Riešenia 3. kola letnej časti

3.1 Kraj Mátožnej Smrti ($\kappa \leq 0$)

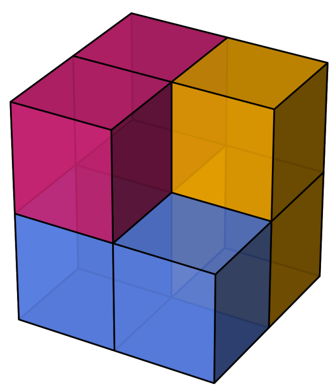
Zadanie. *Zlovestné mračná sa preháňali oblohou nad tmavým lesom. Slnko nebolo vidno, nedalo sa však povedať, či je noc, alebo deň. Temnotu preťal blesk. Na krátky moment osvietil mohutný hrad na vrchu zradného útesu. K nemu sa po úzkej cestičke približovalo malé svetielko…*

Keď Sherlock s Watsonom prišli do hradnej záhrady, nad telom už stála skupinka postáv. Vo svetle lampáša rozoznali 5 osôb. Mŕtvolou bol hradný záhradník. Nikto z hradu od vraždy neodišiel, takže jedna z piatich osôb je vrah.

Sherlock si zapálil fajku a vypustil obláčik dymu. Ten mal tvar kocky $n \times n \times n$, kde $n \geq 2$. Táto kocka bola vyskladaná z kvádrikov $1 \times 1 \times n$. Je možné, že obsahovala kvádrik otočený v každom z troch možných smerov? Svoju odpoveď zdôvodnite.

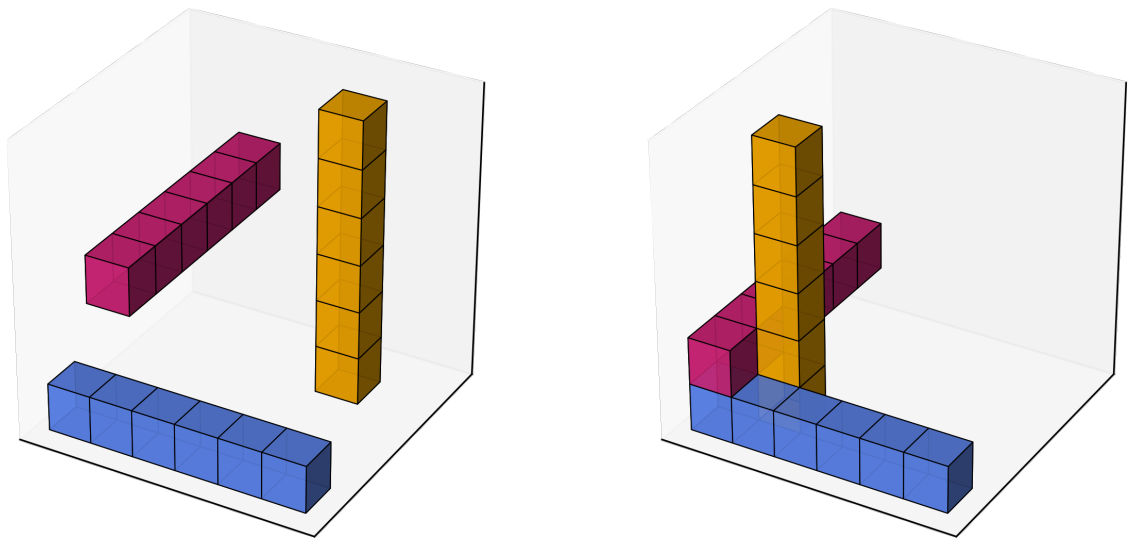
Riešenie. opravuje **Miloš** (milos.micik@trojsten.sk)

Skúsme riešenie začať čo najjednoduchšie - pozrime sa na kocku $2 \times 2 \times 2$. Skúsme do nej uložiť kvádriky tak, aby obsahovala kvádrik otočený v každom z troch možných smerov. Nakoľko sa do tejto kocky zmestia iba 4 kvádriky, veľa možností na ich uloženie nemáme. Uložme teda prvé tri, každý v inom smere. Rýchlo prídeme na to, že sa to dá iba jedným spôsobom (ak odhliadneme od rotácii kocky).



Isto si rýchlo všimneme aj to, že nám takto vzniknú dve $1 \times 1 \times 1$ kocky, ktoré nevieme našimi kvádrikmi už zaplniť. A keďže neexistuje iný spôsob, ako tieto tri kvádriky uložiť, kocku $2 \times 2 \times 2$ takýmto spôsobom vyplniť nevieme.

Poďme sa teraz pozrieť na kocky väčších rozmerov. Predstavme si, že sa kocka $n \times n \times n$ dá vyskladať tak, že sa v nej nachádzajú kvádriky otočené všetkými troma smermi. Vyberme si z takejto kocky tri ľubovoľné kvádriky, ktoré sú otočené každý do iného z troch smerov. Situácia, ktorá nastane, je veľmi podobná situácii pri kocke $2 \times 2 \times 2$. V kocke $n \times n \times n$ s takto rozloženými troma kvádrikmi vieme takisto nájsť dve kocky $1 \times 1 \times 1$, cez ktoré už žiadny kvádrik prechádzať nemôže, lebo vo všetkých troch smeroch prechádzajúcich týmito kockami narazíme na už položené kvádriky. Sú to presne tie dve kocky, ktorých projekcia vo všetkých troch smeroch pretína projekciu jedného z kvádrikov.



Ako by sme vedeli tieto dve kocky $1 \times 1 \times 1$ nájsť? Predstavme si, že kvádriky v kocke "zhrnieme" do jedného rohu tak, že nezmeníme ich orientáciu ani poradie. Keď sa pozrieme na $2 \times 2 \times 2$ výsek v tomto rohu, určite si všimneme, že tu presne nastáva tá istá situácia, ako pri kocke $2 \times 2 \times 2$, a tieto dve problémové $1 \times 1 \times 1$ kocky nájdeme ľahko. Teraz postupne posúvame kvádriky spolu s problémovými $1 \times 1 \times 1$ kockami naspäť na ich pôvodnú pozíciu.

Pri tomto postupe sme si zvolili úplne všeobecné rozpoloženie kvádrikov v kocke. Tým pádom nezáležiac od toho, aké n zvolíme, tieto dve malé kocky by sme vedeli nájsť v hocijakej kocke $n \times n \times n$, v ktorej sa nachádzajú tri rôzne otočené kvádriky. To nám však hovorí, že žiadnu z týchto kociek **nevieme** vyskladať celú tak, aby obsahovala kvádrik otočený v každom z troch možných smerov.

