



Milí študenti, učitelia a ostatní matematickí nadšenci!

Dostávate do rúk úvodný leták letnej časti 41. ročníka Korešpondenčného Matematického Seminára (KMS). Táto súťaž organizovaná občianskym združením Trojsten na pôde Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave (FMFI UK) je pre stredoškóľakov jedinečnou príležitosťou na zdokonaľenie svojich matematických schopností a logického myslenia. Zručnosti a skúsenosti získané pri riešení tohto seminára, prípadne pri účasti na záverečnom sústreďení, sú veľmi cennou devízou aj pri riešení Matematickej olympiády (MO).

Mladším a začínajúcim študentom je určená kategória ALFA, pre starších a skúsenejších je kategória BETA. Každý môže, samozrejme, v rámci svojich možností, riešiť obidve kategórie. Podrobnejšie informácie o jednotlivých kategóriách nájdete v pravidlách. Pre tých, ktorí majú vyššie ambície a chcú by uspieť na celoštátnom kole MO kategórie A, je určený seminár iKS (Medzinárodný korešpondenčný seminár), ktorý organizujú vedúci KMS v spolupráci s českými kolegami z Matematického korešpondenčného seminára. Tento seminár má veľmi špecifický cieľ, ktorým je príprava študentov na CK MO-A a aj na Medzinárodnú matematickú olympiádu. Bližšie informácie o ňom nájdete na stránke [www.iksko.org](http://www.iksko.org).

Ak máte akékoľvek otázky alebo pripomienky, smelo nás kontaktujte e-mailom na adrese [kms@kms.sk](mailto:kms@kms.sk), prípadne ich pošlite písomne na adresu uvedenú pod zadaniami.

Veľa úspechov a radosti z riešenia vám želajú

*vaši organizátori*

## Pravidlá

### Všeobecné informácie o korešpondenčnom matematickom seminári

Súťaž sa skladá z dvoch nezávislých častí — zimnej a letnej. Každá z nich prebieha v rámci školského polroka. Na konci každej časti budú najúspešnejší riešitelia pozvaní na záverečné sústreďenie. Každá časť pozostáva z troch kôl úloh. Zadania jednotlivých kôl nájdete na stránke [kms.sk/ulohy/](http://kms.sk/ulohy/) vždy aspoň mesiac pred termínom odovzdania daného kola. Úlohy budú obodované počtom bodov od 0 po 9. Body sa pritom udeľujú aj za čiastkové či neúplné riešenia. Za každé kolo sa riešiteľovi do poradia započíta 5 úloh s najväčším bodovým ziskom.

### Kategórie ALFA a BETA

Na to, aby si vedel, ktoré príklady môžeš riešiť, potrebuješ poznať svoj koeficient  $\kappa$ . Tento koeficient si môžeš vypočítať ako  $\kappa = r + \frac{2}{3}u + c$ , pričom výsledok zaokrúhli nahor na celé číslo. Číslo  $r$  je tvoj ročník, číslo  $u$  je počet tvojich úspešných semestrov a číslo  $c$  je počet tvojich účastí na celoštátnom kole Matematickej olympiády. Semester považuj za úspešný, ak sa ti počas neho podarilo získať pozvánku na sústreďenie KMS alebo si sa ho zúčastnil ako náhradník. Tvoj ročník je prepočítavaný podľa počtu rokov do maturity tak, aby maturant mal ročník 4, teda napr. prváci 5-ročného štúdia majú ročník 0.

Kategóriu ALFA môžu riešiť len študenti, ktorí sa nezúčastnili celoštátneho kola matematickej olympiády a ktorých koeficient  $\kappa$  je najviac 3.

Kategóriu BETA môžu riešiť všetci študenti. Riešitelia ALFY sa vo výsledkovej listine BETY objavajú až po kole, v ktorom pošlú aspoň jednu z úloh 8, 9 alebo 10.

## Kategória ALFA

Pre riešiteľov kategórie ALFA sú určené úlohy 1 až 7. Úlohu číslo 1 môžu súťažne riešiť len študenti s  $\kappa \leq 1$  a úlohu číslo 2 len študenti s  $\kappa \leq 2$ . Ostatné úlohy (3 až 7) môžu riešiť všetci riešitelia kategórie ALFA.

