



Milí študenti, učitelia a ostatní matematickí nadšenci!

Dostávate do rúk úvodný leták letnej časti 41. ročníka Korešpondenčného Matematického Seminára (KMS). Táto súťaž organizovaná občianskym združením Trojsten na pôde Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave (FMFI UK) je pre stredoškóľakov jedinečnou príležitosťou na zdokonaľenie svojich matematických schopností a logického myslenia. Zručnosti a skúsenosti získané pri riešení tohto seminára, prípadne pri účasti na záverečnom sústreďení, sú veľmi cennou devízou aj pri riešení Matematickej olympiády (MO).

Mladším a začínajúcim študentom je určená kategória ALFA, pre starších a skúsenejších je kategória BETA. Každý môže, samozrejme, v rámci svojich možností, riešiť obidve kategórie. Podrobnejšie informácie o jednotlivých kategóriách nájdete v pravidlách. Pre tých, ktorí majú vyššie ambície a chcú na celoštátnom kole MO kategórie A, je určený seminár iKS (Medzinárodný korešpondenčný seminár), ktorý organizujú vedúci KMS v spolupráci s českými kolegami z Matematického korešpondenčného seminára. Tento seminár má veľmi špecifický cieľ, ktorým je príprava študentov na CK MO-A a aj na Medzinárodnú matematickú olympiádu. Bližšie informácie o ňom nájdete na stránke www.iksko.org.

Ak máte akékoľvek otázky alebo pripomienky, smelo nás kontaktujte e-mailom na adrese kms@kms.sk, prípadne ich pošlite písomne na adresu uvedenú pod zadaniami.

Veľa úspechov a radosti z riešenia vám želajú

vaši organizátori

Pravidlá

Všeobecné informácie o korešpondenčnom matematickom seminári

Súťaž sa skladá z dvoch nezávislých častí — zimnej a letnej. Každá z nich prebieha v rámci školského polroka. Na konci každej časti budú najúspešnejší riešitelia pozvaní na záverečné sústreďenie. Každá časť pozostáva z troch kôl úloh. Zadania jednotlivých kôl nájdete na stránke <https://kms.sk/ulohy/> vždy aspoň mesiac pred termínom odovzdania daného kola. Úlohy 1 až 8 budú obodované počtom bodov od 0 po 9, úlohy 9 a 10 počtom bodov od 0 po 10. Okrem toho v niektorých špeciálnych prípadoch (popísané nižšie) môžu byť úlohy obodované aj od 0 po 5

Body sa udeľujú aj za čiastkové či neúplné riešenia. Za každé kolo sa riešiteľovi do poradia započíta 5 úloh s najväčším bodovým ziskom.

Kategórie ALFA a BETA

Na to, aby si vedel, ktoré úlohy môžeš riešiť, potrebuješ poznať svoj koeficient κ . Tento koeficient si môžeš vypočítať ako $\kappa = r + u + c$. Číslo r je tvoj ročník, číslo u je počet tvojich úspešných semestrov a číslo c je počet tvojich úspešných účastí na celoštátnom kole Matematickej olympiády. Semester považuj za úspešný, ak sa ti počas neho podarilo získať pozvánku na sústreďenie KMS alebo si sa ho zúčastnil ako náhradník. Tvoj ročník je prepočítavaný podľa počtu rokov do maturity tak, aby maturant mal ročník 4, teda napr. prváci 5-ročného štúdia majú ročník 0.

Kategóriu ALFA môžu riešiť len študenti, ktorí sa nezúčastnili celoštátneho kola matematickej olympiády a ktorých koeficient κ je najviac 3.

Kategóriu BETA môžu riešiť všetci študenti. Riešitelia ALFY sa vo výsledkovej listine BETY objavajú až po kole, v ktorom pošlú aspoň jednu z úloh 8, 9 alebo 10.

Kategória ALFA

Pre riešiteľov kategórie ALFA sú určené úlohy 1 až 7. Úlohu číslo 1 môžu súťažne riešiť len študenti s $\kappa \leq 1$ a úlohu číslo 2 len študenti s $\kappa \leq 2$. Ostatné úlohy (3 až 7) môžu riešiť všetci riešitelia kategórie ALFA.

Kategória BETA

Pre riešiteľov kategórie BETA sú určené úlohy 3 až 10. Úlohu číslo 4 môžu súťažne riešiť len študenti s $\kappa \leq 5$ a úlohu číslo 5 len študenti s $\kappa \leq 8$. Ostatné úlohy (6 až 10) môžu riešiť všetci riešitelia kategórie BETA.