Poznámka

Pri riešení tejto úlohy bolo dôležité dávať pozor na všeobecnosť riešenia. Nestačí ukázať len jeden príklad rozpoloženia z jednej kocky, v ktorom to nejde. Z riešenia musí byť jasné, že takto nevieme vyskladať ***žiadnu*** *kocku $n \times n \times n$.*

3.2 Kreslíme Mŕtvole Siluetu ($\kappa \leq 0$)

Zadanie. „*Vážení, prosím, odstúpte. Detektív Holmes potrebuje na svoju prácu priestor.*“

„*Watson, to nebude nutné. Podľa stôp je zjavné, že tadiaľto išiel niekto s kladivom. To je potenciálna vražedná zbraň. Všimli ste si to logaritmické pravítko v tých kríčkoch za nami? Tak človek s ním a človek s kladivom tu boli tesne po sebe, i keď neviem, v akom poradí. Som tiež presvedčený, že tie stopy, ktoré sem išli z dediny, tiež pribudli tesne pred logaritmickým pravítkom alebo tesne po ňom. Niekto z týchto ľudí má alibi, lebo zjavne bol v čase vraždy v dedine.*“

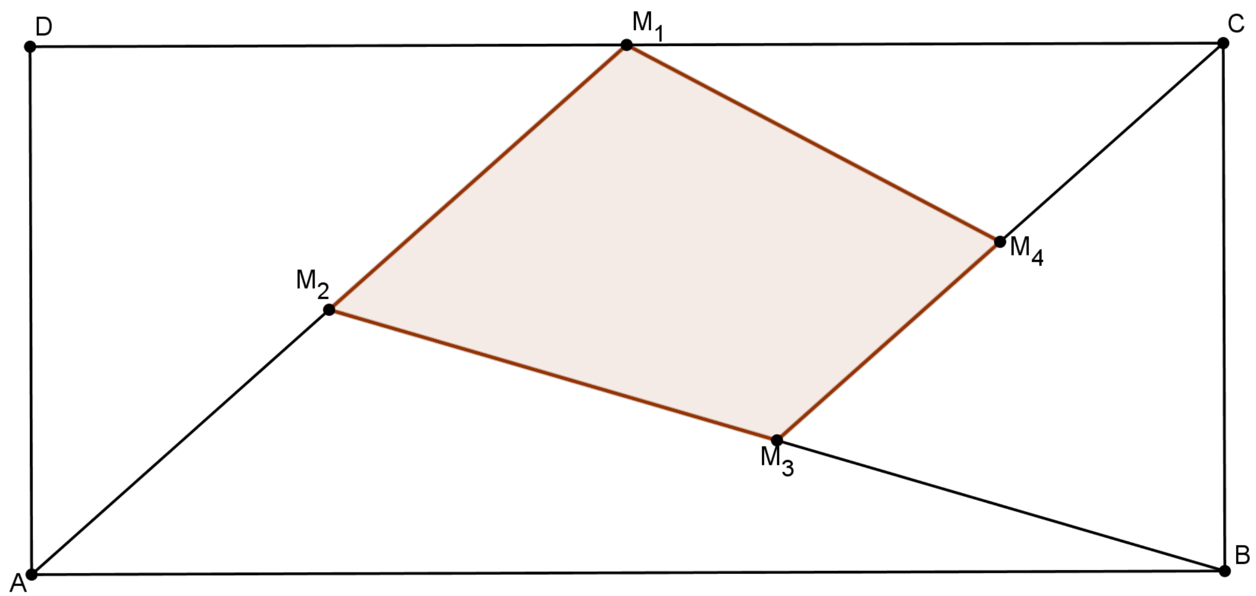
„*A čo napríklad mačeta, Sherlock, to by mohla byť vražedná zbraň.*“

„*To rozhodne. Tú sem niekto doniesol tesne pred hentou varechou alebo tesne po nej.*“

Kým sa Sherlock vybral rozprávať s podozrivými, Watson obkresľoval mŕtvolu, lebo tak sa to skrátka robí.

V hradnej záhrade tvaru obdĺžnika ABCD vyznačil body M_1, M_2, M_3 a M_4 tak, že M_1 je stred strany CD, M_2 je stred AM_1, M_3 je stred BM_2 a M_4 je stred CM_3. Určte, akú časť obdĺžnika ABCD tvorí štvoruholník $M_1M_2M_3M_4$.

Riešenie. opravuje **Vašino** (samuel.vasko@trojsten.sk)

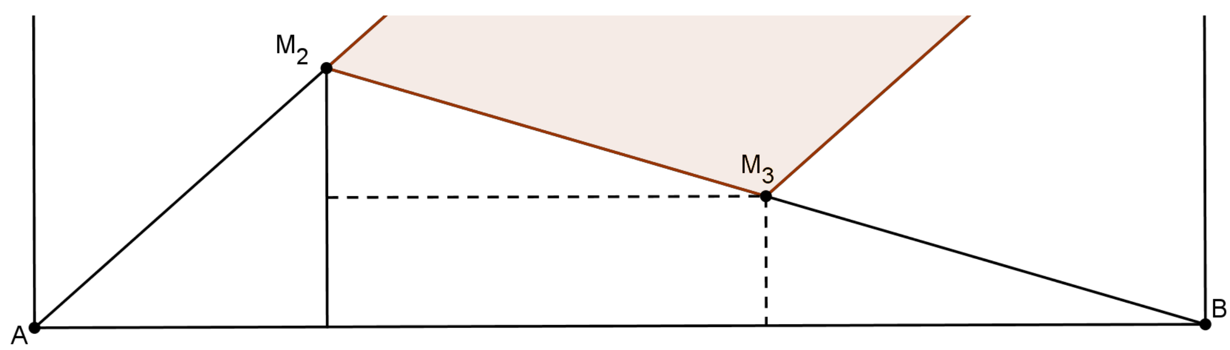


Označme a dĺžku strany AB a b dĺžku strany BC. Namiesto počítania s nepravidelným štvoruholníkom $M_1M_2M_3M_4$ spočítame obsah všetkého ostatného a výsledok odčítame od obsahu obdĺžnika. To nám o niečo zjednoduší prácu, keďže sa nám stačí obmedziť na trojuholníky DAM_1, ABM_2, BCM_3 a CM_1M_4.

Trojuholník DAM_1 je pravouhlý s odvesnami $\frac{1}{2}a$ a b, takže jeho obsah je $\frac{ab}{4}$. S ostatnými trojuholníkmi to bude horšie, ale aspoň majú základne na stranách obdĺžnika.

Kľúčová je teraz pozícia bodu M_2. Ten je vzdialený $\frac{1}{2}b$ od úsečky CD a $\frac{1}{4}a$ od úsečky DA. To si vieme ľahko overiť tak, že do trojuholníka DAM_1 doplníme stredné priečky. Tie sú rovnobežné so stranami trojuholníka a navyše majú polovičnú dĺžku oproti rovnobežnej strane. Úsečka vychádzajúca z M_2 rovnobežná s DM_1 tak bude mať dĺžku $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{4}a$. Podobne vyrátame aj druhú stranu.

Potom však poznáme aj výšku trojuholníka ABM_2. Keďže M_2 je presne v polovici vzdialenosti medzi AB a CD, jeho vzdialenosť od AB je $\frac{1}{2}b$. Obsah trojuholníka ABM_2 tak bude $\frac{ab}{4}$.



