Korešpondenčný Matematický Seminár

<u>Úloha č. 1:</u> *Lenka si vo svojom obľúbenom časopise všimla zaujímavú súťaž. Úlohou bolo uhádnuť päťpísmenové slovo. K dispozícii máme zoznam slov. Ku každému z týchto slov je priradené číslo. Toto číslo udáva počet pozícii, na ktorých sa hľadané slovo zhoduje so slovom v zozname. Napríklad, keby hľadané slovo bolo KRAVA, tak slovo KARTA má v zozname číslo 2. Zoznam pre hľadané slovo: PASTA - 2, PANÁK - 2, PRSTY - 1, PLECE - 1, DVERE - 2, PADÁK - 1.*
Lenka úlohu správne vyriešila a našla všetky riešenia. Dokážete to aj vy? (Nezabudnite ukázať, že iné riešenia ako tie čo ste našli neexistujú.)

<u>Riešenie:</u> (opravoval Kubo)
Ako by túto úlohu riešil počítač? Jednoducho. Ak povolíme diakritiku, máme asi 30^5 alebo 24300000 slov. Pre každé z nich preveríme, v koľkých miestach sa zhoduje so slovami v zadaní. Počítač povie, že len dve z testovaných slov prešli našim výberom. Ale my sa máme radi a toľko počítania by sme neuniesli. Preto ideme porozmýšľať.

Na správne vyriešenie tohto príkladu bohate stačilo, ak sme si všimli na slovách dve veci. Prvá bila do očí väčšine z vás. Slová *PANÁK* a *PADÁK* sa líšia len v prostrednom písmene. *PANÁK* má však o jednu zhodu s výsledným slovom viac. Zmenu zapríčinilo práve toto rozdielne písmeno, teda tretie písmeno hľadaného slova je *N*.

Ďalší dobrý postreh je, že *PASTA* a *DVERE* sa nezhodujú ani v jednom znaku. Stredné písmeno už vieme a obe tieto slová majú dve správne písmená na správnom mieste. Táto informácia nám množinu možných slov zúži na $\binom{4}{2} = 6$, pretože práve toľkými spôsobmi vieme vybrať dve zo štycorch pozícií, na ktorých sa hľadané slovo bude zhodovať so slovom *PASTA*. Na zvyšných dvoch sa bude zhodovať so slovom *DVERE* a stredné bude *N*.

Mohli by sme ďalej uvažovať všeobecne, ale momentálne je asi najrýchlejšie tých šesť slov vypísať a skontrolovať. Sú to slová *PANRE, PVNTE, PVNRA, DANTE, DANRA* a *DVNTA*. Keď overíme, ktoré z nich vyhovujú všetkým podmienkam, ostanú nám už len dve: *DANTE* a *PVNRA*. Juhú. Ak ti radosť z vyriešeného príkladu nerozpumpovala srdce, daj si aspoň 10 klikov, nech ti búcha s nami. ;)

<u>Úloha č. 2:</u> *Štyri manželské páry sa rozhodli usporiadať tenisový turnaj v zmiešanej štvorhre (to znamená, že proti sebe hrajú dva zmiešané páry). Aby predišli hádkam, dohodli sa, že nikdy nebudú na ihrisku súčasne obaja manželia z toho istého páru, ani ako spoluhráči, ani ako súperi. Aby sa nikto veľmi neunavil, v jeden deň hral každý najviac jeden zápas. A aby to bolo úplne spravodlivé, zahrali každé dve dvojice, ktoré mohli hrať proti sebe, práve jeden zápas. Za koľko najmenej dní mohli odohrať takýto turnaj?*

<u>Riešenie:</u> (opravovala Stanka a Buggo)
Označme si manželské páry ako a, b, c, d. Mužov budeme značiť A, B, C, D a ženy A', B', C', D'. Keď budeme v texte hovoriť napríklad o osobe a, resp. dvojici ab, myslíme tým niekoho z dvojice A, A', resp. dvojicu ľudí, pričom jeden je z dvojice A, A' a druhý z B, B'.

Manželia spolu nemôžu hrať ani ako spoluhráči, ani ako súperi, preto musia byť na kurte ľudia z rozličných párov. To znamená, že zápas musí byť popísaný rôznymi písmenkami. Teda niekto z páru a môže mať za partnera len niekoho z párov b, c, alebo d. To, z akých manželských párov bude prvá dvojica, už jednoznačne určuje súperiacu dvojicu. Napríklad proti a a c musí stáť b a d. Takže máme tri základné postavenia – ab proti cd, ac proti bd, ad proti bc. (Zamyslite sa nad tým, prečo sú to všetky možnosti.)

Teraz sa pozrime, koľko rôznych zápasov je takých, že spolu hrajú a a b. Tieto zápasy sú štyri, lebo na jednej strane môže byť AB' alebo $A'B$ a nezávisle od toho na druhej strane môže byť CD' alebo $C'D$. Dostávame tak štyri zápasy: $AB' - CD'$, $AB' - C'D$, $A'B - CD'$, $A'B - C'D$. Keď spolu hrá a a c alebo keď spolu hrá a a d, tak máme taktiež štyri možnosti na zápasy (pozri tabuľku). Dokopy máme 12 možných zápasov.

ab				ac				ad			
cd				bd				bc			
$\frac{AB'}{CD'}$	$\frac{AB'}{C'D}$	$\frac{A'B}{CD'}$	$\frac{A'B}{C'D}$	$\frac{AC'}{BD'}$	$\frac{AC'}{B'D}$	$\frac{A'C}{BD'}$	$\frac{A'C}{B'D}$	$\frac{AD'}{BC'}$	$\frac{AD'}{B'C}$	$\frac{A'D}{BC'}$	$\frac{A'D}{B'C}$

Ak by prebiehali počas jedného dňa viac ako dva zápasy, nejaký človek by hral viac ako jeden zápas. Preto sa môžu odohrať najviac dva zápasy za deň. Z toho vyplýva, že sa musí hrať aspoň šesť dní.

Ukážeme, že existuje taký rozpis, aby sa hrali každý deň dva zápasy a to tak, že ho nájdeme. Pre každý zápas (napríklad AB' proti CD') existujú dva zápasy, ktoré možno hrať súbežne s ním ($A'B$ proti $C'D$ a $A'D$ proti BC'). Zostane totiž štvorica dvoch mužov a dvoch žien a tí sa dajú spárovať dvoma spôsobmi.
Jeden z možných rozpisov je v nasledujúcej tabuľke.

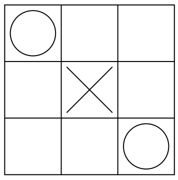
1.deň	2.deň	3.deň	4.deň	5.deň	6.deň
AB'	AB'	AC'	AC'	AD'	AD'
CD'	$C'D$	BD'	$B'D$	BC'	$B'C$
$A'B$	$A'B$	$A'C$	$A'C$	$A'D$	$A'D$
$C'D$	CD'	$B'D$	BD'	$B'C$	BC'

Vidíme, že nám stačí 6 dní na odohranie turnaja. Zároveň sme ukázali, že za menej dní to nepôjde. Hotovo. A na záver, úloha na dlhé jarné večery. Kôľko rôznych rozpisov turnaja existuje?

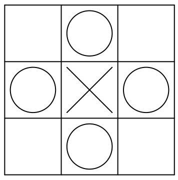
<u>**Úloha č. 3:**</u> *Dvaja hráči hrajú hru podobnú piškvorkám. Hrá sa na plániku 3×3, teda na veľkom štvorci rozdelenom na deväť malých. Hráči sa v ťahoch pravidelne striedajú. Ťah spočíva v tom, že hráč na hrací plán nakreslí krúžok, alebo krížik (v každom ťahu si môže vybrať ľubovoľný z nich). Vyhráva ten, po koho ťahu budú na plániku tri rovnaké symboly v jednom rade, stĺpci, alebo na uhlopriečke (ako v piškvorkách). Existuje postup, ktorý zaručí jednému z hráčov výhru?*

<u>Riešenie:</u> (opravovali Aďa S. a Ajka B.)
Chceme nájsť postup, ktorý niektorému hráčovi zaručí výhru. Prvý hráč má určitú výhodu, pretože začína. Pokúsime sa pre neho nájsť vyhrávajúcu stratégiu. V prvom ťahu si prvý hráč môže vybrať ľubovoľný symbol, tak nech je to krížik. Ak by si vybral krúžok, len by sme vo zvyšných úvahách zamenili slovo krížok a krúžok. Kam ho umiestni? Zdá sa rozumné vybrať si políčko v strede plániku. Dúfam, že už máte všetci nakreslený plánik s krížikom v strede.

