# Riešenia 1. kola letnej časti

## 1.1 Kradne Mená Súrodencom ($\kappa \leq 0$)

**Zadanie.**

*V „chalúpke" vo Vrbovom bývala rodina, ktorá mala veľa detí. Matúš, Móric, Michal, František, Serafín, August. To všetko boli mená jedného z nich. Jeho súrodencom sa nepáčilo, že Matúš Móric Michal František Serafín August môže mať hneď 6 mien, kým oni nemajú žiadne, takže hneď ako dospel, tak ho hnali pred súd, aby nastolil spravodlivosť.*

*Súd súdi na základe troch premenných $x, y, z$, ktoré sú celými číslami, a rád by zistil, či odsúdený môže byť vo väzení až do roku 2025. Aby tam tak dlho mohol byť, tak premenné musia spĺňať*

$$(x + y)(y + z)(z + x) = 2025.$$

*Existujú také $x, y, z$?*

**Riešenie.** opravujú **Naťa** (natalia.cigasova@trojsten.sk) a **Filip** (filip.kotoc@trojsten.sk)

Na začiatku celej úlohy je dobré si uvedomiť, že číslo 2025 chceme získať ako súčin troch iných čísel. Je teda dobré sa pozrieť na prvočíselný rozklad čísla 2025. Tu si môžeme všimnúť, že $2025 = 3^4 \cdot 5^2$. Ak má teda platiť rovnosť zo zadania, musí platiť, že jednotlivé zátvorky sú nejakými násobkami týchto prvočísel, a zároveň využijeme iba dostupné prvočísla. Trik celého riešenia spočíva v tom, že medzi prvočíslami nemáme dvojku (2025 je nepárne). Ak by sme chceli získať číslo 2025 ako súčin troch zátvoriek, každá z týchto zátvoriek musí byť nepárne číslo. Keďže každá je súčtom dvoch celých čísel, nepárne číslo vieme vytvoriť iba ako súčet jedného párneho a jedného nepárneho čísla (2 nepárne alebo 2 párne nám dajú párny súčet). Teraz keď vieme, že všetky 3 zátvorky sú nepárne a v každej zátvorke je jeden párny a jeden nepárny sčítanec, tak bez ujmy na všeobecnosti môžeme povedať, že $x$ je párne a $y$ je nepárne. Z druhej zátvorky teda vyplýva, že $z$ je párne, keďže druhý člen v tej zátvorke, $y$, je nepárny. Tu však nastáva spor, keďže v poslednej zátvorke by sme mali súčet dvoch párnych čísel ($x$ a $z$). A keďže číslo $z$ nemôže byť párne aj nepárne zároveň, vieme, že žiadna taká trojica $x, y, z$ neexistuje.