Podobnú myšlienku vieme využiť aj pri bode M_3. Treba si len dať pozor, aby sme naozaj počítali s pravouhlým trojuholníkom. Takže potrebujeme použiť výšku trojuholníka ABM_2. Vzdialenosť M_3 od výšky bude $\frac{1}{2}$ zo vzdialenosti výšky od bodu B. Tá je $a - \frac{1}{4}a = \frac{3}{4}a$. Vzdialenosť M_3 od výšky (a teda aj od strany BC) teda bude $\frac{3}{8}a$. Vzdialenosť M_3 od AB bude $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}b = \frac{1}{4}b$. Každopádne na výpočet obsahu BCM_3 nám stačí prvá hodnota. Obsah tohoto trojuholníka je $\frac{3}{16}ab$, keďže jeho základňa má dĺžku b.

Výpočet ešte raz zopakujeme pre M_4. Ten je od CD vzdialený polovicu toho, čo M_3. Ten je vzdialený $\frac{1}{4}b$ od AB, takže $\frac{3}{4}b$ od CD. Výška trojuholníka CM_1M_4 tak bude $\frac{3}{8}b$, jeho základňa je $\frac{1}{2}a$, takže obsah má $\frac{3}{32}ab$.

Teraz nám stačí odčítať všetky trojuholníky od obsahu obdĺžnika. Dostaneme

$$ab - \frac{ab}{4} - \frac{ab}{4} - \frac{3ab}{16} - \frac{3ab}{32} = \frac{7}{32}ab.$$

Štvoruholník $M_1M_2M_3M_4$ teda tvorí $\frac{7}{32}$ obdĺžnika $ABCD$.

3.3 Kuchár Mieša Suroviny ($\kappa \leq 1$)

Zadanie. *„A čo je toto?“ spýtal sa Sherlock dvíhajúc zo zeme handrovú postavičku.*

„To je voodoo bábika. S tou som, ehm, zaklínal, ehm, v čase vraždy,“ povedala jedna z postáv. Sherlock sa otočil za hlasom.

„Takže je to niekoho z vás. A čo tá varecha?“

„Tá je moja. Viete, ja som tu kuchár. Iba varím, a to je celé,“ ozval sa ďalší hlas.

Dokážte, že pre všetky celé čísla n je

$$\frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{7n}{15}$$

celým číslom.

Riešenie. opravuje **Maťka** (martina.ganova@trojsten.sk)

Jeden z možných postupov riešenia tejto úlohy bol pomocou matematickej indukcie. Najskôr sa zameriame na nezáporné hodnoty n. Za n si dosadíme najmenšie možné číslo, v tomto prípade 0 a overíme, či je výraz celým číslom.

$$\frac{0^5}{5} + \frac{0^3}{3} + \frac{7 \cdot 0}{15} = 0.$$

Keďže tvrdenie platí pre $n = 0$, môžeme sa presunúť k indukčnému kroku. Predpokladajme, že pre nejaké nezáporné celé číslo k platí, že výraz

$$\frac{k^5}{5} + \frac{k^3}{3} + \frac{7k}{15}$$

je celým číslom. Teraz si dosaďme $n = k + 1$. Dostaneme tak

$$\frac{(k+1)^5}{5} + \frac{(k+1)^3}{3} + \frac{7(k+1)}{15}.$$

Výraz si môžeme ďalej upraviť použitím binomickej vety na

$$\frac{k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1}{5} + \frac{k^3 + 3k^2 + 3k + 1}{3} + \frac{7k + 7}{15}.$$

Zlomky upravíme, aby mali spoločný menovateľ a sčítame ich

$$\frac{3k^5 + 15k^4 + 30k^3 + 30k^2 + 15k + 3}{15} + \frac{5k^3 + 15k^2 + 15k + 5}{15} + \frac{7k + 7}{15} =$$
$$= \frac{3k^5 + 5k^3 + 7k + 15\left(k^4 + 2k^3 + 3k^2 + 2k + 1\right)}{15} =$$
$$= \frac{3k^5 + 5k^3 + 7k}{15} + \frac{15\left(k^4 + 2k^3 + 3k^2 + 2k + 1\right)}{15}.$$

Po vykrátení druhého zlomku získame

$$\frac{3k^5 + 5k^3 + 7k}{15} + k^4 + 2k^3 + 3k^2 + 2k + 1 =$$
$$= \frac{k^5}{5} + \frac{k^3}{3} + \frac{7k}{15} + k^4 + 2k^3 + 3k^2 + 2k + 1.$$

Môžeme si všimnúť, že výraz sa teraz skladá z troch zlomkov, o ktorých sme od začiatku predpokladali, že ich súčet je celé číslo a niekoľko ďalších celých čísel. Celý výraz teda musí byť celým číslom, ak n je nezáporné celé číslo.

Keď sa pozrieme na záporné hodnoty čísla n, môžeme si všimnúť, že výraz bude taktiež celé číslo, keďže všetky exponenty sú nepárne, a teda výraz nám dá rovnakú hodnotu ako pri kladnom n, akurát s opačným znamienkom.

Pomocou matematickej indukcie sme dokázali, že výraz zo zadania má pre všetky celé čísla n celočíselnú hodnotu.

3.4 Krutá Matematická Strata ($\kappa \leq 2$)

Zadanie. *„Džentlmeni, neradno nám vonku takto postávať. Čo keby sme sa presunuli ku mne dnu? Za chvíľu isto vyjde slnko a svit si bezpečnejšie užijeme zvnútra.“*

„Takže Vám to tu patrí?“ opýtal sa Sherlock. „Vy musíte byť teda pán Drakula. Prečo máte také veľké zuby?“

„Aby som sa mohol lepšie usmievať,“ odvetil Drakula.

„Tie vyzerajú mimoriadne nebezpečne. Mohli by veľmi ľahko niekomu ublížiť, či dokonca zabiť,“ podotkol Watson.

„Počujte, páni detektívi,“ ozval sa im spoza chrbta hlas, „volám sa Gašpar Daikeš a niekde som tu stratil svoju funkciu. Nepomohli by ste mi ju nájsť, keď už ste tu?“

„Funkciu?“ začudoval sa Watson. „Áno, funkciu. Ešte ste o nej nepočuli, pán Watson?“ odvetil Daikeš. „Moja funkcia nie je len taká dáka obyčajná. Nech si vymyslíte ľubovolné dve reálne čísla x a y, funkcia f pre ne určite bude spĺňať rovnosť

$$f(x)f(y) + f(xy) = x + y,\text{“}$$

nedal sa zastaviť Daikeš.

„Ale, ja neviem ako by sa taká funkcia mala hľadať," smutne odvetil Watson. „A vy ste nečítali detektívnu príručku k funkcionálnym rovniciam[1]?" opýtal sa zmätene Daikeš.

Pomôžte Watsonovi nájsť všetky funkcie, ktoré mohli patriť Gašparovi Daikešovi.

