Zadania 1. série letnej časti KMS 2008/2009

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Lenka si vo svojom obľúbenom časopise všimla zaujímavú súťaž. Úlohou bolo uhádnuť päťpísmenové slovo. K dispozícii máme zoznam slov. Ku každému z týchto slov je priradené číslo. Toto číslo udáva počet pozícii, na ktorých sa hľadané slovo zhoduje so slovom v zozname. Napríklad, keby hľadané slovo bolo *KRAVA*, tak slovo *KARTA* má v zozname číslo 2. Zoznam pre hľadané slovo: *PASTA* - 2, *PANÁK* - 2, *PRSTY* - 1, *PLECE* - 1, *DVERE* - 2, *PADÁK* - 1.
Lenka úlohu správne vyriešila a našla všetky riešenia. Dokážete to aj vy? (Nezabudnite ukázať, že iné riešenia ako tie čo ste našli neexistujú.)

Úloha č. 2:
Štyri manželské páry sa rozhodli usporiadať tenisový turnaj v zmiešanej štvorhre (to znamená, že proti sebe hrajú dva zmiešané páry). Aby predišli hádkam, dohodli sa, že nikdy nebudú na ihrisku súčasne obaja manželia z toho istého páru, ani ako spoluhráči, ani ako súperi. Aby sa nikto veľmi neunavil, v jeden deň hral každý najviac jeden zápas. A aby to bolo úplne spravodlivé, zahrali každé dve dvojice, ktoré mohli hrať proti sebe, práve jeden zápas. Za koľko najmenej dní mohli odohrať takýto turnaj?

Úloha č. 3:
Dvaja hráči hrajú hru podobnú piškvorkám. Hrá sa na plániku 3×3, teda na veľkom štvorci rozdelenom na deväť malých. Hráči sa v ťahoch pravidelne striedajú. Ťah spočíva v tom, že hráč na hrací plán nakreslí krúžok, alebo krížik (v každom ťahu si môže vybrať ľubovoľný z nich). Vyhráva ten, po koho ťahu budú na plániku tri rovnaké symboly v jednom rade, stĺpci, alebo na uhlopriečke (ako v piškvorkách). Existuje postup, ktorý zaručí jednému z hráčov výhru?

Úloha č. 4:
Napíšme si čísla $1, 2, \ldots, n$ v ľubovoľnom poradí, každé práve raz. Prvé z nich označme a_1, druhé a_2 a takto postupne až po posledné, ktoré označíme a_n. Dokážte, že ak n je nepárne, tak potom súčin $(a_1-1)(a_2-2)(a_3-3)\cdots(a_n-n)$ je párne číslo.

Úloha č. 5:
Kika má vrece plné čísel. Sú to čísla tvaru 3^k, kde k je nezáporné celé číslo (teda aj nula). Jej obľúbené čísla sú všetky čísla z vreca a ďalej tie, ktoré sú súčtom niekoľkých rôznych čísel z vreca. Okrem nich ešte číslo 35. Ktoré je Kikino
a) 26. najmenšie obľúbené číslo?
b) 2009. najmenšie obľúbené číslo?

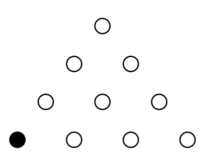
Úloha č. 6:
Na večierku žiadny chlapec netancoval s každou dievčinou, ale každé dievča tancovalo aspoň s jedným chlapcom. Dokážte, že existujú také dva páry CD a $C'D'$, ktoré spolu tancovali, a pritom C netancoval s D' a C' netancoval s D. Vieme pritom, že na večierku sa zúčastnili aspoň dve dievčatá a aspoň dvaja chlapci.