Druhý hráč teraz nikde nemôže dať krížik, pretože by boli dva krížiky vedľa seba a prvý hráč by k nim doplnil tretí a vyhral. Preto musí druhý hráč nakresliť krúžok. Ten môže dať na dva druhy miest. Buď do rohu, alebo do „stredu strany". Je jedno ktorý roh si vyberie, lebo jediný rozdiel bude v otočení plániku. Preto nám stačí skontrolovať jediný roh (so stredmi strán je to tak isto). Kedže hľadáme víťaznú stratégiu pre prvého, musíme rozobrať obidva možné ťahy druhého.



a) Druhý hráč dá v prvom ťahu krúžok do rohu (nezabúdajte kresliť). Čo spraví prvý hráč ako svoj druhý ťah? Ak dá niektorý symbol do opačného rohu ako súper, tak druhý hráč zase nebude môcť dať žiaden krížik. Ak by ho dal, tak by sa spolu s krížikom v strede dal doplniť na trojicu. Týmto už je postarané o krížiky, takže prvému hráčovi sa neoplatí dávať krížík. Teda prvý hráč dá v druhom ťahu krúžok, do opačného rohu ako súper. Opäť je na ťahu druhý hráč. Už sme si vysvetlili, prečo nemôže dať krížik (ak nechce prehrať) a z obrázku vidno, že aj keď doplní hocikam krúžok, bude ho môcť prvý hráč doplniť na tri a vyhrať. Takže tu vyhrá prvý hráč.



b) Druhý hráč dá v prvom ťahu krúžok do stredu strany. Teraz to je trochu zložitejšie, ale ak použijeme rovnakú taktiku ako pred chvíľou, tak by to mohlo fungovať. Takže prvý hráč dá vo svojom druhom ťahu krúžok oproti (súmerne podľa stredu) súperovmu krúžku. Teraz druhý hráč nemôže dať nikam krížik (rovnako ako v prvom prípade) a keď si pozriete svoj obrázok, tak zistíte, že pre krúžok mu už ostali len dve miesta, po ktorých prvý hráč nemôže v ďalšom ťahu vyhrať. Sú to zvyšné dva stredy strán (zase je jedno, ktorý si vyberie, pretože môžeme celý plánik otočiť). Druhý hráč dá v druhom ťahu krúžok do niektorého zvyšného stredu strany. Prvý hráč, tak ako doteraz, dá krúžok súmerne k poslednému súperovému ťahu. Keď teraz skontrolujeme obrázok a možnosti druhého hráča, zistíme, že keď dá hocičo hocikam, vždy vieme doplniť tretí symbol a vyhrať. Hurá!

Ak bude hrať prvý hráč tak, ako sme popísali, vždy sa mu podarí vyhrať. A to je presne to, čo sme chceli.

<u>**Úloha č. 4:**</u> *Napíšme si čísla $1, 2, \ldots, n$ v ľubovoľnom poradí, každé práve raz. Prvé z nich označme a_1, druhé a_2 a takto postupne až po posledné, ktoré označíme a_n. Dokážte, že ak n je nepárne, tak potom súčin $(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3) \cdots (a_n - n)$ je párne číslo.*

<u>Riešenie:</u> (opravovali Katka J. a Zuska)
Našim cieľom je dokázať, že súčin $(a_1 - 1)(a_2 - 2) \cdots (a_n - n)$ je párny. To platí vtedy, keď je aspoň jedna zátvorka párna. A kedy platí toto? Rozdiel dvoch čísel je párny vtedy, keď je ich parita rovnaká, teda obe musia byť párne alebo obe nepárne. Podobne, rozdiel dvoch čísel je nepárny vtedy, keď je ich parita rôzna. Musíme teda dokázať, že pre každé nepárne n musí byť medzi našimi zátvorkami aspoň jedna párna. A prečo by to malo platiť?
Všimnime si, že pre nepárne n platí, že nepárnych čísel je od 1 po n o jedno viac, než párnych. Nepárnych je presne $(n + 1)/2$ a párnych $(n - 1)/2$. Teraz sa na celú úlohu môžeme pozrieť napríklad týmito dvoma spôsobmi:

a) Ak je medzi číslami $1, 2, \ldots, n$ o jedno viac nepárnych čísel ako párnych, potom to isté platí pre čísla a_1 až a_n. Teraz poďme ukázať, že súčin $(a_1 - 1)(a_2 - 2) \cdots (a_n - n)$ nikdy nemôže byť nepárny (teda sa pokúsime o dôkaz sporom). Ak by tento súčin mal byť nepárny, potom každá zo zátvoriek musí byť nepárna. To znamená, že do zátvoriek budeme zatvárať dvojice párny - nepárny. Vieme, že párnych čísel je o jedno menej ako nepárnych aj medzi 1 až n, aj medzi a_1 až a_n. Preto, keď budeme vytvárať dvojice párny - nepárny, zostane nám nakoniec po jednom nepárnom čísle z oboch skupín, a tie musíme zavrieť do zátvorky spolu. Ich rozdiel bude párne číslo, a preto aj celkový súčin $(a_1 - 1)(a_2 - 2) \cdots (a_n - n)$ bude párny.

b) (*podľa Mariána Horňáka*) Opäť využijeme, že medzi 1 až n aj medzi a_1 až a_n je nepárnych čísel o jedno viac, než párnych. Keďže je ich v každej skupine $(n + 1)/2$ a každé číslo použijeme v zátvorkách dvakrát, potom máme $n + 1$ nepárnych čísel, ktoré chceme dať do n zátvoriek. No a z toho vidíme, že v aspoň jednej zátvorke musia byť spolu dve nepárne čísla (takáto úvaha sa podľa jedného múdreho uja volá Dirichletov princíp), ktorých rozdiel je párne číslo, čo sme chceli dokázať.

Komentár: Väčšina z vás s úlohou nemala problémy. Treba si však dať pozor na to, že ak niečo dokážem napríklad pre $n = 5$, ešte to neznamená, že to platí všeobecne.

Úloha č. 5: *Kika má vrece plné čísel. Sú to čísla tvaru 3^k, kde k je nezáporné celé číslo (teda aj nula). Jej obľúbené čísla sú všetky čísla z vreca a ďalej tie, ktoré sú súčtom niekoľkých rôznych čísel z vreca. Okrem nich ešte číslo 35. Ktoré je Kikino*
a) 26. najmenšie obľúbené číslo?
b) 2009. najmenšie obľúbené číslo?

Riešenie: (opravovali Katka P. a JeFo)
Začnime tým, čo nie je dobrý prístup k riešeniu. Vypísať 2009 Kikinych obľúbených čísel sa síce dá, ale nie je to práve elegantné riešenie. Síce zaň deväť bodov dostanete, ale s veľkým a škaredým mračkom, ktorý vás ešte ďalší mesiac bude budiť zo sna. A keď príde príklad, kde čísel bude n, dostanete za neho nulu...
Tak a teraz k riešeniu za smajlíka. O čísle 35 zatiaľ neuvažujme ako o obľubenom (mlčky ho prehliadajme). Skúsme si vypísať prvých pár čísel a postupne prídeme na to, že v každom z nich sa nejaká konkrétna mocnina trojky (napríklad 3^2) buď vyskytuje alebo nie. Vieme si ich skrátene zapisovať ako postupnosti núl a jednotiek, napr. 10010, kde 0 znamená, že daná mocnina v čísle nie je a 1, že tam je. Toto číslo 10010 by znamenalo skrátený zápis pre $3^4 + 3^1 = 84$. Týmto sme neprišli na nič nové, je to stará známa trojková sústava. Napríklad pre Kikine číslo 31_{10} (index 10 značí, že číslo je zapísané v desiatkovej sústave) platí $31 = 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0$ a tak vieme napísať $31_{10} = 1011_3$. Uvedomte si, že v zápise Kikinho obľúbeného čísla v trojkovej sústave sa nemôžu nachádzať dvojky (napríklad 1020012), lebo každé číslo z vreca môžeme použiť maximálne raz. Tu využívame fakt, že zápis čísla v trojkovej sústave je jednoznačný.

Ako teraz prídeme na to, aké je Kikino 26. a 2009. obľúbené číslo? Stále uvažujeme bez čísla 35. Už vieme, že v trojkovej sústave sú všetky zložené len z cifier 0 a 1. To nám pripomína dvojkovú sústavu. Teraz nám stačí jednoduché pozorovanie. Zoberme si dve čísla v trojkovej sústave, zložené len z núl a jednotiek, napr. 110101_3 a 111000_3. Zrejme platí $111000_3 > 110101_3$, ale rovnako platí aj (len zameníme indexy na 2) $111000_2 > 110101_2$. Rozmyslite si, že to platí aj všeobecne. Pritom si premyslite, ako vlastne porovnávame dve celé čísla. Usporiadanie Kikiných obľúbených čísel teda nemusíme zisťovať v trojkovej sústave, ale môžeme sa na zápis v trojkovej pozrieť ako na dvojkovú sústavu. Naopak, každé číslo v dvojkovej sústave vieme len zmenením indexu z 2 na 3 previesť na Kikine obľúbené číslo. Takže n-té najmenšie Kikine obľúbené číslo (neuvažujúc 35) vieme získať tak, že n si napíšeme v dvojkovej sústave (napr. $n = 7_{10} = 111_2$), zmeníme index 2 na 3 (111_3) a prevedieme do desiatkovej sústavy ($111_3 = 13_{10}$).

Teraz do toho všetkého ešte pridáme číslo 35, ktoré je tiež Kikine obľúbené. Ľahko prídeme na to, že 35 je väčšie ako jedenáste číslo, ktoré vznikne ako súčet čísel z vreca a menšie ako dvanáste takéto číslo. Preto 35 je dvanáste obľúbené číslo v poradí. Pre nás to znamená, že budeme hľadať 25. a 2008. číslo vyrobené z vreca.

Tak hurá prevádzať čísla:

$$25_{10} = 11001_2 \Rightarrow 1101_3 = 109_{10} = 1.3^0 + 0.3^1 + 0.3^2 + 1.3^3 + 1.3^4 = 109_{10}$$

$$2008_{10} = 11111011000_2 \Rightarrow 11111011000_3 = 88317_{10} = 3^3 + 3^4 + 3^6 + 3^7 + 3^8 + 3^9 + 3^{10} = 88317_{10}$$

Preto 26. Kikine obúbené číslo je 109 a 2009. je číslo 88317.

