Návody k 3. kolu zimnému časti KMS 2017/2018

Úloha č. 1:
Ak si povieme, že začíname s pekne vyzerajúcou kockou, do koľkých polôh ju vieme otočiť po k krokoch? Pre ktoré k bude možné dostať všetky polohy?

Úloha č. 2:
Skúste pomocou uhlov dokázať, že trojuholníky ACE a BDF sú rovnostranné a potom ďalej, že sú rovnaké.

Úloha č. 3:
Stačí ukázať, že každý lístok musíme presunúť o $2|7-x|+2$ teda, že sa musia vyhýbať.

Úloha č. 4:
Podoplňajte si do obrázka uhly, niektoré trojuholníky sú podobné.

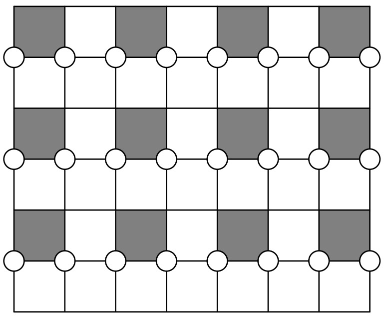
Úloha č. 5:
Sledujte mocniny dvojky, ktoré sa vyskytujú v prvočíselných rozkladoch čísel na vešiakov. Nech 2^c je najvyššia mocnina dvojky spomedzi prvočíselných rozkladov červených čísel a 2^m spomedzi rozkladov modrých čísel. Aby výsledný súčet bol mocninou dvojky, musí platiť $m=c$. Dokážte, že to nie je možné.

Úloha č. 6:
Rozmyslite si, že bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $l>d>o$. Všimnite si ďalej, že ak zmenšíme o, hodnota ľavej strany sa zmenší. Preto nám stačí nerovnosť dokázať pre najmenšiu možnú hodnotu o.

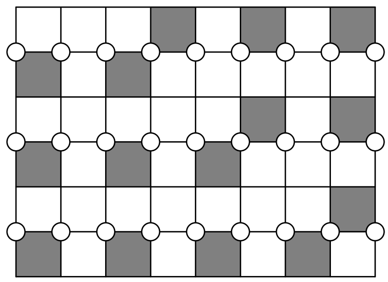
Úloha č. 7:
Všimnite si, že body A, K, M, H ležia na kružnici, ktorej stred S je stredom úsečky AK. Ďalej si všimnite, že trojuholník HMS je rovnostranný.

Úloha č. 8:
Skúste od pravej strany odpočítať nejaký násobok ľavej strany tak, aby ostal výraz závislý iba od n. Potom to isté, aby sa zrušil druhý člen a niečo s tým spravte.

Úloha č. 9:



Obr. 1: aspoň jeden z rozmerov nepárny



Obr. 2: oba rozmery párne.

Prečo nestačí menej lámp? Pozrite sa, koľko najmenej lámp potrebujeme, aby sme osvetlili šedé políčka?

Úloha č. 10:
Skúste namiesto pôvodnej úlohy dokazovať, že M je stred oblúka, to znamená, že si definujte K ako taký bod, aby ten uhol bol 90° atď. Všimnite si, že KP je dotyčnica ku kružnici opísanej ACP, z toho máte rovnoramenný trojuholník PQK a potom to už len vyuhlite.