## 1.2 Krásnu Miluje Süßannku ($\kappa \leq 0$)

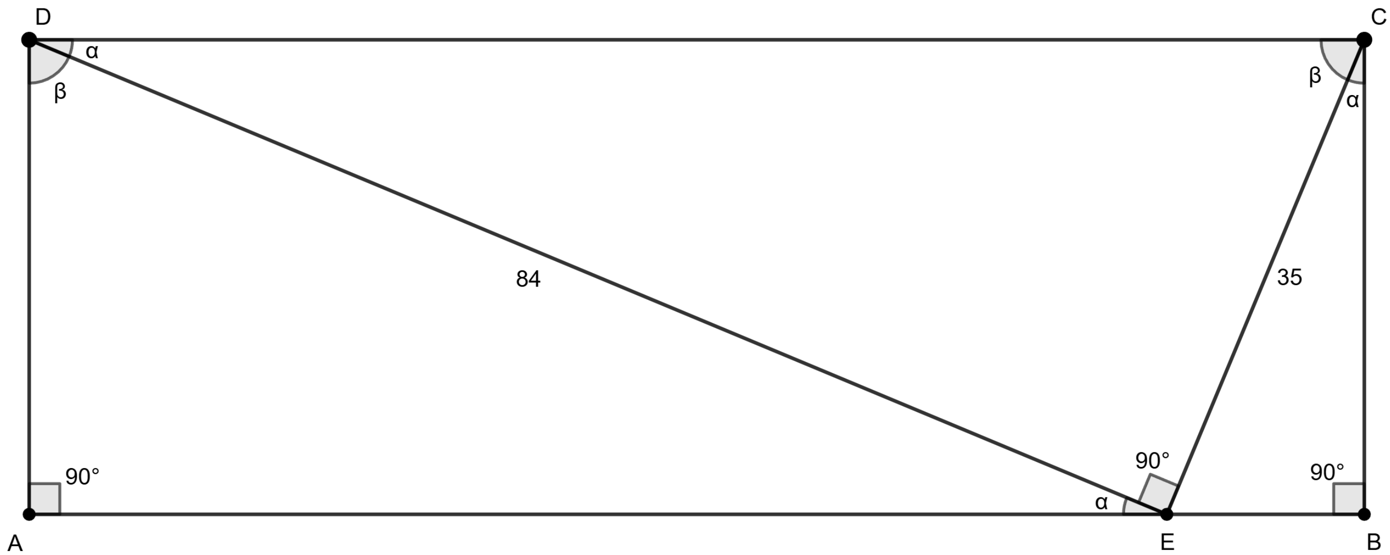
**Zadanie.**

*Matúš Móric Michal František Serafín August nechcel riskovať, že súd nájde čísla, ktoré ho pošlú do väzenia na niekoľko storočí, tak pre istotu ušiel do Poľska – do Popradu. Tam sa zaľúbil do krásnej Süßannky. Zistil, že jej rodina ukrýva poľských odbojárov, tak neváhal a aj on vstúpil do odboja. V skrýši im bolo so Süßannkou spolu príjemne, takže nemohlo nasledovať nič iné ako svadba.*

*Oltár, pred ktorým sa Süßannka s Matúšom Móricom Michalom Františkom Serafínom Augustom brali, mal tvar obdĺžnika $ABCD$. Na jeho strane $AB$ leží bod $E$ tak, že úsečky $EC$ a $ED$ majú postupne dĺžky 35 a 84 palcov a zároveň platí $\sphericalangle ECB + \sphericalangle EDA = 90°$. Určte v palcoch vzdialenosť bodov $A$ a $E$.*

**Riešenie.** opravuje **Maťka** (martina.ganova@trojsten.sk)

Ako prvé si môžeme dopočítať vnútorné uhly trojuholníkov v obdĺžniku $ABCD$. Pre ľahšie vyjadrovanie si uhol $\angle ECB$ nazveme $\alpha$ a uhol $\angle EDA$ nazveme $\beta$. Keďže uhly pri vrchole obdĺžnika sú pravé a zo zadania vieme, že $\alpha + \beta = 90°$, tak si môžeme dopočítať, že uhol $\angle EDC$ má veľkosť $90° - \beta = \alpha$ a uhol $\angle ECD$ má veľkosť $90° - \alpha = \beta$. Keďže v trojuholníku je súčet vnútorných uhlov $180°$, vieme dopočítať z trojuholníku $\triangle ECD$, že uhol $\angle CED$ má veľkosť $180° - \beta - \alpha = 90°$. Taktiež vieme dopočítať z trojuholníku $\triangle AED$, že uhol $\angle AED$ má veľkosť $180° - 90° - \beta = \alpha$. Všetky novo dopočítané uhly si zaznačíme do náčrtu.




Z náčrtu si môžeme všimnúť, že trojuholníky $\triangle ECD$ a $\triangle AED$ sú si podobné podľa vety uu, keďže oba majú rovnaké vnútorné uhly.

Našou úlohou je zistiť dĺžku strany $AE$ v trojuholníku $\triangle AED$, ktorá korešponduje k strane $DE$ v trojuholníku $\triangle ECD$. Dĺžku strany $DE$ už poznáme, teraz musíme zistiť aký pomer majú strany trojuholníkov medzi sebou.

Keďže trojuholník $\triangle ECD$ je pravouhlý, vieme pomocou Pytagorovej vety vypočítať dĺžku jeho prepony $CD$.

$$|CD|^2 = 84^2 + 35^2$$

$$|CD| = \sqrt{84^2 + 35^2}$$

$$|CD| = 91$$

Strana $DE$ v trojuholníku $\triangle AED$ korešponduje k strane $CD$ v trojuholníku $\triangle ECD$. Preto pomer týchto dvoch strán bude rovnaký ako pomer strán $AE$ a $DE$.