Riešenie. opravuje **Denys** (denys.andrukhovskyi@trojsten.sk)

Skúsime využiť metódy, ktoré boli popísane v príručke. Začneme tým, čo vieme spraviť hneď – dosadením. Vidíme, že $x = 0$ a $y = 0$ by nás mohlo doviesť k zaujímavým výsledkom:

$$f(0)f(0) + f(0 \cdot 0) = 0 + 0,$$
$$f(0)^2 + f(0) = 0,$$
$$f(0)(f(0) + 1) = 0.$$

Z toho máme, že buď $f(0) = 0$, alebo $f(0) + 1 = 0$, t.j. $f(0) = -1$. Skúsme teraz dosadiť len $y = 0$:

$$f(x)f(0) + f(x \cdot 0) = x + 0,$$
$$f(x)f(0) + f(0) = x. \tag{4.1}$$

Teraz už vidíme, že ak $f(0) = 0$, tak posledná rovnica bude vyzerať takto:

$$f(x) \cdot 0 + 0 = x,$$
$$0 = x.$$

Potom máme, že posledná rovnica platí len pre $x = 0$, ale nie pre ľubovoľné x. Preto $f(0) \neq 0$.

To znamená, že jedinou možnosťou je $f(0) = -1$. Skúsime teraz dosadiť $f(0) = -1$ do (4.1):

$$f(x) \cdot (-1) + (-1) = x,$$
$$-f(x) = x + 1,$$
$$f(x) = -x - 1.$$

Takže sme našli jediného kandidáta na riešenie. Aby to bolo naozaj riešenie, musíme ho teraz overiť dosadením do pôvodnej rovnice:

$$f(x)f(y) + f(xy) = x + y,$$
$$(-x - 1)(-y - 1) + (-xy - 1) = x + y,$$
$$(xy + x + y + 1) - xy - 1 = x + y,$$
$$x + y = x + y,$$
$$0 = 0.$$

[1] https://seminar.strom.sk/media/uploads/funkcionalne_rovnice.pdf

Táto funkcia spĺňa rovnosť pre všetky x, y, a teda naozaj funkcia $f(x) = -x - 1$ je riešením danej rovnice. A pri tom sme ukázali, že iné riešenia neexistujú, teda je to jediné riešenie.

3.5 Kúty Mnohých Sietí ($\kappa \leq 6$)

Zadanie. *Keď sa naši detektívi s podozrivými usadili v čajovom salóne*[2]*, Sherlock spustil paľbu otázok.*

„Kto ste a čo ste robili v čase vraždy?“ prst zaboril do jedného z prítomných.

„Ja… Ja som Sancho? Ja som Sancho,“ vyjachtal Sancho. „V čase vraždy som kŕmil netopiere. Určite Vám to dosvedčia.“

„A Vy?“ ukázal prstom na ďalšieho z podozrivých.

„Viete, ja som exekútor. Prišiel som robiť súpis majetku. V čase vraždy som počítal pavúčie nožičky. Viete, aké je to namáhavé?“

V tomto sídle sa nachádza k pavúkov a 2k kútov. Každý pavúk má pavučinu práve v k kútoch, pričom každá dvojica pavúkov zdieľa najviac 2 kúty, v ktorých majú obaja pavučinu. Určte všetky k, pre ktoré to ide.

Riešenie.

3.6 Konanie Manželka Skrýva

Zadanie. *„A Vy?“ ukázal Sherlock na jedinú ženu v miestnosti.*

„Ja sa volám Winnie,“ odpovedala.

„A v čase vraždy ste…“

„V čase vraždy som bola manželka zavraždeného,“ odvetila bez mihnutia oka.

„Takže ste manželka,“ zopakoval Sherlock. „To však nič nehovorí o tom, čo ste v čase vraždy robili. Prečo nám to nepoviete?“

„Poviem vám to, až keď nájdete také kladné celé číslo n,“ udrela päsťou do stola, „a také celé číslo m,“ udrela znova, „že spĺňajú vzťah

$$3n^2 + 3n + 7 = m^3.\text{“}$$

Dokážte, že Sherlock také čísla m, n nenájde, lebo neexistujú.

Riešenie. opravuje **Danko** (daniel.teplan@trojsten.sk)

Ak chceme dokázať, že rovnosť nebude platiť pre žiadne n a m, dobrým nápadom je nájsť nejakú slabšiu podmienku, o ktorej to dokážeme jednoduchšie. Napríklad aby sa výrazy rovnali, musia mať aj rovnaký zvyšok po delení číslom 3, čo budeme zapisovať pomocou kongruencií[3]. Číslo 3 napríklad preto, že je rozumne malé a zároveň vieme, že jediný člen na ľavej strane, ktorý nie je deliteľný tromi, je +7. Teda aby rovnosť platila, musí platiť:

$$0 + 0 + 7 \equiv 1 \equiv m^3 \pmod 3.$$

[2] a doplnili si 1 život

[3] Trojité rovná sa značí rovnosť zvyšku po delení tým číslom, ktoré je uvedené v zátvorke na konci riadku

Číslo m môže mať rôzne zvyšky po delení 3, buď bude násobkom 3, alebo bude o 1 menej[4], alebo viac. Vypočítajme si, ako tieto čísla budú vyzerať umocnené na tretiu. A keďže nás zaujíma iba zvyšok po delení tromi, môžeme všetky členy deliteľné 3 odstrániť.

$$(3k)^3 = 27k \equiv 0, \pmod 3$$
$$(3k+1)^3 = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1 \equiv 1, \pmod 3$$
$$(3k-1)^3 = 27k^3 - 27k^2 + 9k - 1 \equiv -1 \equiv 2. \pmod 3$$

Vidíme teda, že jediná možnosť pre m je taká, kde $m \equiv 1 \pmod 3$. My však potrebujeme ukázať, že ani tak rovnosť nikdy nedostaneme. Skúsime preto nájsť problém v inom zvyšku. To, čo sme doteraz zistili, ale nie je zbytočné, využijeme práve to, že pravá strana bude mať tvar $(3k+1)^3$. Ako vidíme vyššie, po roznásobení sú všetky členy okrem $+1$ deliteľné deviatimi. Vieme teda, že pravá aj ľavá strana by musela mať zvyšok 1 po delení 9. Preskúmajme teda ľavú stranu a trochu si ju upravme, aby sme zistili, či to tak môže byť.

$$3n^2 + 3n + 7 = 3(n^2 + n) + 7 \equiv 1, \pmod 9$$
$$3(n^2 + n) \equiv 1 - 7 \equiv -6 \equiv 3, \pmod 9$$
$$n^2 + n \equiv 1. \pmod 3$$

Po odčítaní 7 sme celú kongruenciu predelili tromi vrátane modula, pretože aj modulo bolo deliteľné 3. Pri výraze $n^2 + n$ si ľahko overíme, že jeho zvyšky postupne pre $n \equiv 0, 1, 2$ budú $0 + 0 = 0$; $1 + 1 = 2$; $4 + 2 = 6 \equiv 0 \pmod 3$. Vidíme teda, že posledná kongruencia nikdy platiť nebude, a teda obe strany našej pôvodnej rovnosti nikdy nebudú mať rovnaký zvyšok po delení 9. Tým pádom sa nemôžu nikdy rovnať, čo bolo treba dokázať.