Iné riešenie:
Opäť uvažujme len čísla vyrobené z vreca. Medzi nimi je aj číslo 3^n (pre ľubvoľné n). Koľko čísel vyrobených z vreca je od neho menších? Určite každé musí obsahovať len menšie mocniny ako 3^n. Keďže platí $3^n > 3^{n-1} + 3^{n-2} + \cdots + 3^0$, tak vieme, že môžeme zobrať ľubovoľnú skupinu mocnín menších ako 3^n a sčítať ich, čím dostaneme číslo vyrobené z vreca menšie ako 3^n. Takýchto skupín (neprázdnych, nejaké číslo musíme vybrať) vieme spraviť $2^n - 1$. Vždy dostaneme rôzny súčet a preto číslo 3^n je 2^n-té najmenšie Kikine obľúbené číslo. Za pomoci tejto úvahy sa vieme prirodzene dopracovať k pôvodnému riešeniu, alebo postupne pridávať mocniny trojky a zisťovať koľké v poradí máme číslo.

Komentár: Pár užitočných poznámok na záver:

- v desiatkovej, v trojkovej, či v každej inej sústave sa čísla porovnávajú rovnako, teda väčšie číslo v trojkovej sústave musí byť vačšie aj keď ho prepíšeme do desiatkovej
- číslo 3^k je vždy väčšie ako súčet $3^0+3^1+\cdots+3^{k-1}$. Dokázať to ide jednoducho využitím poznatkov o trojkovej sústave, poprípade trikovo, prenásobením oboch výrazom zátvorkou $(3-1)$ (neupravujte na 2), roznásobením a upravením.
- zápis čísla v každej sústave tak ako v desiatkovej, existuje práve jeden pre každé číslo (skúste si dokázať).

Úloha č. 6: *Na večierku žiadny chlapec netancoval s každou dievčinou, ale každé dievča tancovalo aspoň s jedným chlapcom. Dokážte, že existujú také dva páry CD a $C'D'$, ktoré spolu tancovali, a pritom C netancoval s D' a C' netancoval s D. Vieme pritom, že na večierku sa zúčastnili aspoň dve dievčatá a aspoň dvaja chlapci.*

Riešenie: (opravovali Filip a Mišo T.)
Na začiatok je vhodné vymyslieť taký obrázok, tabuľku, …, v ktorej prehľadne vidíme, kto s kým tancoval. Dá sa to napríklad tak, že v jednom stĺpci máme bodky znázorňujúce chlapcov a v druhom bodky znázorňujúce dievčatá. Ak pár spolu tancoval, tak spojíme bodky zelenou čiarou a ak spolu netancovali, tak ich spojíme červenou čiarou. Pri čítaní si to určite kreslite, inak vás zje hladná kačka.

Úlohu budeme dokazovať sporom. Predpokladajme preto, že na večierku nebola žiadna dvojica párov spomínaných v zadaní. Uvedomte si, čo to znamená na vašom obrázku. Venujme sa na začiatok niektorému dievčaťu, určite sa poteší. Nazvime ju *Alfamíra* a označme n počet chlapcov, s ktorými tancovala. Zo zadania vieme, že tancovala s aspoň jedným chlapcom, nazvime ho *Alfonz*. Venujme sa teraz pre zmenu jemu. Vieme, že Alfonz netancoval so všetkými dievčatami. Nech *Betamíra* je niektorá dievčina, s ktorou netancoval. Pozrime sa, s akými chlapcami na večierku mohla tancovať Betamíra. Mohla Betamíra tancovať s nejakým chlapcom (nazvime ho *Miro*), s ktorým netancovala Alfamíra? Ak by to tak bolo, tak by Betamíra tancovala s Mirom a Alfamíra s Alfonzom, pričom druhé možné dvojice by spolu netancovali. Toto je spor. Preto jedine chlapci tancuvší s Alfamírou mohli tancovať s Betamírou. Navyše Betamíra netancovala s Alfonzom, čiže tancovala s nanajvýš $n-1$ chlapcami.
Nazvime *Bernard* ľubovoľného človeka, s ktorým tancovala Betamíra a zopakujeme rovnaké úvahy. Z nášho zdôvodnenia vyššie vyplýva, že Bernard tancoval s obidvoma zatiaľ spomenutými dievčatami. Preto existuje nejaká *Gamamíra*, s ktorou netancoval. Môžeme použiť rovnakú úvahu ako vyššie. Namiesto Alfamíry uvažujeme Betamíru a namiesto Alfonza Bernarda. Teda uvažujeme všetkých chlapcov, čo tancovali s Betamírou, tých je najviac $n-1$. Potom vieme ukázať, že Gamamíra tancovala s nanajvýš $n-2$ chlapcami. Tak pokračujeme aj ďalej, dojdeme ku Deltamíre, ktorá tancovala s nanajvýš $n-3$ chlapcami, …Nakoniec dojdeme k tomu, že musí existovať nejaká *Omegamíra*, ktorá tancovala s nanajvýš $n-n=0$ chalanmi. To je však spor so zadaním lebo vieme, že každá dievčina s niekým tancovala. Preto náš predpoklad bol nesprávny a tvrdenie zo zadania platí.

Iné riešenie:
Uvedieme ešte iný spôsob riešenia. Využijeme kľúčovú myšlienku z predošlého postupu (t. j. že niečo sa zmenšuje) a ukážeme, ako sa dá napísať úsporné a elegantné riešenie.

Úlohu tiež dokazujeme sporom a navyše nech Alfamíra je taká dievčina, ktorá tancovala s najmenej chlapcami (aspoň jedným). Nech je týchto chalanov n. To znamená, že ostatné dievčiny tancovali s aspoň n chlapcami. Urobíme presne takú úvahu ako na začiatku. Uvedomte si, že predchádzajúci postup funguje bez problémov aj v tomto prípade. Teda tiež prídeme k tomu, že existuje nejaká Betamíra, ktorá tancovala s nanajvýš $n-1$ chlapcami. To je však spor s tým, že Alfamíra tancovala s najmenej chlapcami. Hotovo.

Úloha č. 7: *Nájdite všetky prirodzené čísla, ktoré sú rovné tretine druhej mocniny súčtu svojich číslic.*

Riešenie: (opravoval Bus, Lucka)
Zadanie úlohy žiada nájsť také prirozdené čísla n, ktoré spĺňajú

$$n = \frac{S(n)^2}{3},$$

kde $S(n)$ označuje ciferný súčet čísla n. Z rovnice vidíme, že číslo $S(n)$ musí byť deliteľné tromi. Keby nebolo, ani jeho druhá mocnina by nebola deliteľná tromi a na pravej strane rovnice by sme nedostali prirodzené číslo. Teraz by sme mohli skúšať $S(n)=3,6,\ldots$ a skúmať či číslo $S(n)^2/3$ má ciferný súčet $S(n)$. Ak dôjdeme až po $S(n)=27$, určite preveríme všetky možné najviac trojciferné čísla (tie majú ciferný súčet najviac $9+9+9=27$) a dostaneme riešenia $n=3,27,48$. Čo s viacifernými číslami? Ľahko si dokážeme, že štvorciferné číslo spĺňajúce podmienku zo zadania, neexistuje. Hodnota $S(n)^2/3$ je zrejme najväčšia, keď je $S(n)$ čo najväčšie. To nastane akurát pre $n=9999$, no $S(9999)^2/3=432$ je „len“ trojciferné a preto pre žiadne štvorciferné číslo daný vzťah neplatí.

Väčšina riešiteľov sa až sem dostala bez vážnejších problémov. Taktiež veľa z vás správne tušilo, že pre viac ako štvorciferné čísla bude ciferný súčet príliš malý na to, aby mohla mať úloha nejaké ďalšie riešenie. Takmer nikto sa však tento fakt nepokúsil poriadne dokázať. Inými slovami, chceli by sme vedieť, či

$$n > \frac{S(n)^2}{3}$$

platí pre všetky aspoň štvorciferné čísla. Označme si k počet cifier čísla n. Najmenšie k-ciferné číslo je 10^{k-1}, najväčší možný ciferný súčet k-ciferného čísla je zas $9k$. Stačí nám dokázať, že

$$10^{k-1} > \frac{(9k)^2}{3} = 27k^2.$$

Mohlo by sa zdať, že táto nerovnosť očividne platí, pretože ľavá strana rastie exponenciálne rýchlo a pravá len kvadraticky. Môžte si skúsiť vypísať hodnoty pre niekoľko malých k a uvidíte, že rozdiel medzi ľavou a pravou stranou je čoraz väčší. Uvedomme si však, že napríklad pre $k \leq 3$ nerovnosť neplatí. Ako si teda môžme byť istí, že nenájdeme aj ďalšie také k? Dokážeme matematickou indukciou, že táto nerovnosť platí pre $k \geq 4$ a tím bude príklad vyriešený.