Úloha č. 7:
Nájdite všetky prirodzené čísla, ktoré sú rovné tretine druhej mocniny súčtu svojich číslic.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Katka minule počula o novej logickej úlohe a chce sa o ňu s ostatnými podeliť. Nech n je nejaké prirodzené číslo. V úlohe je $n(n+1)/2$ farebných krúžkov. Každý krúžok je z jednej strany biely a z druhej strany čierny. Krúžky sú na začiatku rozložené do trojuholníka tak ako na obrázku (prípad pre $n = 4$). Na začiatku je niektorý z krúžkov otočený čiernou stranou nahor, ostatné sú otočené bielou stranou nahor (na obrázku sme si zvolili ľubovoľný ako



čierny). V každom ťahu je možné si vybrať dva susedné krúžky a otočiť naopak všetky krúžky na priamke, ktorú tieto dva krúžky určujú (myslí sa priamka určená spojením stredov týchto krúžkov). Treba zistiť, pre ktoré n a pre ktorú začiatočnú polohu (polohu čierneho krúžka na začiatku) sa dajú všetky krúžky otočiť čiernou stranou nahor po konečnom počte ťahov.

Úloha č. 9:
Nech n je prirodzené číslo, ktoré je aspoň 3. Nech $A_1, A_2, \dots, A_n$ sú navzájom rôzne podmnožiny množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. Dokážte, že vždy existuje $x \in \{1, 2, \dots, n\}$ také, že keď z každej množiny $A_1, A_2, \dots, A_n$ odoberieme x, tak novovzniknuté množiny sú tiež navzájom rôzne. (Ak sa x v niektorej z množín nenachádza, tak táto množina ostane rovnaká.)

Úloha č. 10:
Bus má rád modré skrinky. V každej modrej skrinke sa nachádza niekoľko rôznych prirodzených čísel. Bus považuje modrú skrinku za *špeciálnu*, ak z nej vieme vybrať šesť prirodzených čísel, ktorých súčet je deliteľný šiestimi.
a) Nájdite modrú skrinku, takú že obsahuje desať čísel a nie je špeciálna.
b) Ukážte, že každá modrá skrinka s jedenástimi číslami je špeciálna.

Úloha č. 11:
Istá organizácia má n členov a $n + 1$ trojčlenných výborov ($n \geq 5$), z ktorých žiadne dva nemajú troch rovnakých členov. Dokážte, že vždy vieme nájsť dvojicu výborov, ktoré majú spoločného práve jedného člena.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA** a platí pre ne termín odoslania kategórie **BETA**.

Úloha č. 12:
Do štvorčekov nekonečného štvorčekového papiera sú vpísané reálne čísla. Dané sú dve šablóny zložené z konečného počtu štvorčekov. Tieto šablóny môžeme posúvať pozdĺž čiar na štvorčekovom papieri, nemeníme však ich orientáciu. Vieme, že ak prvú šablónu priložíme na ľubovoľné miesto, súčet čísel na políčkach, ktoré zakrýva, bude kladný. Dokážte, že existuje také umiestnenie druhej šablóny, že súčet čísel na políčkach, ktoré zakrýva, je tiež kladný.

Úloha č. 13:
Do polynómu $x^{10} + a_9x^9 + a_8x^8 + \cdots + a_1x + 1$ dvaja hráči striedavo dopĺňajú reálne koeficienty. Ak nakoniec polynóm nemá žiadny reálny koreň, vyhráva prvý hráč. Inak vyhrá druhý hráč. Pre ktorého hráča existuje výherná stratégia? Popíšte ju. (Prvý hráč začína.)

Úloha č. 14:
Na zjazde matematikov sa stretlo $12k$ účastníkov a každý z nich sa pozdravil s práve $3k + 6$ inými matematikmi. Pre každú dvojicu zúčastnených je počet ľudí, ktorí pozdravili oboch, rovnaký. Koľko ľudí sa stretlo na zjazde? (Pozdravovanie je symetrické.) Pre tento počet popíšte prípad, kedy táto situácia nastáva.

Odporúčaná literatúra

Všetkým záujemcom o samostatné štúdium dávame do pozornosti archív KMS s adresou `www.kms.sk/archiv`. Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia úloh, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto úloh a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého. Ďalšie zaujímavé stránky sú tiež:

`www.cut-the-knot.org`

`www.cbel.com/math_recreations`

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **23. februára 2009** (pre zahraničie 20. februára 2009).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **26. februára 2009**.

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `www.kms.sk`