie. Za riešenie využívajúce výpočtovú techniku spravidla nedostaneš veľa bodov.
- Odporúčame Ti pozrieť stránku Ako riešiť úlohy v KMS na adrese `/kms.sk/ako_riesit/`.
- Riešenia posielaj do termínu odoslania série. Ak posielaš riešenia z územia mimo Slovenskej republiky, treba to stihnúť do uvedeného zahraničného termínu. Riešenia odoslané po termíne odoslania (rozhodujúca je pečiatka na obálke) spôsobujú značné organizačné problémy, vyhradzujeme si preto právo udeliť nula bodov za všetky riešenia odoslané po termíne.
- Za riešenie odoslané po termíne sa považuje aj akékoľvek riešenie odovzdané organizátorom osobne.
- Riešenie každého príkladu píš na samostatný papier formátu A4. Ku každému príkladu uveď svoje meno, triedu, školu a adresu! Vítané sú aj riešenia v angličtine a češtine a riešenia písané v TeXu. Z organizačných dôvodov nebudú opravované riešenia písané v iných jazykoch.
- Na našej stránke `www.kms.sk/template` si môžeš stiahnuť a vytlačiť predlohy pre riešenia.
- Riešenia píš čitateľne. Ak nebudeme schopní prečítať časť tvojho riešenia, vyhradzujeme si právo neudeliť ti za tú časť body. Môžeš zvážiť písanie riešenia na počítači.
- Opravené, obodované a okomentované riešenia spolu so vzorovými riešeniami a prípadnou ďalšou korešpondenciou ti môžu byť zasielané domov, na internát alebo na inú adresu (napr. do školy). Nezabudni však v návratke uviesť presnú adresu, kam chceš dostávať poštu.
- Nedodržanie týchto pravidiel bude viesť k postihu.
- Pokiaľ máš dojem, že tvoje riešenie bolo nesprávne obodované, pošli čo najskôr sťažnosť na e-mailovú adresu `kms@kms.sk` spolu s oskenovaným riešením v prílohe. Žiadosť môžeš poslať aj písomne na našu adresu, ktorú nájdeš na konci letáku. Nezabudni k nej priložiť aj originál sporného riešenia.
- Ak ti nie je v zadaniach čokoľvek jasné, alebo máš akékoľvek pochybnosti, netreba sa báť spýtať sa nás. Ideálny spôsob je zaslanie e-mailu na `kms@kms.sk`.

Elektronické posielanie riešení

Svoje riešenia môžeš odovzdať aj na našej stránke. Presný návod na ich odovzdávanie nájdeš na stránke `www.kms.sk/eriesenia`. Pre elektronické posielanie riešení platia nasledovné pravidlá:

- Termín na odovzdanie je vždy v deň termínu odoslania kola o **24:00**. Po tomto čase už elektronické posielanie nie je možné. Tento jednotný termín sa týka aj zahraničných riešiteľov.
- Akceptované sú iba riešenia vo formáte pdf písané na počítači, prípadne naskenované. Pri ich tvorbe odporúčame použiť TeX, prípadne export do formátu pdf z iných aplikácií. Môžeš pritom využiť predlohy, ktoré nájdeš na našej stránke `www.kms.sk/template`. Ak posielaš oskenované riešenie, daj si pozor, či nie je príliš tmavé a či je čitateľné.
- Nezabudni v hlavičke riešenia uviesť svoje meno, triedu, školu a adresu!
- Pokiaľ na našej stránke vyplníš všetky potrebné údaje (pozri si návod na `www.kms.sk/eriesenia`), nemusíš posielať poštou papierovú návratku.

Klub Trojstenu

Riešiteľom z celého Slovenska odporúčame navštíviť Klub Trojstenu, ktorý sa uskutoční v Bratislave 20. októbra 2017 večer po Fyzikálnom Náboji (`physics.naboj.org`). Čaká ťa na ňom séria zaujímavých prednášok z matematiky, fyziky a informatiky. Program pokračuje prespávaním v telocvični a mestskou hrou na ďalší deň. Bližšie informácie nájdeš na internetovej stránke `klub.trojsten.sk`.