1° Pre $k = 4$ platí $10^{k-1} = 1000 > 432 = 27k^2$

2° Pre $k > 4$ máme indukčný predpoklad $10^{k-1} > 27k^2$ a chceme dokázať, že platí $10^k > 27(k+1)^2$. Keďže $k > 4$, bude určite platiť aj to, že $k^2 > k$ a $k^2 > 1$. Toto spolu s indukčným predpokladom využijeme pri odhadoch

$$\begin{aligned} 10^{k-1} &> 27k^2, \\ 2 \cdot 10^{k-1} &> 2 \cdot 27k^2 > 2 \cdot 27k, \\ 10^{k-1} &> 27k^2 > 27. \end{aligned}$$

Sčítaním týchto nerovností a jednoduchou úpravou už dostaneme nerovnosť, ktorú sme chceli dokázať

$$10^k = 10 \cdot 10^{k-1} > 4 \cdot 10^{k-1} > 27k^2 + 2 \cdot 27k + 27 = 27(k+1)^2.$$

Úloha č. 8: *Katka minule počula o novej logickej úlohe a chce sa o ňu s ostatnými podeliť. Nech n je nejaké prirodzené číslo. V úlohe je $n(n+1)/2$ farebných krúžkov. Každý krúžok je z jednej strany biely a z druhej strany čierny. Krúžky sú na začiatku rozložené do trojuholníka tak ako na obrázku (prípad pre $n = 4$). Na začiatku je niektorý z krúžkov otočený čiernou stranou nahor, ostatné sú otočené bielou stranou nahor (na obrázku sme si zvolili ľubovoľný ako čierny). V každom ťahu je možné si vybrať dva susedné krúžky a otočiť naopak všetky krúžky na priamke, ktorú tieto dva krúžky určujú (myslí sa priamka určená spojením stredov týchto krúžkov). Treba zistiť, pre ktoré n a pre ktorú začiatočnú polohu (polohu čierneho krúžka na začiatku) sa dajú všetky krúžky otočiť čiernou stranou nahor po konečnom počte ťahov.*

Riešenie: (opravoval Myrec)
Najlepšie je začať sa rovno hrať. Pre $n = 2$ vždy veľmi ľahko vyhráme. Ak zvolíte $n = 3$, rýchlo zistíte, že ak čierny krúžok nie je na začiatku vo vrchole, tak sa vám vyhrať nepodarí. Keď sa podobné pozorovanie zopakuje aj pre $n = 4$, začína to byť podozrivé. Preto sa pokúsime dokázať, že vyhrať sa nám podarí práve vtedy, keď začíname s čiernym krúžkom v jednom z troch rohov (bez ohľadu na n).

Zdá sa, že rohy trojuholníka budú mať pri dokazovaní nejakú špeciálnu úlohu. Všímajme si, ako sa pri našich ťahoch menia. Ak otáčam nejakým krúžkom v rohu, musím otáčať nejakú priamku, ktorú určujú dva susedné krúžky. To znamená, že budem otáčať celú stranu.[1] S každou stranou otočím krúžky v dvoch vrcholoch. Ak na začiatku máme čierny krúžok vo vnútri, tak prvý raz, keď otočíme nejakú stranu, budeme mať v rohoch dva čierne krúžky a jeden biely. Keď budeme druhýkrát otáčať nejakú stranu, tak (v závislosti od toho, ktorú stranu otočíme) sa nám stav v rohoch nezmení (akurát bude biely iný rohový krúžok), alebo sa vrátime do stavu s troma bielymi krúžkami v rohoch. Tým pádom nikdy nemôžeme dostať tri čierne rohové krúžky a teda ani vyhrať. Vieme to odvôvodniť aj elegantnejšie: Keďže v každom ťahu otočíme dve, alebo nula rohových krúžkov, tak sa nám parita počtu bielych rohových krúžkov nemení. (Premysli si.) Ak je ten počet na začiatku nepárny, tak nikdy nemôžeme vyhrať.

Teraz stačí zistiť, či vieme vyhrať, ak začíname s čiernym krúžkom v rohu. Táto časť je dôležitá, ale väčšina z vás to úspešne zvládla. Tí ostatní si to môžu vymyslieť a nakresliť sami. Ja ešte poradím, že to nie je nič zložité a každý krúžok (okrem toho ktorý bol čierny od začiatku) otočíme práve raz.
Popísali sme všetky pozície, z ktorých sa dá vyhrať. Tým je úloha vyriešená.

[1] O stranách trojuholníka uvažujem ako o krúžkoch, ktoré ležia na jeho stranách.

<u>**Úloha č. 9:**</u> *Nech n je prirodzené číslo, ktoré je aspoň 3. Nech A_1, A_2, ... , A_n sú navzájom rôzne podmnožiny množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Dokážte, že vždy existuje $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$ také, že keď z každej množiny A_1, A_2, ... , A_n odoberieme x, tak novovzniknuté množiny sú tiež navzájom rôzne. (Ak sa x v niektorej z množín nenachádza, tak táto množina ostane rovnaká.)*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Ondro)

Ahojte, pohodlne sa usaďte, čaká tu na vás riešenie úlohy číslo 9, ktoré bude založené na dôkaze sporom. Podstata dôkazu sporom spočíva v tom, že znegujeme pôvodné tvrdenie a následne predpokladáme, že táto negácia platí. Potom sa snažíme z tohoto nového tvrdenia vyvodiť niečo, čo je sporné (nap. $0 < 0$). Keď sa nám to podarí, tak je jasné, že jediný problém v celom uvažovaní bola v chyba v predpoklade. Preto nemôže platiť znegované tvrdenie, platí pôvodné tvrdenie a úloha je dokázaná.

Chceme dokázať: „*Existuje $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ také, že keď z každej množiny $A_1, A_2, \ldots, A_n$ odoberieme k, tak novovzniknuté množiny budú tiež navzájom rôzne.*“ Budene predkladať, že platí negácia: Pre každé $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí, že keď z každej množiny odoberieme k, tak novovzniknuté množiny *nebudú* navzájom rôzne. Čiže pre každý prvok k existuje dvojica rôznych množín A_i, A_j, ktoré po odobratí prvku k budú rovnaké. Inak zapísané $A_i - \{k\} = A_j - \{k\}$. Tieto dve množiny sú rovnaké až na jeden prvok k, ktorý sa v jednej množine vyskytuje a v druhej nie. Porozmýšľajte, prečo je to tak. Skúsme zistiť, koľko je takýchto dvojíc množín (líšiacich sa iba jedným prvkom) medzi množinami $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Určite pre každé k existuje aspoň jedna taká dvojica. Zároveň žiadne dve takéto dvojice nemôžu byť úplne rovnaké.

Teraz si môžeme ukázať, ako by to vyzeralo v reči grafov. Graf si môžeme predstaviť ako nejaké vrcholy pospájané hranami. Medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi je najviac jedna hrana a neexistuje hrana, ktorá vychádza z jedného vrcholu a zároveň sa do neho vracia (slučka). Ohodnotený graf bude taký, ktorého každá hrana bude mať nejaké číslo, ktoré udáva jej „cenu“. Príkladom takého grafu je napíklad železničná sieť, kde vrcholy sú mestá, hrany trate medzi mestami a cena nejakej hrany je dĺžka trate.

V našom prípade budú vrcholmi grafu množiny $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Dva vrcholy (dve množiny) budú spojené hranou hodnoty $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ práve vtedy, keď po odobraní prvku k z týchto dvoch množín dostanem množiny, ktoré budú rovnaké. Skúste si teraz nakresliť takýto graf pre nejaké množiny, ktoré si sami vyberiete. V našom grafe sa určite nachádza aspoň n hrán, keďže pre každé $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ existuje dvojica množín, ktoré budú po jeho odobratí rovnaké. Môžu sa síce vyskytnúť aj nejaké ďalšie, ale to nám nevadí. Vyberme pre každé možné ohodnotenie práve jednu hranu. Vybrali sme spolu n hrán, pre každú hodnotu $1, 2, \ldots, n$ jednu. Teraz odstráňme z grafu zvyšné hrany. Zostalo nám n vrcholov pospájaných n hranami.

Tí, čo sa už s grafmi niekedy stretli, by mohli o tomto grafe vedieť niečo povedať. Totiž, ak máme graf s n vrcholmi a n hranami, tak určite obsahuje cyklus.[2] Toto tvrdenie si za domácu úlohu dokážte sami. Takže existuje taký vrchol, z ktorého sa môžeme nejakým cestovaním po hranách opäť vrátiť naspäť. Nech je ten vrchol nejaká množina A_l. Pohnime sa z neho po hrane s cenou k do nasledujúceho vrcholu cyklu. Môžu nastať dva prípady.

1) Prvok k z množiny A_l ubudol (dostali smesa do množiny $A_l - \{k\}$). Keďže sa opäť vrátime po niekoľko krokoch do množiny A_l, musí niekedy tento prvok opäť pribudnúť. Prvok k ale môže pribudnúť alebo ubudnúť iba na hrane s cenou k. Tým pádom by museli byť v grafe aspoň dve hrany ceny k, čo nie je možné, pretože v grafe je hrana každej ceny práve raz. Musí nastať druhá možnosť.

2) Prvok k v množine A_l nebol a po hrane ceny k do nej pribudol (dostali sme sa do množiny $A_l \cup \{k\}$). Teraz rovnako ako v prvom prípade vieme ukázať, že by v grafe museli existovať aspoň dve hrany ceny k, čo ale nemôžu.

Zjavne musela nastať jedna z doch možností, ktoré sme rozoberali, ale my sme ukázali, že ani jedna nastať nemôže. Takže sme dostali sľúbený spor. Chyba bola v prvotnej úvahe, že platí negácia zadania. Preto musí platiť to, čo tvrdí zadanie. Tým je úloha vyriešená.