$$\frac{|DE|}{|CD|} = \frac{84}{91}$$

$$\frac{|DE|}{|CD|} = \frac{12}{13}$$

$$\frac{|AE|}{|DE|} = \frac{12}{13}$$

$$\frac{|AE|}{84} = \frac{12}{13}$$

$$|AE| = \frac{1008}{13}$$

**Strana $AE$ má teda dĺžku $\frac{1008}{13} \approx 77,54$ palcov.**

## 1.3 Krajinou Mašírujú Spiklenci ($\kappa \leq 1$)

**Zadanie.**

*Účasť v odboji mala však aj svoje tienisté stránky. Matúš Móric Michal František Serafín August to zistil, keď im do skrýše vtrhli Rusi a všetkých zajali. Náhodou to bol aj spôsob, ktorým sa dozvedel, proti komu sa vlastne odboj organizuje. Rusi sa s protivníkmi nemaznali a rozhodli sa ich odlifrovať až na Kamčatku.*

*Cesta na Kamčatku trvala dlho. Cestovali prvý deň, druhý deň, tretí deň... Matúš Móric Michal František Serafín August si každý deň zaznačil, ako ďaleko je od domova. Jeho vzdialenosť od Süßannky v n-tý deň si označil nezáporným reálnym číslom $a_n$. Ako ďaleko bude v 2025-ty deň svojej cesty, pokiaľ platí:*

- $a_4 = 2$,
- $a_{n+1} = \frac{1}{a_0+a_1} + \frac{1}{a_1+a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n+a_{n+1}}$ *pre všetky celé* $0 \leq n \leq 2024$*?*

**Riešenie.** opravuje **Viliam Geffert** (viliam.geffert@trojsten.sk)

Zo zadania vieme, že $a_{n+1} = \frac{1}{a_0+a_1} + ... + \frac{1}{a_{n-1}+a_n} \frac{1}{a_n+a_{n+1}}$. Keďže vieme, že $a_n = \frac{1}{a_0+a_1} + ... + \frac{1}{a_{n-1}+a_n}$, člen $a_{n+1}$ si vieme vyjadriť ako $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n+a_{n+1}}$. To si vieme následne upraviť do tvaru:

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n + a_{n+1}}$$

$$a_{n+1}(a_n + a_{n+1}) = a_n(a_n + a_{n+1}) + 1$$

$$a_{n+1}^2 + a_{n+1}a_n = a_n^2 + a_{n+1}a_n + 1$$

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + 1$$

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 1}$$

Následne si môžeme dopočítať predchádzajúce členy postupnosti $(a_3, ..., a_0)$.

$$a_4 = \sqrt{a_3^2 + 1}$$
$$4 = a_3^2 + 1$$
$$a_3 = \sqrt{3}$$

Podobným spôsobom si vieme dopočítať, že prvý (resp. nultý) člen postupnosti $a_0 = 0$. Z toho vyplýva, že pre každý člen postupnosti platí, že $a_n = \sqrt{n}$.

Člen $a_{2025}$ bude mať hodnotu $\sqrt{2025} = 45$.

## 1.4 Kamčatka Mimoriadne Strašná ($\kappa \leq 2$)

**Zadanie.**

*Nik nemohol tušiť, že odbojári na Kamčatke sa budú nudiť, a tak zorganizujú ďalší odboj. Matúš Móric Michal František Serafín August a jeho kumpáni nahovorili miestny ľud a spolu premohli vojenskú posádku, ktorá ich mala strážiť. Keďže sa báli, že Rusi pošlú posily, rozhodli sa utiecť po mori.*

*Na cestu sa museli náležite pripraviť. Bolo zima, tak na loď naložili $x$ kožušín, $y$ konzerv špenátu a keďže už nevedeli, čo by ešte mohli naložiť, tak si zobrali $p$ ton pravého snehu, kde $x, y$ sú kladné celé čísla a $p$ je prvočíslo. Nájdite všetky trojice $(x, y, p)$, spĺňajúce*

$$y(x^2 + p) - x(y^2 + p) = p.$$

**Riešenie.** opravujú **Denys** (denys.andrukhovskyi@trojsten.sk) a **Baška** (barbora.novosadova@trojsten.sk)

Prvé, čo nám môže napadnúť pri riešení takejto úlohy: treba nejak vhodne prepísať rovnosť, aby sme dostali pekný rozklad na činitele, lebo potom by sme mohli využiť informáciu o tom, že $p$ je prvočíslo.