3.7 Kečku Musím Schladiť

Zadanie. *Sherlockovi sa od snahy rozlúsknuť prípad až parilo z kečky. Rozhodol sa teda aspoň tentoraz sňať z hlavy svoj povestný klobúk, aby ju na chvíľu schladil. V klobúku našiel kúsok papiera, na ktorom bolo napísané:*

„Dávajte si pozor na tretiu osobu na mieste činu. Mám dôkazy, že počas vraždy zavýjala na mesiac.“

Sherlock papier otočil, aby zistil, kto mu tento zvláštny odkaz poslal. Namiesto podpisu však na druhej strane našiel:

„Máme n rôznych guľôčok, označených nie nutne rôznymi číslami, pričom na každej guľôčke je práve jedno číslo. Zobrali sme si každú podmnožinu guľôčok (aj prázdnu) a spočítali sme súčet čísel na týchto guľôčkach.[5] Počet rôznych súčtov som si napísal na čelo. V závislosti od n určte, koľko rôznych čísel som si mohol na čelo napísať.“

Riešenie. opravuje **Michal Staník** (michal.stanik@trojsten.sk)

Úloha sa nás pýta, koľko rôznych čísel môžeme dostať ako súčet nejakej podmnožiny čísel[6], ktoré sú napísané na guľôčkach.

[4] To je zvyšok 2, alebo ekvivalentne zvyšok -1.
[5] Súčet prázdnej množiny čísel je 0.
[6] Čísla môžu byť aj rovnaké, takže to nie je úplne podmnožina, ale budeme používať tento pojem „pod-multimnožiny“ čísel.

Úvodné pozorovania

Všetkých možných podmnožín je 2^n, takže určite nemôžeme dostať viac ako 2^n rôznych súčtov. Toľko zároveň vieme dosiahnuť – ak budú na guľôčkach mocniny dvojky: $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$, tak vieme dostať ľubovoľný súčet s od 0 do $2^n - 1$, a to tak, že vyberieme tie mocniny dvojky, ktoré sú vynásobené cifrou 1 v binárnom zápise s.

Tiež vieme dostať malé počty súčtov – ak na guľôčkach bude k jednotiek a $n - k$ núl, vieme získať práve všetky súčty od 0 do k, kde $0 \leq k \leq n$.

Náročnejšie môže byť získať $2^n - 1$ rôznych súčtov. V tomto prípade musia byť všetky súčty rôzne, až na jednu dvojicu podmnožín, ktorá má rovnaký súčet. Ak by obe tieto podmnožiny obsahovali ten istý prvok (guľôčku), tak po jeho odobraní z oboch by sme dostali ďalšiu dvojicu podmnožín s rovnakým súčtom, čo nechceme. Podobne, ak by obe neobsahovali nejaký prvok, jeho pridaním do oboch by sme dostali ďalšiu dvojicu s rovnakým súčtom. Musí preto ísť o podmnožinu a jej doplnok (tie čísla, ktoré nie sú v prvej podmnožine). Napríklad funguje aj prípad, kedy jedno číslo je súčtom ostatných, napr. $\{3, 4, 7\}$ dáva iba jednu dvojicu s rovnakým súčtom, a to $3 + 4 = 7$.

Vyzerá to tak, že nám nič nebráni dostať ľubovoľný počet súčtov od 1 do 2^n. Poďme to dokázať!

Všimnime si, že pridaním ďalšieho prvku počet možných súčtov vzrastie z 2^n na 2^{n+1}, čiže sa zdvojnásobí. Podmnožiny po pridaní prvku sú tie pred pridaním a tiež tie pred pridaním plus nový prvok, čo je tiež zhruba zdvojnásobenie, ale niektoré súčty môžu byť rovnaké.

Dôkaz

Budeme postupovať indukciou podľa n – počtu čísel/guľôčok. Ukážeme, že vieme dostať ľubovoľný počet rôznych súčtov od 1 do 2^n.

Pre $n = 1$, ak chceme 1 súčet vezmeme guľôčku s číslom 0, súčet každej podmnožiny je 0. Ak chceme 2 súčty, vezme guľôčku s číslom 1, súčty podmnožín sú 0 a 1.

Predpokladajme, že tvrdenie platí pre n a poďme dokázať, že pre $n+1$ vieme získať m rôznych súčtov (pre ľubovoľné $1 \leq m \leq 2^{n+1}$). Prvky aj súčty budeme generovať nezáporné, takže najmenší dosiahnuteľný súčet bude 0 (určite ho vieme dostať aspoň ako súčet prázdnej množiny).

Ak $m = 2k$ je párne, tak si z indukčného predpokladu zostrojíme n guľôčok, z ktorých vieme získať k súčtov $0 = s_1 < s_2 < \cdots < s_k$. Na novú guľôčku napíšeme číslo $s_k + 1 = a$. Všetky súčty s novou guľôčkou sú teraz väčšie ako všetky súčty bez nej, pretože nová guľôčka má dostatočne veľké číslo. Vieme získať $2k$ súčtov $0 = s_1 < s_2 < \cdots < s_k < a + s_1 < a + s_2 < \cdots < a + s_k$.

Ak $m = 2k - 1$ je nepárne, tak si opäť z indukčného predpokladu zostrojíme guľôčky, z ktorých vieme získať k súčtov $0 = s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ (polovicu zaokrúhlenú nahor). Teraz však pridáme číslo, ktoré je rovné najväčšiemu súčtu s_k, takže všetkých súčtov bude o jeden menej ako dvojnásobok: $0 = s_1 < s_2 < \cdots < s_k < s_k + s_2 < \cdots < s_k + s_k$. Naozaj to funguje, keďže v tomto prípade $1 \leq k \leq 2^n$ a $s_k = s_k + s_1 = s_k + 0$.

Indukcia je týmto hotová, pretože vieme mať $n + 1$ guľôčok s ľubovoľným počtom súčtov od 1 do 2^{n+1}.

Týmto sme dokázali, že pre n guľôčok vieme dostať ľubovoľný počet rôznych súčtov podmnožín od 1 do 2^n.

3.8 Kohosi Mdloby Skolili

Zadanie. *Sherlock síce z lístka nezistil, kto mu ho poslal, ale vnuklo mu to zaujímavú otázku.*

„Kto z vás bol na mieste činu ako prvý? Kto našiel mŕtvolu?"

„Ja," ozval sa jeden z prítomných.

„A vy ste?" vyzvedal Sherlock.

„Remi, pán detektív."