<u>Komentár:</u> Skúste si ešte raz prejsť celú líniu dôkazu a porozumieť jej. Najprv sme predpokladali, že platí nejaké tvrdenie, potom sme ho nejako interpretovali v reči grafov. Vyšlo nám že keby platilo naše trdenie, tak dostaneme spor (platí výrok aj jeho negácia). Teda pôvodný predpoklad bol zlý a teda musí platiť jeho negácia. No a negácia toho, čo sme predpokladali, je presne to, čo chceme dokázať.

<u>Komentár č. 2:</u> V tomto prípade nesprávna negácia, ktorá sa vyskytla vo vašich riešeniach vyzerala takto: Neexistuje x také, že keď ho odoberieme z každej množiny $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tak novovzniknuté množiny budú tiež rôzne. Nesprávna je preto, lebo tvrdenie, ktoré chceme znegovať má tvar *existuje x a ak platí výrok A tak potom platí výrok B* inak povedané $\exists x(A \Rightarrow B)$. Negácia toho vvyzerá ale nasledovne $\forall x(A \wedge B')$, kde B' znamená výrok B negovaný. Teraz poľahky overíte, že negácia s ktorou sme v riešení úlohy pracovali má naozaj takýto tvar. (Stačí si len dosadiť správne vety za matematické symboly.) Nabudúce si dávajte pozor.

[2] Cyklus je postupnosť m rôznych vrcholov $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m$ taká, že v_1 je hranou spojený s v_2, v_2 je spojený s v_3, ..., v_{m-1} je spojený s v_m a nakoniec aj v_m je spojený s v_1.

Úloha č. 10: *Bus má rád modré skrinky. V každej modrej skrinke sa nachádza niekoľko rôznych prirodzených čísel. Bus považuje modrú skrinku za špeciálnu, ak z nej vieme vybrať šesť prirodzených čísel, ktorých súčet je deliteľný šiestimi.*
a) Nájdite modrú skrinku, takú že obsahuje desať čísel a nie je špeciálna.
b) Ukážte, že každá modrá skrinka s jedenástimi číslami je špeciálna.

Riešenie: (opravoval Bebe)
a) Poďme sa hneď vrhnúť do hľadania takejto skrinky. Vyskúšajme najskôr takú, v ktorej budú len čísla deliteľné šiestimi. Táto zjavne nevyhovuje, veď ľubovoľná šestica čísel z nej robí špeciálnu skrinku. Takýto neúspech nás však nemôže odradiť. Práve naopak. Už vieme, že v nešpeciálnej skrinke musí byť menej ako šesť čísel deliteľných šiestimi. Nech je ich napríklad päť. K nim zoberme ešte päť čísel, ktoré dávajú po delení šiestimi zvyšok 1. Je táto skrinka špeciálna? Najskôr si uvedomme, že na to, aby bolo číslo deliteľné šiestimi, musí mať zvyšok po delení šiestimi rovný nule. V našej skrinke však takýto zvyšok dosiahnuť nevieme. Najmenší dosiahnuteľný zvyšok je totižto 1. Ten dostaneme tak, že vezmeme päť čísel deliteľných šiestimi a jedno, ktoré dáva zvyšok 1. Naopak najväčší možný zvyšok môže byť 5 (porozmýšľaj, aké čísla vybrať). To znamená, že zvyšok 0 po delení šiestimi nevieme dosiahnuť a teda žiaden súčet šiestich čísel z našej skrinky nemôže byť deliteľný šiestimi. Príkladom takejto skrinky je $\{6, 7, 12, 13, 18, 19, 24, 25, 30, 31\}$.

b) Využijeme, že číslo 6 je zložené a budeme sa najprv zaoberať paritou a potom deliteľnosťou tromi. Takýto prístup nám ušetrí mnohé strany. Rozdeľme si čísla v našej skrinke na dve skupinky - párne a nepárne. Keďže čísel je nepárny počet (11), v práve jednej skupinke je nepárny počet čísel. Preto jedno číslo z tejto skupinky vynecháme a ostatné popárujeme vrámci svojich skupiniek. Takto dostaneme päť dvojíc čísel s peknou vlastnosťou, že súčet vrámci každej dvojice je párny. Keďže šestka je párne číslo, môže byť zvyšok po delení šiestimi každého z týchto súčtov rovný jednému z čísel 0, 2 alebo 4. Teraz si stačí uvedomiť, že ak sa niektorý z týchto zvyškov vyskytuje aspoň trikrát, tak stačí zobrať prislúchajúcich šesť čísel (čiže tri dvojice) a tie majú súčet deliteľný šiestimi. (Opäť si to premysli!) Ak tomu tak nie je, tak sa každý zo zvyškov 0, 2, 4 vyskytuje aspoň raz. To však znamená, že ak si vyberieme pre každý zvyšok jednu dvojicu, ktorá má v súčte tento zvyšok po delení šiestimi, tak sme hotoví. To preto, lebo týchto šesť čísel má zvyšok $0 + 2 + 4 = 0$ po delení šiestimi, čo sme chceli.

Komentár: Ak vás nadchla myšlienka dôkazu časti *b*), môžete si pokúsiť túto úlohu zovšeobecniť a skúsiť dokázať tak. Namiesto čísel 6 a 11 si do zadania vložte n a $2n - 1$. Takýto všeobecný príklad sa vyskytol v prvej zimej sérii gamy v roku 2005/06 (vzorové riešenie na `http://kms.sk/vzoraky.php?s=1&t=zim&r=2005`).

Úloha č. 11: *Istá organizácia má n členov a $n+1$ trojčlenných výborov ($n \geq 5$), z ktorých žiadne dva nemajú troch rovnakých členov. Dokážte, že vždy vieme nájsť dvojicu výborov, ktoré majú spoločného práve jedného člena.*

Riešenie: (opravoval Škrečok)
(Podľa Ladislava Bača a Andrey Chlebíkovej.) Budeme postupovať sporom. (Pekné vysvetlenie princípu dôkazu sporom nájdete vo vzoráku deviatky.) Nech nie je pravda, že tvrdenie zo zadania platí pre každé prirodzené $n \geq 5$. My si zoberme najmenšie také n, pre ktoré neplatí. Platí teda opak, že existuje n členov v $n + 1$ výboroch tak, že každá dvojica výborov buď nemá spoločných členov alebo má práve dvoch spoločných členov. Úplne rovnaké výbory vylučujeme, pretože je to tak v zadaní a jedného spoločného člena zakazujeme kvôli sporu.
V $n + 1$ trojčlenných výboroch je dohromady $3n + 3$ členov, niektorí zarátaní aj vickrát. Máme iba n členov, preto z Dirichletovho princípu dostávame, že určite existuje človek, ktorý je členom aspoň štyroch výborov. Označme si tohto človeka ako A. Skúmajme, ako tieto výbory môžu vyzerať.
Vezmime si nejaký výbor, ktorého členom je A a označme si jeho ďalších členov ako B a C. Ako sme povedali, A je okrem toho členom aspoň ďalších troch výborov. Keďže sme si zakázali práve jedného spoločného člena dvojice výborov, v každom z týchto zvyšných výborov musí okrem A byť aj B alebo C (ale nie obaja).
Skúsme najprv situáciu, že by týmto spoločným členom bol aj B aj C. Tri výbory by teda bez ujmy na všeobecnosti mohli byť ABC, ABD a ACD (člen D musí byť v oboch pridaných výboroch, inak by mali iba jedného spoločného člena A). K týmto trom ešte potrebujeme vytvoriť minimálne štvrtý výbor obsahujúci A. Čo o ňom vieme povedať? Musí obsahovať okrem A aj jedného člena z dvojice B, C. Situácia je symetrická, povedzme že je to B. Ostáva tretí člen, C ani D to byť nemôže, inak by sme tam mali dva identické výbory ABC resp. ABD. Ale to je potom spor – tento výbor by mal s výborom ACD iba jedného spoločného člena. Tadiaľto cesta nevedie...
Zatiaľ sme zistili, že všetky výbory obsahujúce člena A musia mať okrem neho jedného spoločného člena, bez ujmy na všeobecnosti člena B (nemôže to byť aj B aj C). Označme si počet týchto výborov obsahujúcich dvojicu AB ako k, kde $k \geq 4$, pretože výbory obsahujúce A sú aspoň štyri. Ostatní členovia týchto k výborov musia byť rôzni, pomenujme si ich $X_1, X_2, \ldots, X_k$. Pozorný čitateľ si určite všimol, že toto je možné iba pre $n \geq 6$, pre $n = 5$ sme týmito úvahami tvrdenie vlastne už dokázali. Žiadny človek X_i pre $1 \leq i \leq k$ už nemôže byť členom žiadneho iného výboru. Ak by bol, musel by mať tento výbor s výborom ABX_i spoločných dvoch známych, teda okrem X_i aj A alebo B. Avšak všetky výbory obsahujúce A sme už popísali ako $ABX_1, ABX_2, \ldots, AB_k$, preto by to musel byť spoločný člen B. Takže by sme mali nejaký výbor BX_iY, ten ale musí mať dvoch spoločných známych aj s ABX_j pre $i \neq j$. Lenže z toho dostávame, že nutne $A = Y$ a výbor BX_iY je totožný s pôvodným ABX_i. Dokázali sme, že X_i nemôže byť pre žiadne i členom iného výboru než ABX_i.
Ak sa bystrým okom a umom zadívame na to, čo sa nám už o štruktúre výborov podarilo zistiť, zistíme, že $k + 2$