Skúsime najprv roznásobiť zátvorky, čím dostaneme

$$y(x^2 + p) - x(y^2 + p) = p,$$
$$yx^2 + yp - xy^2 - xp = p.$$

Vidíme, že tento výraz obsahuje podobné členy: $yx^2$ a $xy^2$. Líšia sa práve v tom, že prvý je $xy \cdot x$ a druhý je $xy \cdot y$. Skúsime si to tak aj zapísať, a pritom dať tie členy vedľa seba.

$$xy \cdot x - xy \cdot y + yp - xp = p.$$

Z prvej dvojice členov vieme vytiahnuť pred zátvorku výraz $xy$ a z druhej dvojice číslo $p$:

$$xy(x - y) + (y - x)p = p.$$

Z toho vyplýva, že vskutku vieme dať dokopy aj dva nové členy, pretože $(y - x) = -(x - y)$.

$$xy(x-y) + (y-x)p = p,$$
$$xy(x-y) - (x-y)p = p,$$
$$(xy-p)(x-y) = p.$$

Výborne! Dostali sme práve to, čo chceli. Na ľavej stráne máme *pekný* rozklad na činitele, na pravej strane stále máme $p$, teda prvočíslo.

Takže už vieme, že obidve zátvorky sú delitele prvočísla $p$. Máme teda niekoľko možností:

- $p = p \cdot 1$, a teda $xy - p = p$ a $x - y = 1$. Z prvej rovnice dostávame, že $xy = 2p$. Tu by sa tiež dalo skontrolovať všetky možnosti, pričom vieme, že $x > y$. Takže buď $x = 2p$ a $y = 1$ alebo $x = p$ a $y = 2$ (lebo $p$ je prvočíslo, teda $p \geq 2$, a teda prípad $x = 2$ a $y = p$ nie je možný, ako aj $x = 1$ a $y = 2p$).
  1. Ak $x = 2p$ a $y = 1$, tak z druhej rovnice $x - y = 2p - 1 = 1$, a teda $p = 1$, čo nie je prvočíslo.
  2. Ak $x = p$ a $y = 2$, tak z druhej rovnice opäť vidíme $x - y = p - 2 = 1$, a teda $p = 3$, čo dava nám riešenie $(x, y, p) = (3, 2, 3)$.
- $p = 1 \cdot p$, a teda $xy - p = 1$ a $x - y = p$. Tu už taký trik ako v predchádzajúcom bode uplatniť nevieme (lebo nevieme veľa povedať o deliteľoch čísla $p + 1$). Takže môžeme skúsiť klasický postup: z druhej rovnice vieme vyvodíme, že $y = x - p$. Potom rovnako vieme dosadiť do prvej rovnice:

$$xy - p = 1,$$
$$x(x-p) - p = 1,$$
$$x^2 - px - p - 1 = 0,$$
$$x^2 - px - (p+1) = 0.$$

  Toto je obyčajná kvadratická rovnica, ktorú vieme vyriešiť, napr. pomocou diskriminantu:

$$\mathcal{D} = b^2 - 4ac = (-p)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-(p+1)) = p^2 + 4(p+1) = p^2 + 4p + 4 = p^2 + 2 \cdot 2 \cdot p + 2^2 = (p+2)^2$$

  Potom riešenia sú

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\mathcal{D}}}{2 \cdot a} = \frac{-(-p) \pm (p+2)}{2 \cdot 1} = \frac{p \pm (p+2)}{2},$$

  čiže prvé riešenie bude $x = \frac{2p+2}{2} = p + 1$, a druhé bude $x = \frac{-2}{2} = -1$.

  Číslo $x = -1$ je záporné, takže to nie je riešením úlohy, ale $x = p + 1$ je kladné číslo a riešením je: ak $x = p + 1$, $y = x - p = p + 1 - p = 1$. Takže, naozaj máme, že trojica $(x, y, p) = (p + 1, 1, p)$ je riešením pre ľubovoľné $p$.

  Túto časť sa dalo vyriešiť aj inými spôsobmi. Napr. si všimnúť, že $xy - 1 = p = x - y$, z čoho potom tiež vieme dostať peknú rovnicu. My ale skúsime teraz nahliadnuť ešte jeden spôsob riešenia (aj keď predchádzajúce sú dobré), ktorý nie je úplne štandardný a ešte ho v úlohe využijeme.