## Kategória BETA

Pre riešiteľov kategórie BETA sú určené príklady 4 až 10. Úlohu číslo 4 môžu súťažne riešiť len študenti s  $\kappa \leq 4$  a úlohu číslo 5 len študenti s  $\kappa \leq 7$ . Ostatné úlohy (6 až 10) môžu riešiť všetci riešitelia kategórie BETA.

## Pozývanie na sústredenia

Po každej časti, zimnej aj letnej, sa uskutočnia **dve** sústredenia pre najúspešnejších riešiteľov oboch kategórií ALFA a BETA. Na každé z nich bude pozvaných aspoň 30 najlepších riešiteľov príslušnej kategórie. Ostatní riešitelia môžu byť pozvaní ako náhradníci.

## Pokyny pre riešiteľov

- Príklady rieš samostatne. Riešenie každej úlohy riadne zdôvodni. V prípade, že v časti či celom riešení používaš odbornú literatúru, uveď jej názov, autora, vydavateľstvo, rok vydania a stranu, prípadne odkaz na internetovú stránku, ak si čerpal z internetu. Samozrejme, aj v tomto prípade zašli kompletne riešenie. Za riešenie využívajúce výpočtovú techniku spravidla nedostaneš veľa bodov.
- Odporúčame Ti pozrieť stránku Ako riešiť úlohy v KMS na adrese [www.kms.sk/ako\\_riesit/](http://www.kms.sk/ako_riesit/), kde nájdeš niekoľko užitočných rád.
- Riešenia posielaj do termínu odoslania série. Ak posielaš riešenia z územia mimo Slovenskej republiky, treba to stihnúť do uvedeného zahraničného termínu. Riešenia odoslané po termíne odoslania (rozhodujúca je pečiatka na obálke) spôsobujú značné organizačné problémy, vyhradzuje si preto právo udeliť nula bodov za všetky riešenia odoslané po termíne.
- Za riešenie odoslané po termíne sa považuje aj akékoľvek riešenie odovzdané organizátorom osobne.
- Riešenie každej úlohy píš na samostatný papier formátu A4. Ku každej úlohe uveď svoje meno, triedu, školu a adresu! Víťané sú aj riešenia v angličtine, češtine a riešenia písané v  $\text{\LaTeX}$ . Z organizačných dôvodov nebudú opravované riešenia písané v iných jazykoch.
- Na našej stránke [www.kms.sk/template](http://www.kms.sk/template) si môžeš stiahnuť a vytlačiť predlohy pre riešenia.
- Riešenia píš čitateľne. Ak nebudeme schopní prečítať časť tvojho riešenia, vyhradzuje si právo neudelíť ti za tú časť body. Môžeš zvážiť písanie riešenia na počítači.
- Opravené, obodované a okomentované riešenia s prípadnou ďalšou korešpondenciou ti môžu byť zaslané domov, na internát alebo na inú adresu (napr. do školy). Nezabudni však v návratke uviesť presnú adresu, kam chceš dostávať poštu.
- Nedodržanie týchto pravidiel bude viesť k postihu.
- Pokiaľ máš dojem, že tvoje riešenie bolo nesprávne obodované, pošli čo najskôr sťažnosť na e-mailovú adresu [kms@kms.sk](mailto:kms@kms.sk) spolu s oskenovaným riešením v prílohe. Žiadosť môžeš poslať aj písomne na našu adresu, ktorú nájdeš v hlavičke letáku. Nezabudni k nej priložiť aj originál sporného riešenia.

- Ak ti nie je v zadaniach čokoľvek jasné alebo máš akékoľvek pochybnosti, netreba sa báť spýtať sa nás. Ideálny spôsob je zaslanie e-mailu na [kms@kms.sk](mailto:kms@kms.sk).