Riešenia za 5 bodov

Koeficient κ určuje, ktoré úlohy môže riešiteľ súťažne riešiť (ostatné úlohy môže riešiť tiež, no nebudú zarátané do výsledného poradia). Okrem toho môže riešiteľ za najviac 5 bodov riešiť nasledujúce úlohy, aj keď mu to koeficient nedovoľuje:

- úloha s najvyšším poradovým číslom, ktorú koeficient riešiteľovi nedovoľuje riešiť;
- úloha číslo 4.

Napríklad:

- riešiteľ s koeficientom 5 nemôže súťažne riešiť úlohy 1 a 2, v úlohe 3 vie získať 5 bodov, v úlohách 4 až 8 vie získať po 9 bodov a v úlohách 9 a 10 vie získať po 10 bodov;
- riešiteľ s koeficientom 9 nemôže súťažne riešiť úlohy 1 až 3, v úlohách 4 a 5 vie získať po 5 bodov, v úlohách 6 až 8 vie získať po 9 bodov a v úlohách 9 a 10 vie získať po 10 bodov.

Bodovanie týchto úloh funguje tak, že opravovateľ ohodnotí úlohu od 0 po 9 bodov ako zvyčajne, ale riešiteľovi sa do súčtu bodov z nej započíta len polovica bodov zaokrúhlená nahor.

Pozývanie na sústredenia

Po každej časti, zimnej aj letnej, sa uskutočnia **dve** sústredenia pre najúspešnejších riešiteľov oboch kategórií ALFA a BETA. Na každé z nich bude pozvaných aspoň 36 najlepších riešiteľov príslušnej kategórie. Ostatní riešitelia môžu byť pozvaní ako náhradníci. V rámci jednej časti je možné zúčastniť sa najviac jedného sústredenia.

Pokyny pre riešiteľov

- Úlohy rieš samostatne. Riešenie každej úlohy riadne zdôvodni. V prípade, že v časti či celom riešení používaš odbornú literatúru, uveď jej názov, autora, vydavateľstvo, rok vydania a stranu, prípadne odkaz na internetovú stránku, ak si čerpal z internetu. Samozrejme, aj v tomto prípade zašli kompletne riešenie. Za riešenie využívajúce výpočtovú techniku spravidla nedostaneš veľa bodov.
- Riešenia posielaj do termínu odoslania série. Ak posielaš riešenia z územia mimo Slovenskej republiky, treba to stihnúť do uvedeného zahraničného termínu. Riešenia odoslané po termíne odoslania (roz-

hodujúca je pečiatka na obálke) spôsobujú značné organizačné problémy, vyhradzuje si preto právo udeliť nula bodov za všetky riešenia odoslané po termíne.

- Za riešenie odoslané po termíne sa považuje aj akékoľvek riešenie odovzdané organizátorom osobne.
- Riešenie každej úlohy píš na samostatný papier formátu A4. Ku každej úlohe uveď svoje meno, triedu, školu a adresu! Vítané sú aj riešenia v angličtine, češtine a riešenia písané v TeXu. Z organizačných dôvodov nebudú opravované riešenia písané v iných jazykoch.
- Na našej stránke si môžeš stiahnuť a vytlačiť predlohy pre riešenia.
- Riešenia píš čitateľne. Ak nebudeme schopní prečítať časť tvojho riešenia, vyhradzuje si právo neudelíť ti za tú časť body. Môžeš zvážiť písanie riešenia na počítači.
- Nedodržanie týchto pravidiel bude viesť k postihu.
- Po termíne kola môžeš na našej stránke nájsť návody, príp. aj videonávody, ktoré ti pomôžu (nesúťažne) doriešiť úlohy, s ktorými si mal/-a problém. Následne tam zverejníme aj vzorové riešenia.
- Opravené, obodované a okomentované riešenia s prípadnou ďalšou korešpondenciou ti môžu byť zasílané domov, na internát alebo na inú adresu (napr. do školy). Nezabudni však v návratke uviesť presnú adresu, kam chceš dostávať poštu.
- Pokiaľ máš dojem, že tvoje riešenie bolo nesprávne obodované, pošli čo najskôr sťažnosť na e-mailovú adresu spolu s oskenovaným riešením v prílohe. Žiadosť môžeš poslať aj písomne na našu adresu, ktorú nájdeš v hlavičke letáku. Nezabudni k nej priložiť aj originál sporného riešenia.
- Ak ti nie je v zadaniach čokoľvek jasné alebo máš akékoľvek pochybnosti, netreba sa báť spýtať sa nás. Ideálny spôsob je zaslanie e-mailu na kms@kms.sk.