Skúsime si prepísať výrazy tak, aby neobsahovali mínusy: $xy = p + 1$ a $x = y + p$. Tu už vieme využiť to, že $x, y \geq 1$ skôr, ako vyriešime rovnicu: ak $y \geq 1$, tak predsa vieme, že $x = y + p \geq p + 1$. Ale teda vidíme, že potom máme $p + 1 = xy \geq (p + 1)y$, čiže $1 \geq y$, odkiaľ $y$ musí byť 1. Odtiaľ už dostaneme, že $x = p + 1$, a keď skontrolujeme, tak to naozaj bude riešenie.

Teraz prichádza veľmi dôležité pozorovanie. Zdalo by sa, že sme skontrolovali všetky možnosti. Veď $p$ je kladné, $x, y$ sú tiež kladné, tak sú len možnosti $p = p \cdot 1$ alebo $p = 1 \cdot p$. To ale nie je dostatočná podmienka. Keďže v činiteľoch máme rozdiely, môže sa stať, že ak $xy$ bude menšie ako $p$ a $x$ bude menšie než $y$, tak potom $xy - p < 0$ a $x - y < 0$. Takže nám treba preskúmať aj ďalšie možnosti.

- $p = (-p) \cdot (-1)$, a teda $xy - p = -p$ a $x - y = -1$. Potom ale hneď z prvej rovnice vidíme, že $xy = 0$, takže $x = 0$ alebo $y = 0$, čo je spor s tým, že $x$ a $y$ sú kladné.
- $p = (-1) \cdot (-p)$, a teda $xy - p = -1$ a $x - y = -p$. Skúsime si spomenúť, ako sme riešili druhý bod. Z druhej rovnice vidíme, že $y = x + p$. Taktiež vieme, že $x \geq 1$. Skúsime ukázať, že riešenia neexistujú tým, že sa pozrieme na nerovnosti

$$y = x + p \Rightarrow y \geq p + 1$$

$$xy \geq x \cdot (p + 1) \geq 1 \cdot (p + 1) = p + 1$$

$$xy - p \geq 1$$

  Ale $xy - p = -1 < 1$, čo je spor, takže aj takýto rozklad nám nedáva riešenia.

Skontrolovali sme všetky možnosti a zistili sme, že riešenia sú trojice $(3, 2, 3)$ a $(p+1, 1, p)$ pre ľubovoľné prvočíslo $p$. Ďalšie riešenia neexistujú.

## 1.5 Ktovieaký Macauský Stopár ($\kappa \leq 6$)

**Zadanie.**

*Po mori sa odboj preplavil až do Macaa. Po ceste zjedli všetky zásoby vrátane kožušín a snehu, no i tak boli vyhladovaní. V Macau teda predali loď, aby sa mali za čo najesť. Matúšovi Móricovi Michalovi Františkovi Serafínovi Augustovi sa už cnelo za domovom, tak sa rozhodol, že si stopne nejakú loď do Európy. Po dvoch dňoch státia s vystrčeným prstom v prístave sa nad ním zľutovala posádka jednej francúzskej lode a vzala ho na cestu do Lorientu.*

*Matúš Móric Michal František Serafín August už bol z toho všetkého cestovania znudený. Našťastie boli na lodi námorníci, nanešťastie sa chceli hrať iba kocky a na tie mu už nezostali peniaze. On si však vystačí aj sám.*

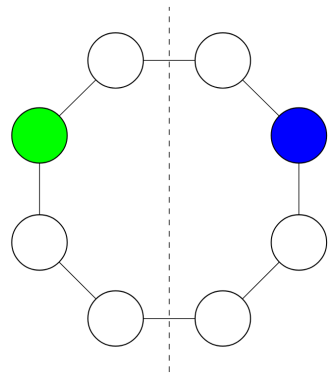
*Hracia plocha je n-uholník. Matúš a Móric sa striedajú v ťahoch, pričom začína Matúš. Vo svojom ťahu zafarbí hráč jeden dosiaľ nezafarbený vrchol namodro alebo nazeleno tak, aby žiadne dva vrcholy rovnakej farby nesusedili. Ak niekto nemá ako spraviť ťah, prehráva. V závislosti na $n \geq 3$ určte, či má víťaznú stratégiu Matúš, alebo Móric, a vysvetlite aká je.*

**Riešenie.** opravujú **Kopy** (martin.kopcany@trojsten.sk) a **Adri** (adrianka.janackova@trojsten.sk)

Spôsobov, ako sa dala riešiť táto úloha je viacero. Ukážeme si dva najčastejšie.