## Elektronické posielanie riešení

Svoje riešenia môžeš odovzdať aj v elektronickej podobe na našej stránke. Presný návod na ich odovzdávanie nájdeš na stránke [www.kms.sk/eriesenia](http://www.kms.sk/eriesenia). Pre elektronické posielanie riešení platia nasledovné pravidlá:

- Termín na odovzdanie je vždy v deň termínu odoslania kola o **23:59**. Po tomto čase už elektronické posielanie nie je možné. Tento jednotný termín sa týka aj zahraničných riešiteľov.
- Akceptované sú **iba riešenia vo formáte pdf** písané na počítači, prípadne naskenované, **pre každú úlohu jeden súbor**. Pri ich tvorbe odporúčame použiť  $\text{\TeX}$  alebo export do formátu pdf z iných aplikácií. Môžeš pritom využiť predlohy, ktoré nájdeš na našej stránke [www.kms.sk/template](http://www.kms.sk/template). Ak posielaš oskenované riešenie, daj si pozor, či nie je príliš tmavé a či je čitateľné.
- Nezabudni v hlavičke riešenia uviesť svoje meno, triedu, školu a adresu!
- Pokiaľ na našej stránke vyplníš všetky potrebné údaje (pozri si návod na [www.kms.sk/eriesenia](http://www.kms.sk/eriesenia)), nemusíš posilať poštou papierovú návratku.

..... TU ODSTRIHNI .....

Prihláška do letnej časti KMS 2019/2020 – **poslať spolu s 1. kolom!**

Meno a priezvisko: ..... Dátum narodenia: .....  
Škola: .....  
Rok maturity: ..... Trieda: .....  
Počet účasti na celoštátnom kole MO: .....  
Adresa domov: .....  
Adresa pre poštu (domov – škola – iná): .....  
Tel. domov: ..... mobil (vlastný): .....  
e-mail: .....



# Zadania 1. kola letnej časti

Termín odoslania 24. 2. 2020 (pre zahraničie 20. 2. 2020)

## 1.1 Kapusta Magalhãesovi Skvasila ( $\kappa \leq 1$ )

kategória **alfa**

Moreplavec Fernão de Magalhães si pred plavbou na svoju loď naložil 100 sudov s čerstvou chrumkavou kapustou postupne s hmotnosťami 10, 20, 30, ..., 1000 kilogramov. Bohužiaľ, kapusta mu v niekoľkých sudoch skvasila, čím prišla o svoju chrumkavosť. Jeho pobočník Enrique de Malacca mu však po tom, ako sa na lodi popýtal ostatných námorníkov, čo vedia o sudoch, oznámil: „Nezúfaj, síce neviem presne ktoré sudy skvasili. Ale stále viem zo všetkých sudov vybrať 19 sudov s čerstvou chrumkavou kapustou tak, že spolu budú vážiť aspoň 14 060 kilogramov. Dokonca bez ohľadu na to, ktoré sudy ti skvasili.“ Zistite, koľko najviac sudov mohlo Magalhãesovi skvasiť.

## 1.2 Karavely Majúce Smer ( $\kappa \leq 2$ )

kategória **alfa**

Zo Seville vyplávali lode L, O a Ď. Plavili sa na západ v trojuholníkovej formácii. Zrazu si Magalhãesov pobočník Enrique de Malacca uvedomil, že sa neplavia v len tak hocijakej formácii, ale tvoria rovnostranný trojuholník. Magalhães mu to však nechcel uveriť...

Nech  $LO\check{D}$  je trojuholník. Body  $P$  a  $Q$  sú na strane  $O\check{D}$  a platí  $|OP| = |PQ| = |Q\check{D}| = |O\check{D}|/3$ . Na strane  $\check{D}L$  sú body  $R$  a  $S$  a platí  $|\check{D}R| = |RS| = |SL| = |\check{D}L|/3$ . Body  $T$  a  $U$  sú na strane  $LO$  a platí  $|LT| = |TU| = |UO| = |LO|/3$ . Body  $P, Q, R, S, T$  a  $U$  sú na jednej kružnici. Pomôžte Enriquemu dokázať, že trojuholník  $LO\check{D}$  je naozaj rovnostranný.