Elektronické posielanie riešení

Svoje riešenia môžeš odovzdať aj v elektronickej podobe na našej stránke. Presný návod na ich odovzdávanie nájdeš na stránke . Pre elektronické posielanie riešení platia nasledovné pravidlá:

- Termín na odovzdanie je vždy v deň termínu odoslania kola o **23:59**. Po tomto čase už elektronické posielanie nie je možné. Tento jednotný termín sa týka aj zahraničných riešiteľov.
- Akceptované sú **iba riešenia vo formáte pdf** písané na počítači, prípadne naskenované, **pre každú úlohu jeden súbor**. Pri ich tvorbe odporúčame použiť TeX alebo export do formátu pdf z iných aplikácií. Môžeš pritom využiť predlohy, ktoré nájdeš na našej stránke <https://kms.sk/template>. Ak posielaš oskenované riešenie, daj si pozor, či nie je príliš tmavé a či je čitateľné.
- Nezabudni v hlavičke riešenia uviesť svoje meno, triedu, školu a adresu!
- Pokiaľ na našej stránke vyplníš všetky potrebné údaje (pozri si návod na <https://kms.sk/eriesenia>), nemusíš posilať poštou papierovú návratku.

Prihláška do letnej časti KMS 2018/2019 – poslať spolu s 1. kolom!
Poslanie návratky možno nahradiť registráciou na stránke <https://www.kms.sk/>.

Meno a priezvisko:
Škola:
Rok maturity: Dátum narodenia:
Počet účastí na celoštátnom kole MO:
Adresa domov:
Adresa pre poštu (domov – škola – iná):
Mobil (vlastný):
e-mail:

Svojím podpisom dávam podľa § 11 a nasl. zákona č. 18/2018 Z.z. o ochrane osobných údajov svoj výslovný súhlas so správou, spracovaním a uchovaním svojich osobných údajov, ktoré poskytujem občianskemu združeniu Trojsten. Poskytujem dobrovoľné údaje s tým, že tieto údaje môžu byť spracované v rámci občianskeho združenia Trojsten za účelom zostavenia výsledkových listín a vytvárania databázy uchádzačov pre účely pozývania na sústreďenie a ďalšej spolupráce so študentom. Beriem na vedomie a súhlasím s tým, že Trojsten môže moje údaje dlhodobo uchovávať a spracúvať za účelom poskytovania študentských príležitostí alebo iných odborných alebo spoločenských aktivít občianskeho združenia Trojsten. Súhlas je daný na dobu nevyhnutnú na dosiahnutie účelu spracovania a je ho možné kedykoľvek písomne alebo e-mailom odvolať.

Podpis:

Zadania 1. kola zimnej časti

Termín odoslania 30. 9. 2019 (pre zahraničie 27. 9. 2019)

1.1 Koláčik Mojej Starkej ($\kappa \leq 1$)

kategória **alfa**

Veronika našla na povale babičkin recept na famóznú angreštovo-broskyňovo-cviklovo-dyňovú tortu. V recepte tiež stojí, že ak sa pri pečení použije čarovný súčin ingrediencií, bude torta nielen chutná, ale aj rozdeliteľná medzi 12 ľudí. Veronike sa to však sprvu nezdalo.

Pre štyri celé čísla a, b, c, d nazvime *čarovný súčin* hodnotu výrazu $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$. Pomôžte Veronike nájsť všetky štvorice celých čísel (a, b, c, d) také, že žiadne dve z nich nemajú rovnakú hodnotu a ich čarovný súčin sa dá vydeliť číslom 12 bezo zvyšku.

1.2 Ktorá Minca Spadla ($\kappa \leq 2$)

kategória **alfa**

Na Veronikinu oslavu a chutný koláčik prišla tiež Bea, ktorá si so sebou priniesla aj vrecúško s 10 mincami. Deväť z nich je obyčajných, ale desiata je falošná – má na oboch stranách znak. Bea vybrala z vrecúška náhodnú mincu, hodila ju a padol na nej znak. Aká je pravdepodobnosť, že minca, ktorou hodila, bola falošná?

1.3 Krivky Mám Súbežné ($\kappa \leq 3$)

kategórie **alfa a beta**

Na svojom tanieri našiel Jožo nakreslený štvoruholník $ABCD$, ktorý mal strany AB a CD rovnobežné. Na uhlopriečke AC bol v strede vyznačený bod S . Jožo si všimol, že trojuholníky ABS a ACD majú rovnaký obsah a hneď vyhlásil, že priamka DS je preto rovnobežná s priamkou BC . Mal Jožo pravdu? Ak áno, ako na to prišiel? Ak nie, prečo?

1.4 Kilá Musia Sedieť ($\kappa \leq 5$)

kategórie **alfa a beta**

Diana neverila Jožovi, že sú obsahy trojuholníkov ABS a ACD na jeho tanieri zhodné a tak sa ich rozhodla odvážiť. Pri tomto úkone sa jej akurát tak podarilo úspešne rozbiť Veronike váhu. Veronike tak neostáva nič iné, iba si objednať novú sadu¹ závaží.