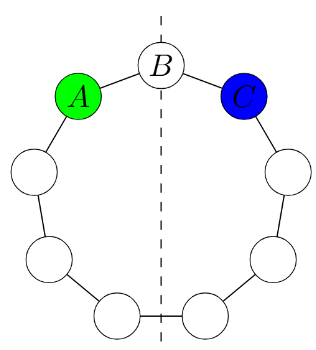
Rozdeľme si úlohu na dve možnosti podľa toho, či $n$ je párne, alebo nepárne.

Ak je $n$ párne, tak si Móric môže nakresliť pomyselnú os symetrie podľa ktorej bude hrať (ako na obrázku).



Ak teraz zahrá niekde Matúš nejaký ťah, tak ho on podľa tejto osi symetrie môže skopírovať s opačnou farbou na druhú stranu.
Nech sme teda v situácií, ktorá je symetrická podľa tejto osi symetrie, len s vymenenými farbami. Potom Matúš zahrá nejaký ťah. Keďže tento ťah bol legálny, tak legálny ťah bude aj zahranie opačnej farby na opačnú stranu. Tým získame opäť symetrickú situáciu. Toto sa stane aj v prípade, že je to vrchné alebo spodné políčko nášho plánika, lebo síce políčku, ktoré chceme ofarbovať, pribudol ofarbený sused, ale keďže chceme ofarbovať opačnou farbou, môžeme to spraviť.
Týmto spôsobom môže Móric vždy zahrať ďalší ťah a teda Matúš musí nutne prehrať.

Nech $n$ je nepárne. Matúš niekde zafarbí prvé políčko. Následne si Móric môže otočiť hrací plán tak, aby toto políčko bolo políčkom $A$ na hracej ploche a spraviť si pomyselnú os symetrie cez políčko $B$ a uplatniť cez túto os symetrie rovnakú stratégiu ako v prvej časti. Začne teda tým, že políčko $C$ zafarbí opačnou farbou, ako Matúš zafarbil políčko $A$.




Keďže políčko $B$ sa už nedá ofarbiť, tak z rovnakého princípu stačí Móricovi „kopírovať“ Matúšove ťahy a má zaručené, že vždy bude môcť zahrať ďalší ťah a vyhrá.
V oboch prípadoch má teda Móric víťaznú stratégiu.

**Iné riešenie.**

Pozrime sa, ako bude vyzerať hracia plocha po skončení hry. Špecificky sa pozrime na to, ako budú vyzerať políčka okolo voľných políčok. Na to, aby sa na takéto voľné políčko už nedal zahrať ťah, potrebujeme, aby okolo neho bolo z jednej strany modré políčko a z druhej zelené, inak by sa naň ešte dal zahrať nejaký ťah.
Vedľa zelených políčok môžu byť len prázdne alebo modré políčka, prípadne ich kombinácia. Podobne pre modré políčka.
Takže keď si odmyslíme všetky prázdne políčka, tak zvyšné políčka, ktoré budú po novom vedľa seba, sa budú striedať: „*modrá, zelená, modrá, zelená...*“.
Keďže tieto políčka idú do kruhu, tak tam musí byť rovnaký počet zelených a modrých políčok, a teda musí byť odohraný párny počet ťahov. Z toho vyplýva, že posledný ťah spravil Móric, lebo Móric robil párne ťahy, a teda už Matúš nemohol ďalší ťah pridať.
Z toho vyplýva, že Móric ani nemusel mať nijakú stratégiu, aby vyhral. Stačilo mu len hrať validné ťahy.

## 1.6 Kuchárske Majstrovstvo Sľubuje

**Zadanie.**

*Keď sa Matúš Móric Michal František Serafín August konečne dostal do Európy, hneď sa ponáhľal za svojou ženou Süßannkou a ich synom. Po jeho príchode dostal správy z Francúzska, kde sa o ňom dopočul tamojší kráľ a mal preňho prácu národného významu. Matúš Móric Michal František Serafín August mal predávať bagety na nejakom ostrove kúsok východne od Afriky. Keď sa to dozvedel, celý natešený sa tam vybral. Na tomto ostrove však domorodí obyvatelia nekonzistentne používali dve meny, ariary a franky.*