## 1.3 Kormidelníková Mincová Senzácia ( $\kappa \leq 3$ )

kategórie **alfa** a **beta**

Magalhães má troch hlavných kormidelníkov iniciálkami L O a Ď, ktorým potrebuje vyplatiť mzdu za ich rovnomernú plavbu. Každému chce zaplatiť podľa toho, ako zodpovedne si svoju prácu plnil.

Nájdite všetky usporiadané trojice kladných celých čísel  $(a, b, c)$ , ktoré spĺňajú nasledovné podmienky:

- každé dve z čísel  $a, b, c$  sú nesúdeliteľné;
- číslo  $a$  delí  $a + b + c$ ;
- číslo  $b$  delí  $a + b + c$ ;
- číslo  $c$  delí  $a + b + c$ .

## 1.4 Kamarátov Magalhães Stratil ( $\kappa \leq 5$ )

kategórie **alfa** a **beta**

Kormidelníkom sa nepáčilo, ako málo im Magalhães zaplatil, a tak sa rozhodli aj so svojimi vernými opustiť flotilu. Člnoy, ktoré chceli použiť na odchod, sú však len dvojmiestne.

Utiecť sa rozhodlo 16 námorníkov a každý z námorníkov má práve troch kamarátov, pričom kamarátstvo je vzťah vzájomný. Rozhodnite, či možno námorníkov rozdeliť do dvojíc tak, aby každý námorník bol vo dvojici so svojim kamarátom, bez ohľadu na to, ako sa námorníci kamarátia.

## 1.5 Komplikácia Malovaných Sukovíc ( $\kappa \leq 8$ )

kategórie **alfa** a **beta**

Magalhãesovi sa po dlhej ceste začínali míňať zásoby jedla. Preto zakotvil svoje lode pri najbližšom ostrove. Útočisko našiel u jedného domorodého kmeňa. Starejší by ich aj rád pohostil, ale momentálne bol zaneprázdnený skladaním jednofarebného trojuholníka prehrabávajúc sa hromadou trojfarebných paličiek. Kým trojuholník nezloží, tak žiadne jedlo nebude.

Starejší má 100 žltých, 100 červených a 100 zelených paličiek, pričom paličky považujeme za úsečky, ktorých dĺžky môžu byť, aj v rámci jednotlivej farby, rôzne. Vedia, že pokiaľ si vyberú tri paličky, po jednej z každej farby, je možné z týchto paličiek poskladať trojuholník. Dokážte, že existuje taká farba, že z ľubovoľných troch paličiek tejto farby možno poskladať trojuholník.

## 1.6 Kam Má Smerovať

kategórie **alfa** a **beta**

S doplnenými zásobami sa hneď plaví lepšie. Niet preto divu, že Magalhães svižne oboplával Patagóniu, až sa dostal k zvláštnemu lichobežníkovému súostrovju. Pomôžte mu zistiť, pod akým uhlom sa má teraz vydať, aby bezpečne preplával medzi ostrovmi.

Je daný lichobežník  $ABCD$  so základňami  $AB$  a  $CD$ , ktorého uhlopriečky sa pretínajú v bode  $P$ . Vieme, že platí  $|BC| = |DP|$  a  $|AB| = |CP|$ . Navyše  $BD$  je osou uhla  $ABC$ . Vypočítajte veľkosť uhla  $DAB$ .

## 1.7 Krutá Mocná Smršť

kategórie **alfa** a **beta**

Magalhães na mori zastihla silná búrka. Aby sa flotila zachránila, zavolať si pobočníka Enrique de Malacca, najmúdrejšieho zo všetkých námorníkov. Enrique sa zamyslel a rozhodol sa, že vypočíta súradnice miesta, na ktorom bezpečne prečkajú búrku.

Enrique si zavrel vo svojej kajute a na dvere kriedou napísal trojicu navzájom rôznych prirodzených čísel  $(a, b, c)$ , pre ktorú platilo  $a + b + c = 123456789$ . Potom začal opakovať nasledovnú operáciu: Keď bola na dverách trojica čísel  $(x, y, z)$ , tak na dvere napísal trojicu  $(y + z - x, z + x - y, x + y - z)$  a trojicu  $(x, y, z)$  počas toho zmazal. Dokážte, že bez ohľadu na to, akú trojicu čísel si Enrique napísal na začiatku na dvere, sa po 26 krokoch bude na dverách nachádzať aspoň jedno záporné číslo.