Rady pri riešení úloh

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame stránku `kms.sk/ako_riesit/`, na ktorej sa dozvieš, čo všetko treba k úplnému riešeniu úlohy. Taktiež sú na nej spomenuté časté chyby, ktoré sa v riešeniach úloh vyskytujú.

Nájdeš nás aj na facebooku

Pokiaľ používaš Facebook, dávame ti do pozornosti našu fanúšikovskú FB stránku s názvom KMS. Dozvieš sa tam všetky aktuálne informácie, nájdeš tam zaujímavosti, videá, fotky atď. Podeľ sa s nami o tvoje postrehy, prípadne navrhni ďalšie nápady prostredníctvom FB stránky. Neváhaj si nás pridať kliknutím na „Páči sa mi to“ priamo na `www.kms.sk/fb` a dozvieš sa o našich novinkách omnoho rýchlejšie!

Odporúčaná literatúra

Riešenie niektorých úloh môže byť pre teba náročné, zvlášť ak si sa s podobnými úlohami ešte nestretol. Preto ti odporúčame Zbierku KMS, v ktorej nájdeš užitočné metódy riešenia úloh. Taktiež obsahuje aj výber úloh z minulých ročníkov KMS, ktoré sú zoradené do tématických celkov. Zbierku KMS môžeš nájsť na stránke `www.kms.sk/zbierka`.

Ďalším spôsobom, ako sa môžeš zlepšiť, je prepočítavanie úloh so starších ročníkov. Všetky úlohy, ktoré sa v KMS vyskytli, spolu so vzorovými riešeniami môžeš nájsť v našom archíve na `www.kms.sk/archiv`. Pri riešení týchto úloh a čítaní vzorových riešení sa isto získaš užitočné skúsenosti.

Množstvo ďalších úloh spolu s užitočnými textami, ktoré uspokoja aj náročnejších riešiteľov, môžeš nájsť v archíve českého Matematického korespondenčního semináře na adrese `http://mks.mff.cuni.cz/archive/archive.php`

Záujemcom o ďalšie štúdium odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:

Hecht, T. – Skleráriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh

Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.

Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na adrese `www.kms.sk/kniznica`.

.... TU ODSTRIHNI !!! ....

Prihláška do zimnej časti KMS 2017/2018 – **poslať spolu s 1. kolom!**

Meno a priezvisko: .... Dátum narodenia: ....

Škola: ....

Rok maturity: .... Trieda: ....

Počet účastí na celoštátnom kole MO: ....

Adresa domov: ....

Adresa pre poštu (domov – škola – iná): ....

Tel. domov: .... mobil (vlastný): ....

e-mail: ....

Zadania 1. kola zimnej časti KMS 2017/2018

Kategória ALFA

Úloha č. 1: ($\kappa \leq 1$)
Veronika a Aňa sadia kvetinky v záhrade s rozmermi 7×8. Záhrada je rozdelená na štvorčekové políčka 1×1. Veronika sadí fialové kvetinky a Aňa sadí ružové kvetinky. Dievčatá sa striedajú v sadení a tá, ktorá zasadí poslednú kvetinku, prehrá. Dievča, ktoré je na ťahu, rozdelí pole na dve časti čiarou rovnobežnou so stranou poľa. Potom si vyberie jednu časť poľa, ktorá obsahuje aspoň jedno voľné políčko, a na všetky voľné políčka tej časti vysadí svoje kvetinky. Ak začína Aňa, ktoré z dievčat má víťaznú stratégiu?[1]