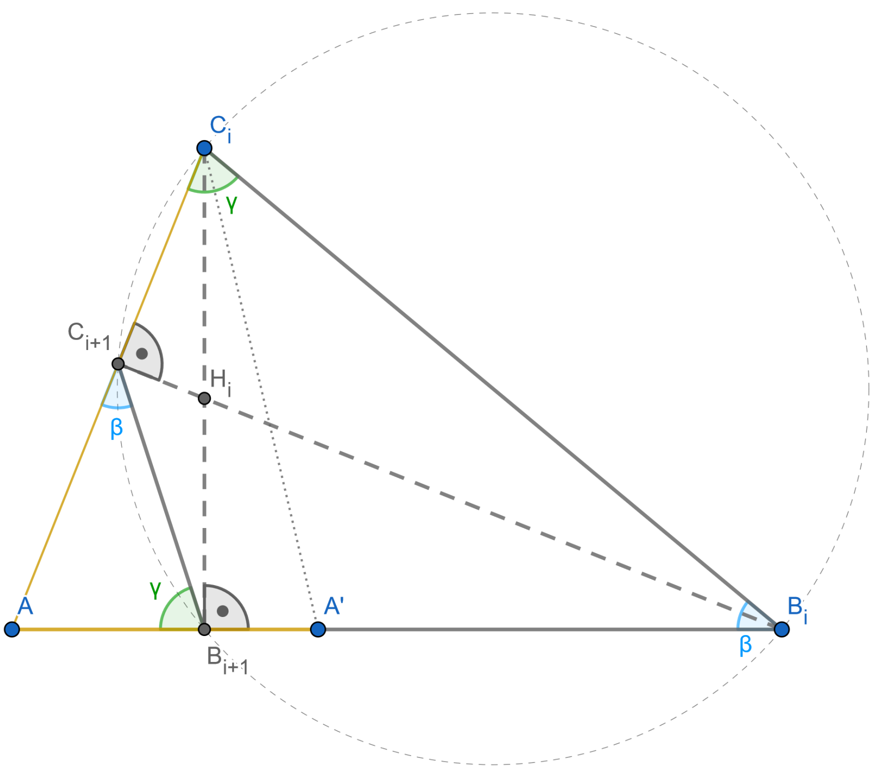
„Nuže, Remi, opíšte nám, čo ste na mieste činu videli."

„No, viete, pán detektív, išli na mňa vcelku mdloby z pohľadu na mŕtvolu, takže som videl také zvláštne obrazce."

Celé to začalo trojuholníkom AB_0C_0 s ortocentrom H_0. Pre každé prirodzené n definujeme B_n ako kolmý priemet C_{n-1} na AB_0, C_n definujeme ako kolmý priemet B_{n-1} na AC_0 a H_n definujeme ako ortocentrum trojuholníka AB_nC_n. V závislosti od veľkosti uhla B_0AC_0 a od dĺžky úsečky B_0C_0 určite, čomu sa rovná

$$\sum_{k=0}^{\infty} |AH_k|.$$

Riešenie. opravuje **Lukáš** (lukas.gaborik@trojsten.sk)



Pri riešení úlohy budeme využívať orientované uhlenie[7]. Ide o trik, vďaka ktorému (takmer) nebudeme musieť rozoberať rôzne prípady (ako napríklad "Čo ak $\alpha > 90°$? Čo ak $\gamma > 90°$?"). Samozrejme, úloha bolo možné riešiť aj klasickým uhlením, iba je potrebné si dávať pozor na možné problémy.

Rýchle uvedenie orientovaných uhlov: Orientovaným uhlom (p, q) dvoch priamok p, q (v tomto poradí) nazveme uhol, o ktorý je potrebné otočiť p (v kladnom smere, teda proti smeru hodinových ručičiek), aby otočená p bola rovnobežná (alebo zhodná) s q.

Teraz pokračujeme so samotným riešením.

Najprv dokážeme podobnosť trojuholníkov AB_iC_i a $AC_{i+1}B_{i+1}$.

Nech $(B_iA, AC_i) = \alpha_i$, $(C_iB_i, B_iA) = \beta_i$ a $(AC_i, C_iB_i) = \gamma_i$.

Všimneme si, že ak $\alpha = 90°$, tak zo zadania $B_{i+1} = C_{i+1} = A$. Potom ale nevieme definovať B_{i+2} a C_{i+2}, teda naša suma nie je definovaná.

Nakoľko C_iB_{i+1} a B_iC_{i+1} sú výšky, platí $(B_iC_{i+1}, AC_i) = (AC_i, B_iC_{i+1}) = (C_iB_{i+1}, AB_i) = (AB_i, C_iB_{i+1}) = 90°$. Z $(B_iB_{i+1}, B_{i+1}C_i) = (B_iC_{i+1}, C_{i+1}C_i)$ zároveň dostávame, že štvoruholník $C_{i+1}B_{i+1}B_iC_i$ (vo vhodnom poradí záležiac od konštrukcie) je tetivový. Z vety o úsekovom uhle (pre orientované uhly) potom $(C_{i+1}B_{i+1}, B_{i+1}A) = (C_{i+1}C_i, C_iB_i) = (AC_i, C_iB_i) = \gamma_i$. Analogicky $(AC_{i+1}, C_{i+1}B_{i+1}) = \beta_i$.

Nápodobne z $(H_iC_{i+1}, C_{i+1}A) = (H_iB_{i+1}, B_{i+1}A) = 90°$ je štvoruholník $H_iC_{i+1}AB_{i+1}$ (znova, s bodmi vo vhodnom poradí) tetivový. Z toho dostávame $(C_{i+1}H_i, H_iA) = (C_{i+1}B_{i+1}, B_{i+1}A) = \gamma_i$. Tento fakt využijeme neskôr pri počítaní $|AH_0|$.

Dostávame $\gamma_{i+1} = (AC_{i+1}, C_{i+1}B_{i+1}) = (C_iB_i, B_iA) = \beta_i$ a $\beta_{i+1} = (C_{i+1}B_{i+1}, B_{i+1}A) = (AC_i, C_iB_i) = \gamma_i$. To nám hovorí, že trojuholníky AB_iC_i a $AC_{i+1}B_{i+1}$ sú podobné podľa vety uu, čo sme chceli.

Ďalej sa budeme pokúšať nájsť koeficient podobnosti k. Potom z podobnosti $|AH_{i+1}|/|AH_i| = k = |AB_{i+1}|/|AC_i|$.

Vyjadríme si $|AB_{i+1}|$ z trojuholníka $C_iB_{i+1}A$. Tu už prestaneme používať orientované uhly, keďže nám nevyriešia problémy, ktoré vzniknú klasickým uhlením.

Naše goniometrické znalosti nám hovoria, že

$$\cos(|\sphericalangle B_{i+1}AC_i|) = |AB_{i+1}|/|AC_i|.$$

To upravíme na

$$|AB_{i+1}| = \cos(|\sphericalangle B_{i+1}AC_i|) \cdot |AC_i|.$$

Tu ale nastáva problém, keďže $|\sphericalangle B_{i+1}AC_i| = \alpha$ neplatí vo všetkých konfiguráciách. Konfigurácie sú dve, a to

- $\alpha < 90°$ a $|\sphericalangle B_{i+1}AC_i| = \alpha$,
- $\alpha > 90°$ a $|\sphericalangle B_{i+1}AC_i| = 180° - \alpha$.

