

Návody k 1. kolu zimnej časti KMS 2017/2018

Úloha č. 1:

Skúste vysadiť kvetinky tak, aby neosadená časť po ťahu Ani tvorila štvorec. Ak na začiatku Veronikinho ťahu má neosadená časť štvorcový tvar, môže ostať štvorcová aj po Veronikinom ťahu?

Úloha č. 2:

Uvedomme si, že prehrá ten hráč, ktorému zostane jedena minca. Uvedomme si, že číslo 1 je deliteľom každého prirodzeného čísla. Uvedomme si, že nepárne čísla majú len nepárne delitele. Odobratím nepárneho počtu mincí z kôpky, ktorá má nepárny počet mincí, dostaneme kôpku s párnym počtom mincí.

Úloha č. 3:

Čo by sa stalo ak by sme premietli jedno z ramien stredovo súmerne podľa bodu P ?

Úloha č. 4:

Uvedomme si, že musí existovať trojuholník, ktorého dve strany sú aj stranami mnohouholníka. Pozrime sa najprv naň. Potom na trojuholník, ktorý má s tým trojuholníkom spoločnú stranu. Stále sa pozerajme na ďalší trojuholník, ktorý má s tým pred tým spoločnú stranu. Nakoniec až prideme k ďalšiemu trojuholníku, ktorý má dve strany, ktoré sú aj strany mnohouholníka.

Úloha č. 5:

Skúste hľadať také kombinácie náramčekov, ktoré obsahujú náramček s 1 kg a kebyže tento náramček vymeníme v tejto kombinácii za ľubovoľný iný, tak by sa nám vrece roztrhlo.

Úloha č. 6:

Predpokladajte, že $x \neq \pm y$. Sčítajte a odčítajte rovnice zo zadania. Úpravami dospejeme k sústave rovníc

$$(x^2 - xy + y^2)(xy - 5) = 6, \quad (x^2 + xy + y^2)(xy + 5) = 6.$$

Ukážte, že táto sústava nemá v reálnych číslach riešenie. Pre riešenia pôvodnej sústavy teda musí platiť $x = \pm y$.

Úloha č. 7:

Vypočítajte súčet Slavových čísel iným spôsobom. Koľkokrát zarátal Slavo číslo d ako deliteľa nejakého čísla? Presnejšie, koľko z čísel $p + 1, 2p + 1, \dots, (d - 1)p + 1$ je deliteľných číslom d ?

Úloha č. 8:

Skúste využiť mocnosť z bodu H . Viete, že body A, C a päty výšok z týchto vrcholov ležia na kružnici. Skúste z tejto mocnosti (stále z bodu H) a nejakých podobných trojuholníkov dostať to, čo chcete.

Úloha č. 9:

Na pravú stranu skúste Cauchy-Schwartz¹ a dorazte to trojuholníkovou nerovnosťou. Na ľavú stranu si povedzte, že BUNV $a + b + c = 1$ a dokážte, že $\sqrt{x/(1-x)} \leq 2x$.

Úloha č. 10:

Pozrite sa na množiny študentov, ktorí odpovedia rovnako. Koľko je tých množín? Vie Mr. Miro nejak odpovedať na základe tohto?

¹O Cauchy-Schwartzovej nerovnosti sa môžete dočítať napríklad v seriáli MKS Nerovnosti od strany 11, ktorý je dostupný na adrese <http://mks.mff.cuni.cz/archive/29/9.pdf>