Úloha č. 2: ($\kappa \leq 2$)
Adam a Milan hrajú hru. Na začiatku majú na stole kôpku n mincí. Adam začína a následne sa s Milanom striedajú v ťahoch. Vo svojom ťahu hráč zoberie z kôpky taký počet mincí, ktorý je deliteľom aktuálneho počtu mincí na kôpke, avšak nesmie zobrať všetky mince. Hráč, ktorý je na ťahu a na stole leží len jedna minca, prehráva. V závislosti od prirodzeného čísla n určte, ktorý z hráčov má víťaznú stratégiu.[1]

Úloha č. 3: ($\kappa \leq 3$)
Iveta má na papieri narysované dve polpriamky k, s vychádzajúce zo spoločného bodu. Mimo polpriamok k, s sa nachádza bod M. Iveta chce narysovať body K a S, ktoré ležia postupne na polpriamkach k a s. Navyše chce, aby platilo $|KM| = |MS|$ a aby body K, M, S ležali na jednej priamke. Ivetá má k dispozícii euklidovské pravítko a kružidlo.[2] Nájdite pre Ivetu všeobecný postup konštrukcie, ktorým narysuje spomenuté body K, S.

Úloha č. 4: ($\kappa \leq 4$)
Kika pestuje tekvicu na poli, ktoré má tvar konvexného mnohouholníka.[3] Každý múdry sedliak však vie, že tekvicové pole sa najlepšie obrába, keď má tvar rovnoramenného trojuholníka. Kika si ďalej všimla, že svoje pole môže rozdeliť pomocou niekoľkých uhlopriečok na rovnoramenné trojuholníky, čo aj urobila. Uhlopriečky, ktorými je pole rozdelené, sa nepretínajú vnútri mnohouholníka. Dokážte, že niektoré dve strany pôvodného mnohouholníka majú rovnakú dĺžku.

Úloha č. 5: ($\kappa \leq 7$)
Čeky má 11 náramčekov, každý inej farby. Odkladá si ich do vreca, ktoré by sa roztrhlo, ak by v ňom bolo viac ako 11 kg. Ivka vie, že náramčeky majú v nejakom poradí hmotnosti 1, 2, 3, ..., 11 kg, ale nevie v akom. Čeky pozná hmotnosti všetkých náramčekov a chce dokázať Ivke, že ružový náramček váži 1 kg. V jednom kroku môže Čeky dať do vreca nejaké náramčeky a ukázať Ivke, že sa neroztrhlo. Koľko najmenej krokov potrebuje Čeky na to, aby Ivku presvedčila?

Úloha č. 6:
Zajo si vymaľoval steny a teraz hľadá čísla x, y, ktoré by si na ňu zavesil. Má však na ne veľké nároky. Musia vyhovovať rovniciam

$$x^3 - 5 \cdot \frac{y^2}{x} = \frac{6}{y}, \qquad y^3 - 5 \cdot \frac{x^2}{y} = \frac{6}{x}.$$

Nájdite všetky reálne čísla x, y, ktoré vyhovujú Zajovým nárokom.

Úloha č. 7:
Slavo rád počíta deliteľov. Preto si zobral nepárne prvočíslo p. Potom pre každé celé číslo k spĺňajúce $1 \leq k \leq p-1$ spočítal počet deliteľov čísla $kp+1$, ktoré sú väčšie ako k a menšie ako p, a výsledný počet si zapísal na papier. Určte súčet všetkých čísel, čo Slavo napísal na papier.

Kategória BETA
Úlohy číslo **4, 5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Marián sa rozhodol, že sa začne venovať geometrii. Čarodejník Š mu poradil, že podstatou každej geometrickej úlohy je nájsť 4 body, čo ležia na jednej kružnici. Skúste to s ním aj vy!
Majme rovnobežník $ABCD$. Nech H je priesečník výšok trojuholníka ABC. Rovnobežka so stranou AB cez bod H pretína priamky AD a BC postupne v bodoch Q a P. Rovnobežka so stranou BC cez bod H pretína priamky AB a CD postupne v bodoch R a S. Dokážte, že body P, Q, R, S ležia na jednej kružnici.