## 1.8 Kávu Musím Spapať

kategória **beta**

Po tom, čo Magalhães úspešne unikol smrti v búrke, zastavil sa so svojou flotilou na jednom tichomorskom ostrove. Námorníkov tam obzvlášť zaujali cibetky, ktoré sa živili rôznymi druhmi kávovníkov. Chlapi neskôr odpozorovali, že ostrovní domorodci jedia kávové zrná z jej trusu a rozhodli sa to sami vyskúšať. Na ich veľké prekvapenie mali tieto zrná rôznorodé chute podľa toho, z akého kávovníka práve cibetka jedla.

Cibetku si môžeme predstaviť ako takú funkciu  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , že pre všetky prirodzené čísla  $n > 1$  existuje prvočíslo  $p$  také, že platí  $p$  delí  $n$  a

$$f(n) = f\left(\frac{n}{p}\right) - f(p).$$

Navyše platí

$$f(13^{2019}) + f(17^{2020}) + f(19^{2021}) = 2018.$$

Vypočítajte hodnotu

$$f(2019^{13}) + f(2020^{17}) + f(2021^{19}).$$

## 1.9 Keď Milionárom Si

kategória **beta**

Po mnohých ďalších mesiacoch plavby sa Magalhãesova flotila konečne vrátila naspäť do rodného Portugalska. So sebou si námorníci priniesli aj nemalý poklad. Po zakotvení narazili v prístave na talianskeho vynálezcu menom Gianetta (čítaj Žaneta), ktorý ich zaujal svojim vynálezom. Pomocou neho mohli moreplavci investovať a zhodnocovať svoje prinesené zlaté mince, podobne ako na dnešnej burze. Bystrí chlapci si však všimli v Gianettovom vynáleze chybičku. Vyzerá to, že vďaka nej môžu pri správnom rozdelení mincí získať neúmerne bohatstvo.

Na začiatok moreplavci umiestnia na tri kôpky postupne  $a$ ,  $b$ ,  $c$  mincí, kde  $a$ ,  $b$ ,  $c \geq 2017$  sú kladné celé čísla. Vynález umožňuje v jednom kroku vykonať jednu z nasledujúcich operácií:

- (1) Moreplavci si vyberú kôpku, na ktorej je párny počet mincí. Vynález z nej zoberie všetky mince a po polovici z nich dá na zvyšné dve kôpky.
- (2) Moreplavci si vyberú kôpku, na ktorej je nepárny počet mincí a zároveň aspoň 2019 mincí. Vynález z nej zoberie 2019 mincí a na zvyšné dve kôpky pridá po 1010 mincí.

Predpokladajme, že vo vynáleze je dostatok mincí navyše. Nájdite všetky usporiadané trojice  $(a, b, c)$ , pre ktoré po nejakom konečnom počte ťahov moreplavci vedia dostať na niektorej kôpke aspoň  $2019^{2020}$  mincí.

## 1.10 Kika Magalhãesa Stratila

kategória **beta**

V tejto úlohe, mal byť nejaký pekný historický príbeh. Žiaľ, Kika stratila svoju historickú knižku o Magalhãesovi, a tak nám neostáva nič iné, iba vám namiesto pekného čítania zadať túto šmakocinku:

Daný je ostrouhlý trojuholník  $ABC$ , v ktorom platí  $|AB| < |AC|$ . Označme  $O$  stred kružnice opísanej tomuto trojuholníku. Nech  $Q$  je bod taký, že  $OQ$  je priemerom kružnice  $k$  opísanej trojuholníku  $AOC$ . Na priamkach  $AQ$  a  $AC$  sú dané body  $M$  a  $N$  tak, že  $AMBN$  je rovnobežník. Dokážte, že priesečník priamok  $MN$  a  $BQ$  leží na kružnici  $k$ .