ľudí $A, B, X_1, X_2, \ldots, X_k$ je *izolovaných* od zvyšku, majú svojich k vlastných výborov (do cudzích záležitostí sa nemiešajú). Inak povedané, žiadny zo zmienených ľudí nie je členom nejakého výboru, ktorý by mal nejakých iných členov než niekoho spomedzi spomínaných $k+2$ ľudí. A máme tam my vôbec ešte nejaké iné výbory? Áno, lebo k je najviac $n-2$ (kvôli počtu ľudí n) a do celkového počtu $n+1$ výborov nám ešte niečo určite zostáva. Táto skupina izolovaných ľudí spĺňa samostatne všetky potrebné podmienky, preto si ju odtiaľ môžeme odmyslieť. Ostalo nám $n-(k+2) = n-k-2$ ľudí a $(n+1)-k = n-k+1$ výborov.
Podľa predpokladu hore sme si povedali, že n je najmenšie možné, pre ktoré tvrdenie zo zadania neplatí. Pre $n-k-2 < n$ ľudí a $n-k-1$ výborov (a tým skôr aj pre $n-k+1$ výborov) tvrdenie zo zadania preto musí platiť, nájdeme tam dvojicu výborov, ktoré majú spoločného práve jedného člena. Lenže potom to musí platiť aj pre n, pretože nájdená dvojica pre $n-k-2$ ľudí a $n-k-1$ výborov je dobrou dvojicou aj pre n ľudí a $n+1$ výborov. No a to je spor s predpokladom, že pre n už tvrdenie zo zadania neplatí.
Má to ale ešte jeden háčik. Môže sa totiž stať, že po odobratí našej izolovanej skupiny, teda pri znížení počtu ľudí a výborov na $n-k-2$ resp. $n-k+1$, nám klesne hodnota $n-k-2$ pod 5, čím stratíme možnosť urobiť to čo hore (lebo podľa zadania máme dolné obmedzenie 5 na počet ľudí). Tento háčik sa dá rýchlo odbaviť jednoduchým argumentom – pri počte ľudí štyri a menej už nejde urobiť toľko výborov, koľko potrebujeme. Podrobnosti si skúste premyslieť sami. Hotovo, môžeme sa vrhnúť sa vzoráky Gamy.

Komentár: Gratulujem všetkým, ktorí sa s týmto príkladom úspešne popasovali. Ako vidno zo vzoráku, v podstate neboli potrebné žiadne veľké vedomosti (narozdiel od niektorých iných jedenástok), stačilo sa chvíľu pohrať so štruktúrou výborov, a nejaký ten spor alebo dobrý argument bol na svete...

Úloha č. 12: *Do štvorčekov nekonečného štvorčekového papiera sú vpísané reálne čísla. Dané sú dve šablóny zložené z konečného počtu štvorčekov. Tieto šablóny môžeme posúvať pozdĺž čiar na štvorčekovom papieri, nemeníme však ich orientáciu. Vieme, že ak prvú šablónu priložíme na ľubovoľné miesto, súčet čísel na políčkach, ktoré zakrýva, bude kladný. Dokážte, že existuje také umiestnenie druhej šablóny, že súčet čísel na políčkach, ktoré zakrýva, je tiež kladný.*

Riešenie: (opravoval Ondráč)
Najprv si dohodneme nejaké rozumné značenie. Štvorčeky nekonečného štvorčekového papiera vieme reprezentovať ako usporiadané dvojice (a, b), kde $a, b \in \mathbb{Z}$. Množinu všetkých takýchto usporiadaných dvojíc bežne značíme $\mathbb{Z}^2$. Na takýchto dvojiciach si môžeme dodefinovať kdejaké operácie, napríklad sčitovanie. Ak $x, y \in \mathbb{Z}^2$, tak vieme, že $x = (a_1, b_1)$, $y = (a_2, b_2)$ a tieto dvojice budeme sčitovať ako vektory: $x + y = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$. Takto definované sčitovanie zabezpečí vzťah $x + y = y + x$ pre všetky dvojice $x, y \in \mathbb{Z}^2$.
Položme do roviny prvú šablónu ľubovoľne. Nech zakrýva políčka $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}^2$. Aké políčka bude zakrývať, keď ju posunieme inam (a zanecháme orientáciu)? Zrejme to budú $x_1 + x, x_2 + x, \ldots, x_n + x$ pre nejaké $x \in \mathbb{Z}^2$. Políčko x tu chápeme hlavne ako dvojicu čísel, o ktoré posunieme prvé a druhé súradnice políčok šablóny.
Vieme, že v každom štvorčeku je nejaké reálne číslo. Matematicky to môžeme popísať tak, že máme danú funkciu $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$. Hodnota na štvorčeku $x \in \mathbb{Z}^2$ bude $f(x)$. Predpokladáme, že pre ľubovoľné posunutie prvej šablóny je súčet štvorčekov, čo zakrýva, kladný. V našom značení to znamená, že pre každé $x \in \mathbb{Z}^2$ platí

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i + x) > 0. \tag{1}$$

Teraz zapojíme druhú šablónu. Nech pri nejakom položení do roviny zakryje štvorčeky $y_1, y_2, \ldots, y_m$, ktoré sú prvkami $\mathbb{Z}^2$. Za využitia predpokladu o prvej šablóne chceme dokázať, že túto šablónu vieme umiestniť tak, aby zakrývala kladný súčet. Skúsme dosadzovať $y_1, y_2, \ldots, y_m$ za x do (1). Dostávame nerovnice tvaru

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i + y_j) \quad > \quad 0,$$

pre $j = 1, 2, \ldots, m$. Ich sčítaním cez všetky možné j dostaneme

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} f(x_i + y_j) > 0. \tag{2}$$

Rovnica (2) nám veľmi pomôže vďaka svojej symetrii. Môžeme vymeniť poradie súm (premyslite si) a získame

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} f(y_j + x_i) \right) > 0.$$

Výraz v zátvorke je súčet políčok, ktoré zakryje druhá šablóna pri posunutí o x_i. Keďže sčitujeme n takýchto súčtov a výsledok je kladný, musí existovať také $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, že

$$\sum_{j=1}^{m} f(y_j + x_k) > 0$$

a preto existuje umiestnenie druhej šablóny, ktoré zakrýva kladný súčet. A to sme chceli dokázať.

Komentár: Väčšina vašich riešení zakladala na myšlienke, že prvú šblónu položíme na všetky možné miesta v rovine a sčitujeme kladné súčty políčok, ktoré zakrýva. Toto môžeme spraviť a ako súčet dostaneme buď konečné číslo, alebo nekonečno. Dokonca môžeme súčty políčok, ktoré zakrýva šablóna, sčitovať v ľubovoľnom poradí. V ďalšom kroku ste predelili toto číslo počtom políčok šablóny a prehlásili to za súčet všetkých políčok na papieri. A presne toto sa nedá spraviť. Predstavte si, že by sme na políčka (a, b) také, že $a + b$ je párne, umiestnili číslo 1. Potom by sme si zvyšné políčka usporiadali do postupnosti a dávali do nich postupne čísla

$$\frac{1}{2} - 1,\ \frac{1}{2^2} - 1,\ \frac{1}{2^3} - 1,\ \ldots,\ \frac{1}{2^n} - 1,\ \ldots$$

Ak si zoberieme prvú šablónu v tvare štvorčeku 2×2, tak hocikam túto šablónu umiestnime, dostaneme kladný súčet. Tieto súčty môžeme dokonca všetky sčítať a dostaneme 4. A teraz sa zamyslime, čo je súčet všetkých políčok? Ako by ste ho definovali? Je to niečo ako sčitovať rad

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \cdots$$

V našom prípade nemáme ani takéto pekné usporiadanie.
Ponaučenie: Nezahrávajte sa s nekonečnom! :)

Úloha č. 13: *Do polynómu $x^{10} + a_9x^9 + a_8x^8 + \cdots + a_1x + 1$ dvaja hráči striedavo dopĺňajú reálne koeficienty. Ak nakoniec polynóm nemá žiadny reálny koreň, vyhráva prvý hráč. Inak vyhrá druhý hráč. Pre ktorého hráča existuje výherná stratégia? Popíšte ju. (Prvý hráč začína.)*

Riešenie: (opravovala Hanka)
(Riešenie podľa Josefa Tkadleca.) Ukážeme, že druhý hráč dokáže zariadiť, aby daný polynóm P mal reálny koreň. Stačí mu na to, aby pre nejaké reálne číslo c bolo $P(c) < 0$. Polynóm je totiž párneho stupňa, takže pôjde do plus nekonečna keď budeme veľmi zmenšovať, alebo veľmi zväčšovať vstupnú hodnotu. Okrem toho je to spojitá funkcia, preto ak niekde nadobúda kladnú hodnotu a inde zápornú, tak niekde medzi nimi určite leží nejaký koreň. Tak poďme k stratégii. Máme 9 koeficientov, ktoré treba doplniť - 4 pri párnych mocninách a 5 pri nepárnych. Počas prvých šiestich ťahov doplní druhý hráč vždy koeficient pri nejakej mocnine x opačnej parity ako doplnil prvý hráč. V siedmom ťahu má teda prvý hráč na výber jeden koeficient pri párnej mocnine a dva pri nepárnych mocninách. Riešenie ďalej závisí od výberu prvého hráča.