[1] Hráč má víťaznú stratégiu, ak si vie svojimi ťahmi zaručiť výhru bez ohľadu na to, ako hrá jeho súper.
[2] O tom, čo je to euklidovské pravítko a kružidlo a čo všetko sa s nimi môže a nemôže robiť si prečítajte na stránke `kms.sk/ako_riesit/konstrukcne_ulohy/`
[3] Konvexný mnohouholník je taký mnohouholník, v ktorom spojnica ľubovoľných dvoch bodov leží celá vnútri mnohouholníka.

Úloha č. 9:

Jožo cestoval autobusom obdivujúc krásy malebnom Slovensku. Prišlo mu však nevoľno kvôli nerovnostiam na slovenských cestách. Úplne ho dorazila nasledovná nerovnosť.
Nech a, b, c sú strany trojuholníka. Dokážte, že platí

$$2 < \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} < \sqrt{6}.$$

Úloha č. 10:

Mr. Miro sa nenaučil na test, tak sa musí spoľahnúť na svoje hekerské schopnosti. Okrem Mr. Mira sa testu účastní $n > 1$ študentov. Skúšajúci postupne zadáva otázky testu. Každú otázku najprv prečíta a dá na výber dve možnosti, z ktorých je práve jedna správna. Skôr, ako Mr. Miro napíše svoju odpoveď, je schopný pri každej otázke zistiť všetky odpovede ostatných študentov. Potom, čo všetci študenti (vrátane Mr. Mira) napíšu svoju odpoveď, skúšajúci ohlási správnu odpoveď a pokračuje ďalšou otázkou. Správna odpoveď je hodnotená 0 bodmi a nesprávna -2 bodmi, avšak nesprávna odpoveď Mr. Mira je hodnotená len -1 bodom, lebo Mr. Miro hekol hodnotiaci systém. Taktiež si Mr. Miro pri hekovaní nastavil 2^{n-1} bodov, pričom ostatní študenti začínali s 0 bodmi. Dokážte, že Mr. Miro môže zahlásiť: „Easy!“ a isto vie v teste skončiť najlepšie spomedzi všetkých študentov bez ohľadu na to, koľko otázok má test.

Návody a videonávody k úlohám

Po termíne série zverejňujeme na našej stránke `www.kms.sk` medzi novinkami návody k úlohám. Pomôžu vám doriešiť úlohy, s ktorými ste si nevedeli rady. Taktiež vám môžu pomôcť videonávody, ktoré nájdete na našom YouTube kanáli `www.youtube.com/user/KorMatSem`.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame Zbierku KMS, v ktorej nájdete užitočné metódy riešenia úloh a taktiež aj výber úloh z minulých ročníkov KMS. Môžete ju nájsť na stránke `kms.sk/zbierka`.
Všetky úlohy, ktoré sa v KMS vyskytli, spolu so vzorovými riešeniami môžete nájsť v našom archíve na `www.kms.sk/archiv`. Pri riešení týchto príkladov a čítaní vzorových riešení isto získate užitočné skúsenosti.
Množstvo ďalších úloh spolu s užitočnými textami, ktoré uspokoja aj náročnejších riešiteľov, môžete nájsť v archíve českého Matematického korespondenčního semináře na adrese `http://mks.mff.cuni.cz/archive/archive.php`

Partneri

Zadania 2. kola zimnej časti KMS 2017/2018

Kategória ALFA

Úloha č. 1: ($\kappa \leq 1$)
Mr. Miro je slávny svojou dokonalou dedukciou. Jeden známy mu raz rozprával o rovnobežníku, ktorý bol rozdelený priamkou na dva štvoruholníky. Sotva prezradil, že tieto dva štvoruholníky majú rovnaký obsah, Mr. Miro hneď hovoriac „Easy!“ doplnil, že v takom prípade musia isto mať aj rovnaký obvod. Dokáže, že Mr. Miro mal pravdu.