*Finančnú bilanciu si Matúš Móric Michal František Serafín August zaznamenával ako dvojicu nenulových celých čísel $(a, f)$. Po roku prezieravého obchodovania jeho bilancia spĺňala*

$$a^{a+f} = f^{24},$$

$$f^{a+f} = a^6.$$

*Určte všetky možné dvojice $(a, f)$.*

**Riešenie.** opravujú **Oski** (oskar.hritz@trojsten.sk) a **Džavo** (adam.džavoronok@trojsten.sk)

Ako to už štandardne býva pri sústave rovníc, má zmysel skúsiť upraviť rovnice tak, aby sme vedeli jednu dosadiť do druhej. Pozorný pozorovateľ[1] môže ľahko spozorovať, že keď umocníme prvú rovnicu na 6 a druhú na $a + f$, tak dostaneme

$$a^{6(a+f)} = f^{144},$$

$$f^{(a+f)(a+f)} = a^{6(a+f)}.$$

Týmto fígľom sme získali schopnosť dosadiť prvú rovnicu do druhej, čím dostávame

$$f^{(a+f)(a+f)} = f^{144}.$$

[1]kratšie aj pozor(ný+ovateľ)

Jedna možnosť je, že sa exponenty rovnajú. Okrem toho si môžeme uvedomiť, že exponenciálna funkcia $c^x$ je pre $c > 1$ rastúca a pre $0 < c < 1$ klesajúca. To znamená, že s rôznymi exponentmi môže v nezáporných číslach nastať rovnosť len pre $f \in \{0, 1\}$, avšak zo zadania vieme, že $f, a$ sú celé nenulové čísla, teda $f = 0$ neprichádza do úvahy. A čo záporné čísla? Pravá strana je zrejme kladná, preto musí byť aj ľavá, a teda $a + f$ je párne. Potom však musí platiť

$$(f^2)^{\frac{1}{2}(a+f)(a+f)} = (f^2)^{72},$$

pričom teraz už základ $f^2$ exponenciálnej funkcie je kladný. Čiže aj v záporných číslach už dostaneme s rôznymi exponentmi navyše iba $f = -1$.

Pozrieme sa najprv na možnosť $f = 1$. Dosaďme do prvej pôvodnej rovnice, čím dostaneme $a^{a+1} = 1$. Táto rovnica má riešenie len $a \in \{1, -1\}$ alebo $a + 1 = 0 \to a = -1$.

Podobne to bude vyzerať pre prípad $f = -1$. Po dosadení do prvej rovnice, dostaneme $a^{a-1} = 1$. Jediné riešenia tejto rovnice sú opäť $a \in \{1, -1\}$ alebo $a - 1 = 0 \to a = 1$.

Nakoniec sa pozrime na prípad $(a + f)^2 = 144$ a $f \notin \{1, -1\}$, odkiaľ hneď môžeme vidieť, že $a + f = \pm 12$. Obe tieto riešenia postupne dosaďme do druhej pôvodnej rovnice.

$$\begin{aligned} f^{12} &= a^6, \\ f^2 &= \pm a. \end{aligned}$$

Dosaďme $a = 12 - f$, čím dostaneme

$$\begin{aligned} f^2 &= 12 - f, & f^2 &= -12 + f, \\ f^2 + f - 12 &= 0, & f^2 - f + 12 &= 0, \\ (f - 3)(f + 4) &= 0, \end{aligned}$$

kde prvá rovnica má dve riešenia v celých číslach 3 a $-4$, ktoré keď dosadíme do rovnice $a = 12 - f$, dostaneme hodnoty $a = 9$ a $a = 16$. Druhá rovnica nemá riešenie v celých číslach.

Nakoniec dosaďme naše druhé riešenie z odstavca vyššie.

$$\begin{aligned} f^{-12} &= a^6, \\ f^{-2} &= \pm a, \\ \frac{1}{f^2} &= \pm a, \\ 1 &= \pm a f^2. \end{aligned}$$

Z poslednej rovnice môžeme vidieť, že tieto rovnice by platili len v prípade, že $f = \pm 1$, keďže $a, f$ sú celé čísla. Teda táto vetva nám nepriniesla žiadne nové riešenia.