1. Nech si vyberie jeden z dvoch koeficientov pri nepárnych mocninách. Potom druhý hráč doplní koeficient pri párnej mocnine tak, aby súčet všetkých koeficientov pri párnych mocninách bol 0. Čo tým dosiahol?

$$\begin{aligned} P(1) &= 1 + a_9 + a_8 + a_7 + \ldots a_2 + a_1 + 1 \\ P(-1) &= 1 - a_9 + a_8 - a_7 + \ldots a_2 - a_1 + 1 \end{aligned}$$

   Sčítaním týchto dvoch hodnôt $P(1)$ a $P(-1)$ dostaneme

$$P(1) + P(-1) = 2(1 + a_8 + a_6 + a_4 + a_2 + 1) = 0,$$

   lebo posledný koeficient pri párnej mocnine sme vhodne vybrali, aby tento súčet bol nula. Vidíme, že aspoň jedna z hodnôt $P(1)$ a $P(-1)$ bude menšia resp. rovná nule a teda P bude mať reálny koreň. (Bez ohľadu na to, čo vyplní v poslednom ťahu prvý hráč.)

2. Teraz predpokladajme, že si prvý hráč vyberie koeficient pri párnej mocnine a druhému ostanú na výber už len dva pri rôznych nepárnych mocninách. Urobíme podobný trik ako predtým, len bude trochu zložitejší. Polynóm P môžeme po siedmom ťahu napísať v tomto prípade ako $P(x) = Q(x) + a_ix^i + a_jx^j$, kde a_i a a_j sú zostávajúce neurčené koeficienty, pričom i, j sú nepárne čísla, $i > j$. Skúmajme hodnotu $P(2)$ a $P(-1)$.

$$\begin{aligned} P(2) &= Q(2) + a_i 2^i + a_j 2^j \\ P(-1) &= Q(-1) - a_i - a_j \end{aligned}$$

Teraz vynásobme druhú rovnicu číslom 2^j, sčítame ich a dostaneme

$$P(2) + 2^j P(-1) = Q(2) + 2^j Q(-1) + a_i(2^i - 2^j).$$

Keď sa na to poriadne pozrieme vidíme, že koeficient a_i vie druhý hráč vybrať tak, aby pravá strana bola rovná nule. Takže opäť dostaneme, že buď $P(2)$ alebo $P(-1)$ je menšie alebo rovné nule.

Tým sme dokázali, že vždy vyhrá druhý hráč.

Úloha č. 14: *Na zjazde matematikov sa stretlo $12k$ účastníkov a každý z nich sa pozdravil s práve $3k+6$ inými matematikmi. Pre každú dvojicu zúčastnených je počet ľudí, ktorí pozdravili oboch, rovnaký. Koľko ľudí sa stretlo na zjazde? (Pozdravovanie je symetrické.) Pre tento počet popíšte prípad, kedy táto situácia nastáva.*

Riešenie: (opravoval Ondráč)
Vieme, že pre každú dvojicu matematikov je počet tých, ktorí sa pozdravili s oboma, rovnaký. Označme tento počet l. Vezmime si ľubovoľného matematika a označme ho M. Vieme, že M sa pozdravil s $3k+6$ matematikmi a každý z nich sa pozdravil s $3k+5$ matematikmi rôznymi od M. To je spolu $(3k+6)(3k+5)$ matematikov, niektorí zrejme zarátaní viackrát. Každý matematik B je v tom počte zarátaný práve toľkokrát, koľko existuje matematikov C, ktorí sa pozdravili s A, ale aj s B, čo je podľa zadania presne l. Tým dostávame vzťah

$$(3k+6)(3k+5) = (12k-1)l \tag{3}$$

Aby l bolo prirodzené musí $12k-1$ deliť $(3k+5)(3k+6)$. Keďže $12k-1$ nie je deliteľné prvočíslom 3, tak musí deliť dokonca $(3k+5)(k+2) = 3k^2+11k+10$. To vieme napísať aj ako

$$(12k-1, 3k^2+11k+10) = 12k-1, \tag{4}$$

kde (a,b) značí naväčší spoločný násobok celých čísel a, b. Upravujme

$$\begin{aligned}(12k-1, 3k^2+11k+10) &= (12k-1, 12k^2+44k+40) = \\ &= (12k-1, 45k+40) = \\ &= (12k-1, 180k+160) = \\ &= (12k-1, 175).\end{aligned}$$

Aby bolo splnené (4), musí $12k-1$ deliť číslo 175. Overením deliteľov $175 = 5^2 \cdot 7$ zistíme, že vyhovuje jedine 35 a preto $k=3$. Z (3) dostávame $l=6$.

Dokázali sme, že ak daná situácia mohla nastať, tak sa stretlo 36 matematikov, každý sa pozdravil s 15 matematikmi a pre každú dvojicu existuje práve 6 matematikov, ktorí sa pozdravili s oboma. Takýto prípad naozaj môže nastať. Poskytneme vám návod, ako ho skonštruovať. Detaily si už premyslite sami.

Keďže matematikov je taký pekný počet (štvorec), reprezentujme si ich ako usporiadané dvojice čísel (a,b), kde $a,b \in \{0,1,2,3,4,5\}$. Takýchto dvojíc je presne 36 a túto množinu matematici zvyknú označovať $\mathbb{Z}_6^2$. Je to množina usporiadaných dvojíc zvyškov po delení 6. (Množina $\mathbb{Z}_6$ je množina zvyškov po delení 6.) S takýmito dvojicami môžeme robiť kdejaké veci. Napríklad si môžeme definovať sčitovanie po zložkách, teda ak $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{Z}_6^2$ definujeme $(x_1,y_1)+(x_2,y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$. Čo sa stane ak napr. $x_1+x_2 > 5$? Jednoducho zoberieme zvyšok x_1+x_2 po delení 6. Akoby sme stále pracovali len so zvyškami.[3] Teraz si zoberme ľubovoľného matematika (a,b) a nechajme ho pozdraviť sa s matematikmi

$$\begin{cases}(a,b)+(k,0) & \text{pre } k \in \mathbb{Z}_6, k \neq 0\\ (a,b)+(0,k) & \text{pre } k \in \mathbb{Z}_6, k \neq 0\\ (a,b)+(k,k) & \text{pre } k \in \mathbb{Z}_6, k \neq 0.\end{cases}$$

Na vás ešte zostáva overiť pár faktov:

1. Ak sa matematik (a,b) pozdravil s matematikom (c,d), tak to platí aj naopak.
2. Každý matematik sa pozdravil s práve pätnástimi inými matematikmi.
3. Pre každých dvoch matematikov existuje práve 6 matematikov, ktorí sa pozdravili s oboma.

Dôkaz týchto tvrdení sa dá urobiť formálne, ale aj pomocou pekného obrázku. Nakreslite si množinu $\mathbb{Z}_6^2$ ako štvorec 6×6 a vyznačte si, s kým sa podľa nášho predpisu pozdraví nejaký matematik. Potom by malo byť už všetko jasné. Ak sa chcete dozvedieť viac, čítajte fórum o príkladoch na stránke kms.