Úloha č. 2: ($\kappa \leq 2$)
O sláve Mr. Mira sa dopočuli aj vo Farebnom meste. Zavolali ho, aby im pomohol navrhnúť linky MHD. Vo Farebnom meste majú každú ulicu vymaľovanú jednou z troch farieb: červenou, zelenou alebo modrou. Každá ulica je obojsmerná a spája práve dve križovatky. Z každej križovatky vychádzajú práve tri ulice, z každej farby jedna. Každá linka MHD má cyklickú trasu. Nemá teda východziu a konečnú zastávku, ale chodí dokola po svojej trase. Pri jednom opakovaní trasy nesmie dvakrát prejsť tou istou ulicou. Dokážte, že je možné v meste zaviesť linky MHD tak, že každou ulicou budú premávať práve dve linky MHD.

Úloha č. 3: ($\kappa \leq 3$)
Agenti C. S. I. Žilina vypočúvajú ťažkého zločinca, ktorý im nechce nič prezradiť. Preto si na pomoc zavolali Mr. Mira. Všetko, čo Mr. Miro potrebuje, je psychicky zničiť zločinca nasledujúcou hrou.
Zločinec si tajne myslí 8 políčok na šachovnici 8×8, pričom žiadne dve neležia v rovnakom riadku ani v rovnakom stĺpci. Potom má Mr. Miro sériu pokusov. Jeden pokus spočíva v tom, že Mr. Miro umiestni 8 veží na šachovnicu tak, aby sa žiadne dve neohrozovali. Následne zločinec ukáže, ktoré z veží sa nachádzajú na políčkach, na ktoré myslí. Ak zločinec ukáže na párny[4] počet veží, tak Mr. Miro vyhráva. V opačnom prípade sa veže odstránia zo šachovnice a Mr. Miro má ďalší pokus. Určte najmenší počet pokusov, po ktorých vie Mr. Miro určite vyhrať.

Úloha č. 4: ($\kappa \leq 4$)
Mr. Miro bol pozvaný na párty dlhorukých basketbalistov. Všetkých 2017 účastníkov párty si posadalo za okrúhly stôl, každý s pohárikom v ruke. Každú sekundu si štrngnú pohárikmi, pričom dodržiavajú nasledovné dve pravidlá:

(i) Necinkajú si poháriky do kríža.
(ii) V danej sekunde si každý môže cinknúť nanajvýš raz.

Za koľko najmenej sekúnd si môže cinknúť každý s každým?

Úloha č. 5: ($\kappa \leq 7$)
Betka upiekla pre Mr. Mira koláč, aby bol Mr. Miro spokojný. Koláč má tvar trojuholníka s dĺžkami strán 19, 20 a 21 cm. Chce ho rozrezať pozdĺž jednej priamky na dva kusy a uložiť ich na kruhový tanier tak, aby sa neprekrývali ani nevyčnievali z taniera. Určte minimálny priemer taniera, pre ktorý sa to môže Betke podariť.

Úloha č. 6:
Mr. Miro je osvedčený detektív, takže pomáha pri pátraní kombinačných čísel. Nájdite dvojicu prirodzených čísel n a k takú, aby kombinačné číslo $\binom{n}{k}$ bolo deliteľné tisícimi a navyše

a) číslo n bolo najmenšie možné,
b) súčet $n + k$ bol najmenší možný.

Poznámka. Kombinačné číslo $\binom{n}{k}$ označuje počet spôsobov, ako vybrať z n predmetov k predmetov, pričom nám nezáleží na poradí. Možno ho vypočítať ako

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}.$$

Úloha č. 7:
Mr. Miro sa vo voľnom čase zaoberá medziľudskými pomermi. Pomery v geometrii sú však preňho easy, tie prenecháva vám.
Majme trojuholník ABC s opísanou kružnicou k. Dotyčnice ku kružnici k v bodoch A a B sa pretínajú v bode T. Kružnica opísaná trojuholníku ABT pretína priamky BC a AC postupne v bodoch D a E ($D \neq B$ a $E \neq A$). Priamky CT a BE sa pretínajú v bode F. Predpokladajme, že bod D je stredom úsečky BC. Určte pomer $|BF| : |BE|$.