[7] Viac na https://prase.cz/library/OrientovaneUhlyMTa/OrientovaneUhlyMTa.pdf.

Z toho vyplýva, že $\cos(|\sphericalangle B_{i+1}AC_i|) = |\cos(\alpha)|$, pretože

$$\cos(|\sphericalangle B_{i+1}AC_i|) = \begin{cases} \cos(\alpha) > 0 & \alpha < 90^\circ, \\ \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha) > 0 & \alpha > 90^\circ. \end{cases}$$

Dostávame $k = |AB_{i+1}|/|AC_i| = |\cos(\alpha)|$, z čoho vyplýva:

$$|AH_1| = |\cos(\alpha)| \cdot |AH_0|,$$

$$|AH_2| = |\cos^2(\alpha)| \cdot |AH_0|,$$

$$\vdots$$

$$|AH_i| = |\cos^i(\alpha)| \cdot |AH_0|.$$

Teraz potrebujeme dopočítať $|AH_0|$. To vieme urobiť mnohými spôsobmi (napr. cez podobnosti alebo vzorce), ale my využijeme sínusovú vetu pre trojuholník AH_0C_1. Platí:

$$|AH_0|/\sin(90^\circ) = |AC_1|/\sin(|\sphericalangle C_1H_0A|)$$

$$|AH_0| = |AC_1|/\sin(|\sphericalangle C_1H_0A|)$$

$$|AH_0| = \cos(\alpha) \cdot |AB_0|/\sin(|\sphericalangle C_1H_0A|)$$

Zo sínusovej vety pre ABC máme $|AB_0| = \sin(\gamma_0) \cdot |B_0C_0|/\sin(\alpha)$. Dosadíme a dostaneme

$$|AH_0| = |\cos(\alpha)| \cdot \sin(\gamma_0) \cdot \frac{|B_0C_0|}{\sin(\alpha)} \cdot \frac{1}{\sin(|\sphericalangle C_1H_0A|)} = \frac{|B_0C_0| \cdot |\cos(\alpha)|}{\sin(\alpha)} \cdot \frac{\sin(\gamma_0)}{\sin(|\sphericalangle C_1H_0A|)}.$$

Spomenieme si na $(C_{i+1}H_i, H_iA) = \gamma_i$, čo sme predtým vypočítali. Samozrejme nám tu nastávajú dve možnosti podľa konfigurácie: $|\sphericalangle C_1H_0A| = (C_{0+1}H_0, H_0A) = \gamma_0$ alebo $|\sphericalangle C_1H_0A| = (H_0A, C_{0+1}H_0) = 180^\circ - \gamma_0$. Tentokrát je nám to ale jedno, pretože $\sin(\gamma_0) = \sin(180^\circ - \gamma_0)$.

Dostávame tak

$$|AH_0| = \frac{|B_0C_0| \cdot |\cos(\alpha)|}{\sin(\alpha)} \cdot \frac{\sin(\gamma_0)}{\sin(\gamma_0)} = \frac{|B_0C_0| \cdot |\cos(\alpha)|}{\sin(\alpha)} = |B_0C_0| \cdot |\cot(\alpha)|.$$

Hľadaná suma je následne vďaka súčtu nekonečného geometrického radu rovná

$$\sum_{k=0}^{\infty} |AH_k| = \sum_{k=0}^{\infty} |\cos^k(\alpha)| \cdot |AH_0| = |B_0C_0| \cdot |\cot(\alpha)| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} |\cos^k(\alpha)| = \boxed{|B_0C_0| \cdot |\cot(\alpha)| \cdot \frac{1}{1 - |\cos(\alpha)|}}.$$

Suma konverguje pre $|\cos(\alpha)| < 1$, čo bude v našom trojuholníku platiť vždy.

3.9 Krásy Mysle Sherlockovej

Zadanie. *„A ostatní?" prerušil Sherlock Remiho monológ. „Kedy ste prišli Vy na miesto činu, pán gróf?"*

„Viete, ja si nepamätám, bol to vcelku šokujúci nález. Som si však istý, že som prišiel okamžite po pánovi exekútorovi."

„A Vy, pane?" opýtal sa Sherlock sluhu.

Sluha, vytrhnutý z driemot, sa spamätal. „No... Ja som bol na mieste činu skoro naraz s Remim, pán detektív. Nie som si istý, či som prišiel tesne pred ním, alebo tesne po ňom."

Teraz sa už Sherlock skutočne začal blížiť k riešeniu. Jeho myseľ totiž pracuje ako počítač – v binárnej sústave. Riešenie prípadu si môžeme predstaviť ako kladné celé číslo n. Povieme, že číslo n je blízko, *ak jeho zápis v dvojkovej sústave končí na jeho zápis v desiatkovej sústave. Napr. číslo* 10 *zapíšeme v dvojkovej sústave ako* 1010, *čo končí ciframi* 10. *Takže číslo* 10 *je* blízko. *Nájdite všetky kladné celé čísla n, ktoré sú* blízko *a v desiatkovej sústave majú najviac dve cifry* 1.

Riešenie. opravuje **Lukáš** (lukas.gaborik@trojsten.sk)

Uvedomme si, že aby číslo bolo blízko, musí jeho desiatkový zápis obsahovať iba nuly a jednotky – inak by ním totiž nemohol končiť jeho dvojkový zápis. Navyše, hľadáme iba také prirodzené čísla poblíž, ktoré obsahujú v desiatkovej sústave najviac dve jednotky. Preto riešeniami môžu byť iba čísla tvaru 10^k a $10^k + 10^l$ pre $k > l$ nezáporné celé.

Ak $n = 10^k$, tak v desiatkovej sústave pozostáva z jednotky a k núl. V dvojkovej sústave však tiež musí končiť k nulami, keďže $2^k \mid 10^k$. Navyše, keďže 2 a 5 sú nesúdeliteľné, tak $2^{k+1} \nmid 10^k$, čo znamená, že cifra naľavo od týchto k núl musí byť jednotka. Tým dostávame, že všetky mocniny desiatky sú blízko.