[3]Pre ujasnenie pár príkladov: $(2,5)+(2,4) = (4,3)$, $(1,2)+(5,4) = (0,0)$

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
1.	Chlebíková Andrea	2.	Brighton UK	4	1		9	9	9	9	9	8		45	45
1.	Kossaczký Igor	4.	Gamča BA	7	2		9	9	9	9		9		45	45
3.	Bosák Radomír	4.	Gamča BA	7	2		9	6	8	9	8	9		43	43
3.	Tkadlec Josef	4.	GJK PH ČR	7	5			9	9	9	7	9		43	43
5.	Sládek Filip	3.	GAB NO	6	5			8	9	9	8	8		42	42
6.	Csiba Peter	4.	ŠPMNDG BA	9	5			8	9	9	7	8		41	41
6.	Kossaczký Pavol	3.	Gamča BA	4	0	9	9	7	9		7			41	41
8.	Kováč Jakub	4.	GCM NR	5	1		9	6	9	2	6	6		36	36
8.	Midlik Adam	3.	GJAR PO	6	2		8	5	9	9	4	5		36	36
8.	Pavlík Tomáš	4.	GJK PH ČR	4	0		9	7	9	6	5	4		36	36
11.	Herencsár Albert	4.	Gmaď GA	7	3			7	9	9	9	1		35	35
11.	Múthová Denisa	2.	GbTR ZA	5	0	9	9	6	9		2			35	35
11.	Večerík Matej	2.	ŠPMNDG BA	5	1		9	9	9	1	2	6		35	35
14.	Csiba Dominik	2.	ŠPMNDG BA	5	1		9	6	9	1	7	3		34	34
14.	Hojčka Michal	4.	GKom PE	11	6			7	9	1	8	9		34	34
14.	Le Tuan Anh	2.	Gamča BA	6	1		9	6	9	1	9			34	34
17.	Konečný Jakub	3.	Gamča BA	9	5			6	9	9	8	1		33	33
17.	Kováč Ondrej	2.	GCM NR	5	1		9	6	9	6		3		33	33
19.	Šormanová Mária	2.	ŠPMNDG BA	4	0	9	6	6	9	1	2			32	32
20.	Kozák Andrej	2.	Gamča BA	6	1		9	6	9	0	7			31	31
20.	Szabados Viktor	2.	Gamča BA	6	1		9	6	9	1	6			31	31
22.	Kukan Marek	3.	Gamča BA	5	1		1	9	9	9	2			30	30
22.	Majdiš Mojmír	3.	GPOH DK	6	1		7	8	9		1	5		30	30
24.	Haas Emil	4.	Gamča BA	9	2		8	8		1	3	9		29	29
25.	Krejčír Andrej	3.	GVBN PD	4	0	9		6	9			4		28	28
25.	Štyráková Kamila	3.	GPOH DK	8	2		9	6	9		2	2		28	28
27.	Bačo Ladislav	3.	GPoš KE	9	5			7	9		2	9		27	27
27.	Gregor Viktor	3.	GŠkol PB	6	1		9	6	9	2		1		27	27
27.	Sabatovičová Linda	2.	GJH BA	5	0	9	9	6			3			27	27
30.	Dresslerová Anna	2.	GJH BA	3	0	9		6	9		2			26	26
31.	Bachratý Martin	3.	GVO ZA	9	5			8	9	1	0	7		25	25
31.	Eiben Eduard	4.	GPoš KE	9	6			8	9	1	3	4		25	25
31.	Faršang Štefan	2.	SJG KN	3	0	8	1	6	8		2			25	25
34.	Baranová Jana	3.	GAlej KE	6	1		9	6	9	0	0			24	24
34.	Mojžišová Hana	2.	GJH BA	4	0	9	7	4	2		2			24	24
36.	Coculová Zuzana	3.	GPoš KE	7	1		9	4	9		1			23	23
36.	Karásková Natália	3.	Gamča BA	9	4			6	9	1	2	5		23	23
36.	Kubincová Petra	2.	ŠPMNDG BA	5	0	9	3	4		5	2			23	23
36.	Ziman Michal	3.	GBST LC	7	1		9	9	2	1	2	1		23	23
40.	Hozza Ján	2.	GJH BA	4	1			9	9	1	2			21	21
40.	Kuklišová Nina	4.	GMet BA	8	1		2	3	9	1	4	3		21	21
40.	Peitl Tomáš	3.	ŠPMNDG BA	8	3			9	9	3				21	21
43.	Hlavatá Martina	2.	Gamča BA	6	1		2	6	9	1	2			20	20
43.	Masár Juraj	2.	GBil BA	4	0	2	1	6	9		2			20	20
43.	Páleník Juraj	2.	ŠPMNDG BA	4	1			6	9	2	3			20	20
43.	Vavrík Boris	2.	GJH BA	4	0	8	1	6		1	1	4		20	20
47.	Guričan Pavol	2.	Gamča BA	6	1			7	9		1	2		19	19
47.	Harlenderová Alena	1.	Olomouc ČR	1	0	6	1	6			3	3		19	19
49.	Bogár Ján	3.	GĽŠ TN	8	2			6	9	1	1	1		18	18
49.	Bohiniková Alžbeta	2.	Gamča BA	6	1		1	6	9		2			18	18
49.	Jursa Jakub	4.	GAlej KE	12	5			6	9		3			18	18
49.	Töpfer Jakub	4.	GJK PH ČR	5	3			6	9	1	1	1		18	18
49.	Ukrop Martin	3.	GĽŠ ZV	4	1			2		7	4	5		18	18

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**k$_\beta$**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**p**	**s**	$\sum$
54.	Bogárová Zuzana	2.	GĽŠ TN	4	0	4		6	6	1				17	17
54.	Hajdinová Katarína	2.	GJH BA	5	1			4	9		4			17	17
54.	Matejovičová Lenka	4.	GJH BA	12	8			5	9	1	2			17	17
57.	Dižová Andrea	2.	GKom PE	5	1		0	5	9		1	1		16	16
57.	Santer Jakub	2.	GMH Trstená	4	0	8	8							16	16
59.	Hajdin Michal	4.	GJH BA	7	2		1	6	2		2	4		15	15
60.	Dvořák Daniel	4.	Trutnov ČR	4	0		1	6		1	2	4		14	14
60.	Hutár Peter	2.	Gamča BA	3	0	9	1	2	0	1	1	1		14	14
60.	Phuong Mariana	2.	GJH BA	4	0	8		6						14	14
60.	Rigdová Emília	3.	GKuk PP	6	1			3	9		2			14	14
64.	Macháč Juraj	2.	GJH BA	4	0	9	0	2	2					13	13
64.	Mužík David	1.	GChD PH ČR	3	1		2	6	0		1	4		13	13
66.	Hagara Michal	3.	GJH BA	8	5			1	9			1		11	11
66.	Heželyová Slávka	2.	ŠPMNDG BA	4	0	9	2	0						11	11
66.	Leššová Lívia	2.	GPár NR	4	0	5	0	6						11	11
69.	Bartko Matúš	2.	GĽŠ TN	2	0	2	0	5		0		0		7	7
70.	Bendová Lenka	4.	GJH BA	7	1			4			2			6	6

kategória ALFA, Bratislava

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Bohiniková Lucia	1.	Gamča BA	2		8	9	9	9		6		41
2.	Vlachynská Petra	1.	GBil BA	2		9	8	9		4	5		35
3.	Belanová Michaela	1.	ŠPMNDG BA	2		5	9	3	8	7			32
4.	Žákovská Uršuľa	1.	Gamča BA	2		6	8	9	8	0			31
5.	Rečka Marek	1.	1SG BA	1	8	1	8						17
6.	Dresslerová Anna	2.	GJH BA	3					9		6		15
7.	Hutár Peter	2.	Gamča BA	3					9	1	2		12
8.	Langer Tomáš	1.	GJH BA	1							5		5

kategória ALFA, západ

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Horňák Marián	1.	GPár NR	2		9	5	9	9	7	9		43
2.	Švančara Patrik	1.	GĽŠ TN	2		9	9	9	9		6		42
3.	Koprda Pavol	1.	GAM TT	2		7	9	9	9		6		40
4.	Kosec Peter	1.	GĽŠ TN	2		6	9	9	9	2	6		39
5.	Faršang Štefan	2.	SJG KN	3			9	9	8	1	6		33
6.	Baxová Zuzana	1.	GĽŠ TN	2		1	9	9	8		5		32
7.	Pappová Danica	1.	GĽŠ TN	1	9	5	8	0	0	1	6		29
8.	Šimková Mária	3.	GJF Šaľa	3			9	1	9	2	6		27
9.	Mariš Andrej	1.	PiarG NR	1	6		9	6		1	2		24
10.	Rajchlová Barbora	3.	GJab MY	3			9		9		2		20
11.	Sedlačková Lenka	2.	GPdC PN	2		9	1	2	0	0	3		15
12.	Pločeková Andrea	2.	GPdC PN	2		4	1	1	0	0	3		9
13.	Bartko Matúš	2.	GĽŠ TN	2					2	0	5		7

kategória ALFA, stred

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Vlček Andrej	1.	ESŠ EG JT LM	2		6	9	9	9		8		41
2.	Galovičová Soňa	1.	GVO ZA	3			9	9	9		6		33

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
3.	Anderle Michal	2.	GBST LC	3			9	9	9	2	3		32
3.	Santrová Adriana	1.	GMH Trstená	2		5	9	9	8	1			32
5.	Halajová Barbora	1.	GVO ZA	3			5	9	9	1	6		30
5.	Jasenčáková Katarína	1.	GVO ZA	3			9	9	5	1	6		30
5.	Rybár Andrej	2.	GJGT BB	3			9	9	8		4		30
8.	Jacková Dominika	2.	GJGT BB	2			9	3	9	0	5		26
9.	Búlik Martin	2.	GJGT BB	2			1	9	4		3		17
10.	Makuch Matej	2.	GJGT BB	3			1	1	9		3		14
11.	Plavák Dušan	2.	GMH Trstená	2		1	7						8
12.	Kajánek František	1.	GJMH CA	2		2			1		1		4
12.	Kubišová Barbora	1.	GJGT BB	2		4		0					4

kategória ALFA, východ

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Dupej Peter	1.	GJAR PO	2		9	9	9	9		6		42
1.	Marečáková Barbora	1.	GKuk PP	2		9	9	9	9	1	6		42
3.	Daniláková Monika	1.	GJAR PO	2	9	9	9	9	8		6		41
4.	Klembarová Barbora	1.	GKuk PP	2		9	3	8	9		6		35
5.	Faguľová Kristína	1.	GPoš KE	3			9	9	9	1	6		34
6.	Lami Jozef	1.	GPoš KE	2	4	5	8	9	9	1	0		32
7.	Kmeťová Katarína	1.	GKuk PP	2		5	7	5		1	1		19

Výsledková listina

kategória GAMA

Por.	Meno	Roč.	škola	10	11	12	13	14	p	$\sum$
1.	Bachratý Martin	3.	GVO ZA	0	7	0	0			49
2.	Bosák Radomír	4.	Gamča BA	8	9	7	7	4		62
3.	Csiba Peter	4.	ŠPMNDG BA	7	8	7	0	4		106
4.	Hojčka Michal	4.	GKom PE	8	9		0			34
5.	Konečný Jakub	3.	Gamča BA	8	1	0				60
6.	Kováč Jakub	4.	GCM NR	6	6	0	0	2		57
7.	Tkadlec Josef	4.	GJK PH ČR	7	9	0	7	4		102