[4] Nula je párne číslo.

Kategória BETA
Úlohy číslo **4, 5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Povesť Mr. Mira sa doniesla až do zahraničia. Zavolal si ho Jaromír Jágr, aby mu pomohol s výzdobou kuchyne. Jágr má v kuchyni vykachličkovaný štvorec $n \times n$ štvorcovými kachličkami 1×1. Chce ho vyzdobiť pomocou niekoľkých pravouhlých rovnoramenných trojuholníkov s preponou dĺžky 2, ktorých vrcholy sa budú nachádzať v mrežových bodoch štvorčekovej siete, ktorú vytvárajú kachličky. Navyše každá strana kachličky sa musí nachádzať práve v jednom trojuholníku (vnútri neho alebo na okraji). Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré je to možné.

Úloha č. 9:
Mr. Miro je spokojný, keď je najedený. Okrem toho je spokojný aj vtedy, keď nájde tri body ležiace na jednej priamke.
Majme trojuholník ABC. Označme A_1, B_1, C_1 postupne body dotyku jeho vpísanej kružnice so stranami BC, AC, AB. Nech O a I sú postupne stredy kružnice opísanej a vpísanej trojuholníku ABC a H_1 je ortocentrum trojuholníka $A_1B_1C_1$. Dokážte, že body O, I, H_1 ležia na jednej priamke.

Úloha č. 10:
Mr. Mira pozvali do školy na besedu. Pre žiakov si chce pripraviť nasledovnú úlohu. Povie im, že si myslí monický polynóm[5] stupňa 2017 s celočíselnými koeficientmi. Potom im povie k celých čísel $n_1, n_2, \ldots, n_k$, hodnotu súčinu $P(n_1)P(n_2)\ldots P(n_k)$ a „Easy!“ Úlohou žiakov je nájsť polynóm, ktorý vyhovuje týmto podmienkam. Mr. Miro navyše chce, aby existoval len jeden polynóm, ktorý vyhovuje spomenutým podmienkam. Nájdite najmenšie prirodzené číslo k, pre ktoré sa Mr. Mirovi môže podariť pripraviť takúto úlohu.

Návody a videonávody k úlohám

Po termíne série zverejňujeme na našej stránke `www.kms.sk` medzi novinkami návody k úlohám. Pomôžu vám doriešiť úlohy, s ktorými ste si nevedeli rady. Taktiež vám môžu pomôcť videonávody, ktoré nájdete na našom YouTube kanáli `www.youtube.com/user/KorMatSem`.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame Zbierku KMS, v ktorej nájdete užitočné metódy riešenia úloh a taktiež aj výber úloh z minulých ročníkov KMS. Môžete ju nájsť na stránke `www.kms.sk/zbierka`.
Všetky úlohy, ktoré sa v KMS vyskytli, spolu so vzorovými riešeniami môžete nájsť v našom archíve na `www.kms.sk/archiv`. Pri riešení týchto príkladov a čítaní vzorových riešení isto získate užitočné skúsenosti.
Množstvo ďalších úloh spolu s užitočnými textami, ktoré uspokoja aj náročnejších riešiteľov, môžete nájsť v archíve českého Matematického korespondenčního semináře na adrese `http://mks.mff.cuni.cz/archive/archive.php`
`www.kms.sk/kniznica`.

Partneri

Termín odoslania riešení: **6. november 2017** (pre zahraničie 3. november 2017)
Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `www.kms.sk`

[5] Monický polynóm je polynóm s vedúcim koeficientom 1, teda v tvare $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$.