Hmotnosť každého závažia môže byť ľubovoľné kladné reálne číslo. Veronika chce, aby sa jej závažia dali rozdeliť na 5 kôpok, z ktorých každá váži rovnako veľa. Podobne chce aj to, aby sa závažia dali takto rozdeliť na 9 rovnako vážiacich kôpok. Najmenej koľko závaží musí Veronika objednať? Aké hmotnosti majú mať?

1.5 Každý Miluje Sladkosti ($\kappa \leq 8$)

kategórie **alfa a beta**

Zatiaľ, čo ostatní vedúci riešili problémy s váhou, Ondrej, Dominik a Tomáš sa rozhodli rozdeliť si n rovnakých cukríkov, ktoré nevinne ležali na stole. Chcú si ich rozdeliť tak, aby každý z nich dostal párny² počet cukríkov, alebo aby každý z nich dostal nepárny počet cukríkov. V závislosti od hodnoty kladného celého čísla n určte počet spôsobov³, ktorými si môžu chlapci cukríky rozdeliť.

1.6 Krátenie Mocniny Sedemnástky

kategórie **alfa a beta**

Jerry s Pedrom sa zase chceli zahrať počas oslavy videohru. Na to však najprv museli rozdeliť 17 farebných káblov do správnych portov. Tak sa v tom zamotali až musel prísť Vodka, ktorý im prisľúbil, že im pomôže, ak vyriešia nasledovnú úlohu:

¹Za sadu považujeme ľubovoľný kladný počet závaží ľubovoľnej hmotnosti.

²Nula je párne číslo.

³Dva spôsoby považujeme za navzájom rôzne, ak aspoň jeden z chlapcov má v každom z nich iný počet cukríkov.

Kolko existuje prirodzených čísel n , pre ktoré je číslo $17^{2019} \cdot n$ deliteľné číslom $17 + 2n$?

1.7 Kradnutie Mincí Strieborných

kategórie **alfa** a **beta**

Vo videohre sa zlodějka Robber-ta vlámala do banky. Našla tam 120 vriec, v každom je po 100 mincí. Avšak len v jednom vreci sa nachádzajú strieborné mince. Ostatné mince sú bezcenné, ale sú na nerozoznanie od strieborných. Vie, že strieborná minca váži 9 gramov a bezcenná váži 10 gramov. Robber-ta je ale na lúpež pripravená – kúpila si v Kanianke vreckovú váhu. Lenže, ako možno od kanianskej váhy očakávať, jej nosnosť je len 1000 gramov. V jednom kroku môže Robber-ta položiť na váhu ľubovoľné množstvo mincí (nie nutne z rôznych vriec) a váha ukáže ich celkovú hmotnosť. Ak však Robber-ta položí na váhu väčšiu hmotnosť ako 1000 gramov, váha sa pokazí, nič neukáže, exploduje a Robber-ta prehrá. Nájdite najmenší počet krokov, ktorý Robber-ta zaručene potrebuje na to, aby zistila, ktoré vrece obsahuje strieborné mince.

1.8 Kolmicu Musím Spraviť

kategória **beta**

Vodka sa na oslave začínal nudiť, lebo Robber-ta už nebola s ním, ale vo videohre. A tak sa kamarát Jožo rozhodol, že ho zabaví svojou novou geometriou.

Je daný trojuholník ABC , v ktorom platí $|AC| = 2|AB|$. Označme O stred kružnice opísanej tomuto trojuholníku. Os uhla BAC pretína stranu BC v bode D . Nech E je kolmý priemet O na AD . Ďalej nech F je bod na priamke AD rôznyi od D , pre ktorý platí $|CD| = |CF|$. Dokážte, že uhly EBF a ECF majú rovnakú veľkosť.

Vodka sa na úlohu pozrel, ihneď ju vyriešil a nudil sa ďalej...

1.9 Kuchtenie Múčnika Starkinho

kategória **beta**

Po oslave sa Veronika vybrala do pivnice, kde našla ďalší babičkin recept. Tiež využíval rovnaké ingrediencie ako ten prvý, ale tentokrát ich miešal do čarovného štvorpomeru. Babička v recepte tvrdí, že z tohto koláča sa vždy naje aspoň 0 ľudí. Poďme to dokázať.

Dokážte, že pre každú štvoricu kladných reálnych čísel a, b, c, d platí:

$$\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} + \frac{d-a}{a+b} \geq 0$$

Zistite, kedy nastáva rovnosť.

1.10 Knižka Moja Stratená

kategória **beta**

Veronika v pivnici tiež našla starú ošúchanú knižku. Mimo iného v nej bola legenda o bájnóm uhorskom kráľovstve a táto úloha:

Dané sú prvočísla p a q také, že $q = 2p + 1$. Dokážte, že existuje prirodzené číslo deliteľné q také, že jeho ciferný súčet v desiatkovej sústave je najviac 3.