Uvažujme teraz $n = 10^k + 10^l$ s $k > l$, ktoré je blízko. Keď z jeho dvojkového zápisu odstránime $(k+1)$-vú a $(l+1)$-vú cifru sprava, musí končiť $k+1$ nulami. To však znamená, že $n - 2^k - 2^l$ je deliteľné 2^{k+1}. Vieme však, že $10^k - 2^k = 2^k \cdot (5^k - 1)$ je násobkom 2^{k+1}, keďže $5^k - 1$ je vždy párne. Preto nám stačí nájsť také dvojice k, l, že

$$2^{k+1} \mid 10^l - 2^l,$$

$$2^{k-l+1} \mid 5^l - 1.$$

To nám pripomína známy vzťah $5^l - 1 = (5-1)(5^{l-1} + 5^{l-2} + \cdots + 5 + 1)$. Všimnime si, že pre nepárne l máme v druhej zátvorke nepárny počet nepárnych sčítancov, čiže táto zátvorka nemôže byť párna. Javí sa teda, že je prospešné si rozložiť exponent l na párnu a nepárnu časť – preto nech $l = 2^a \cdot b$, kde b je nepárne. Potom

$$5^l - 1 = \left(5^{2^a}\right)^b - 1 = \left(5^{2^a} - 1\right)(\text{nepárny počet nepárnych sčítancov}) = \left(5^{2^{a-1}} + 1\right)\left(5^{2^{a-1}} - 1\right) \cdot (\text{nepárne číslo}).$$

Všimnime si, že prvé dve zátvorky sú obe párne. Navyše sa líšia o 2, takže práve jedna z nich je deliteľná 4. Avšak, $5^{2^{a-1}} - 1 = \left(5^{2^{a-2}} - 1\right)\left(5^{2^{a-2}} + 1\right)$ musí byť deliteľná 4, a teda $(5^{2^a-1} + 1)$ má v prvočíselnom rozklade práve jednu dvojku. Takto vieme pokračovať, čím dostaneme

$$5^{2^a} - 1 = \left(5^{2^{a-1}} + 1\right)\left(5^{2^{a-1}} - 1\right) = \left(5^{2^{a-1}} + 1\right)\left(5^{2^{a-2}} + 1\right)\left(5^{2^{a-2}} - 1\right) = \cdots =$$

$$= \left(5^{2^{a-1}} + 1\right)\left(5^{2^{a-2}} + 1\right)\cdots\left(5^{2^1} + 1\right)\left(5^{2^0} + 1\right)\left(5^{2^0} - 1\right).$$

Ako sme už povedali vyššie, prvých $a-1$ zátvoriek má v prvočíselnom rozklade práve jednu dvojku. A súčin posledných dvoch, $6\cdot 4 = 2^3\cdot 3$ ich obsahuje práve 3. Preto sa dvojka v prvočíselnom rozklade 5^l-1 nachádza presne $(a+2)$-krát[8]. My však potrebujeme, aby to bolo aspoň $k-l+1$, z čoho dostávame

$$k - 2^a\cdot b + 1 \leq a+2,$$
$$k \leq 2^a\cdot b + a + 1.$$

Navyše vieme, že $k > l$, a teda v tejto vetve úlohu spĺňajú všetky čísla tvaru $10^{2^a\cdot b+c+1}+10^{2^a\cdot b}$, kde a, b, c sú nezáporné celé čísla, pričom $c\leq a$ a b je nepárne.

Nezabudnime však na jeden špeciálny prípad, a to $l=0$. Vtedy ho totiž nevieme zapísať v tvare $2^a\cdot b$, keďže nejde o prirodzené číslo. Je však zrejmé, že podobne ako pri mocninách desiatky, číslo 10^k+1 končí v dvojkovej sústave na svoj zápis v desiatkovej sústave pre všetky $k\geq 1$.

3.10 Kto Mohol Strieľať?

Zadanie. *Watson vytiahol Sherlocka z miestnosti, aby sa mohli poradiť.*

„Je to skutočne veľmi zapeklitý prípad, Sherlock,“ povedal Watson. „Máme tu päť podozrivých – exekútora, grófa, kuchára, manželku a sluhu. V nejakom poradí prišli na miesto činu, ale každý z nich má alibi. Niekto bol počas vraždy v dedine a ostatní sa v tom čase venovali nejakej inej činnosti. A potom sú tu tie stopy na mieste činu. Aj tých je päť – voodoo bábika, varecha, logaritmické pravítko, funkcia, a ampulka...“

„Ampulka? Prečo mi to hovoríte až teraz, Watson? V tej mohol byť jed. Ten by mohol byť ďalšou vražednou zbraňou!“

„No, vidíte, Sherlock. Ešteže ma máte.“

„Ale kdeže, milý Watson. Strieľam si z Vás. Tak, ako si niekto vystrelil zo Záhradníka. Videli ste snáď tú stopu po guľke. Je to prosté, milý Watson, aj keď mal každý podozrivý prístup k jednej zo zbraní, vrah určite použil guľomet.“

Sherlock vie, že guľky z guľometu sú očíslované číslami $a_1, a_2, \ldots, a_n$ z intervalu $\langle 0,1\rangle$. Dokážte, že pre $n\geq 2$ platí

$$\frac{a_1}{1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n}+\frac{a_2}{1+a_3+a_4+\cdots+a_n+a_1}+\cdots+\frac{a_n}{1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-2}+a_{n-1}}+$$
$$+(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_{n-1})(1-a_n)\leq 1.$$

Riešenie. opravuje **Džavo** (adam.dzavoronok@trojsten.sk)

Pri riešení tejto nerovnosti sme si mohli všimnúť, že jeden z prípadov, kedy nastáva rovnosť, je ak práve jedno z čísel má ľubovoľnú hodnotu z daného intervalu a zvyšné sú 0. To nám môže povedať, že chceme uvážiť najväčší prvok z pomedzi a_i, lebo na základe prípadov rovnosti má špeciálne postavenie. Tak to poďme spraviť! Vzhľadom na cyklickosť nerovnosti predpokladajme bez ujmy na všeobecnosti, že a_1 je najväčšie. To nám umožní dobre odhadnúť menovatele. Tie sa líšia tým, že vždy vynecháme nejaké a_i. Najmenšiu hodnotu nadobudnú, ak vynecháme

[8]Toto pozorovanie sa dalo urobiť aj využitím p-valuácií a Lifting The Exponent lemmy, o ktorých si môžete prečítať napríklad na https://drive.google.com/file/d/1t0Qhmxsw5n2b_G-dXmdrhT4YL719XgOf/view?usp=drive_link.

a_1. Využitím tohto pozorovania dostaneme

$$\frac{a_1}{1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n}+\cdots+\frac{a_n}{1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-2}+a_{n-1}} \le \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{1+a_2+a_3+\cdots+a_n},$$
$$\frac{a_1}{1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n}+\cdots+\frac{a_n}{1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-2}+a_{n-1}} \le 1-\frac{1-a_1}{1+a_2+a_3\cdots+a_n}.$$

Dosadením tohto odhadu do zadanej nerovnosti a po pár jednoduchých úpravách získame

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)(1+a_2+a_3+\cdots+a_n) \le (1-a_1).$$

Teraz si všimnime, že aritmetický priemer čísel $(1-a_2), (1-a_3), \ldots, (1-a_n), (1+a_2+a_3\cdots+a_n)$ je 1 a na ľavej strane nerovnosti, ktorú nám stačí dokázať, nám vystupuje n-tá mocnina ich geometrického priemeru, ktorý môžeme odhadnúť AG nerovnosťou ako $1^n = 1$, z čoho máme

$$(1-a_1)\big((1-a_2)\cdots(1-a_n)(1+a_2+a_3\cdots+a_n)\big) \le (1-a_1)\cdot 1^n = (1-a_1),$$

čím sme ukázali, že platí silnejšia nerovnosť, ktorú sme dostali odhadmi a ekvivalentnými úpravami zadanej nerovnosti, čiže následne platí aj tá.