Teda sa nám podarilo nájsť všetky usporiadané dvojice $(a, f)$, ktoré spĺňajú vyššie uvedené rovnice, a to $(\pm 1, \pm 1)$, $(9, 3)$ a $(16, -4)$. Nakoniec už len treba vykonať skúšku správnosti a overiť, či všetky naše riešenia spĺňajú zadané rovnice.

$$1^2 = 1^{24} \qquad 1^0 = (-1)^{24} \qquad (-1)^0 = 1^{24}$$
$$1^2 = 1^6 \qquad (-1)^0 = 1^6 \qquad 1^0 = (-1)^6$$
$$(-1)^{-2} = (-1)^{24} \qquad 9^{12} = 3^{24} \qquad 16^{12} = (-4)^{24}$$
$$(-1)^{-2} = (-1)^6 \qquad 3^{12} = 9^6 \qquad (-4)^{12} = 16^6$$

Môžeme vidieť, že všetkých šesť usporiadaných dvojíc je riešením sústavy.

## 1.7 Kráľovskú Moc Skúša

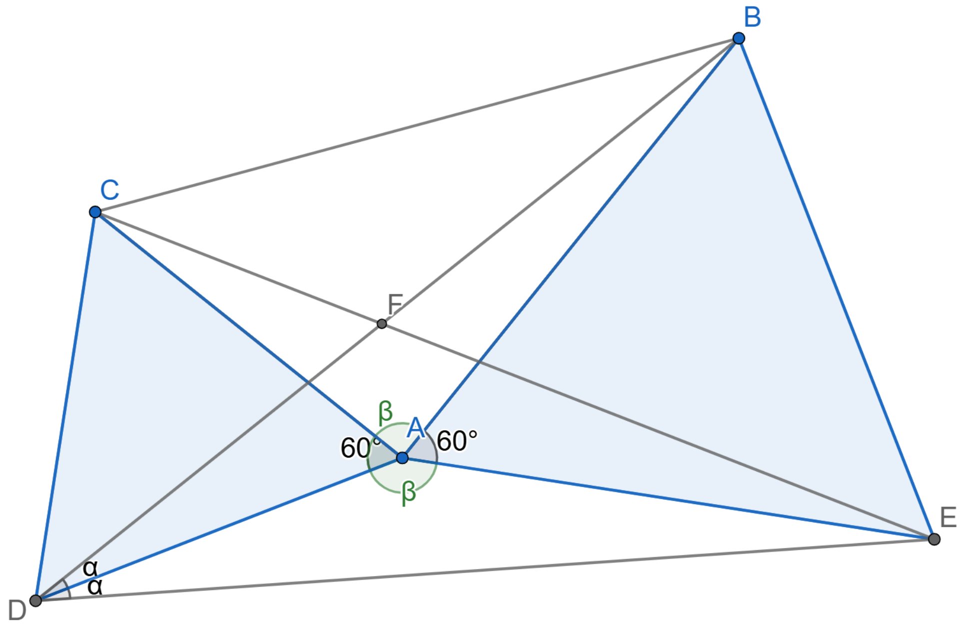
**Zadanie.**

*Na východ od Afriky je mnoho ostrovov, no Matúš Móric Michal František Serafín August mal svoj stánok na tom najväčšom. Preto ho už po prvom roku povýšili na hlavného distribútora pre všetky bagetérie v okolí. Matúš Móric Michal František Serafín August povzbudený týmto povýšením sa rozhodol povýšiť ešte viac a prehlásil sa za kráľa celého ostrova. To sa nepáčilo právoplatnému kráľovi Julienovi, ktorý sa rozhodol zorganizovať domorodý odboj proti hnusným francúzskym kolonizátorom.*

*Keď už je Matúš Móric Michal František Serafín August kráľom, tak potrebuje korunu a žezlo. Žeziel má dostatok a v prípade hladu si z nich môže aj odkusnúť. Koruna mu však zatiaľ chýba, tak si ju musí upiecť. Jeho plech má tvar trojuholníka ABC. Na stranách AB a AC boli smerom von zostrojené rovnostranné trojuholníky ABE a ACD. Úsečky CE a BD sa pretínajú v bode F. Ukázalo sa, že bod A je stred kružnice vpísanej trojuholníku DEF. Nájdite uhol BAC.*

**Riešenie.** opravujú **Mati** (matus.zelko@trojsten.sk) a **Mimi** (matej.hanus@trojsten.sk)

Buď platí $|AC| \leq |AB|$, alebo naopak. Argument je pre oba prípady rovnaký, budeme predpokladať, že $|AC| \leq |AB|$. Bod $A$ je stredom kružnice vpísanej trojuholníku $DEF$, preto leží na osi uhla $EDB$. Takže $|\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle ADB|$. Potom trojuholníky $ADE$ a $ADB$ sú zhodné podľa vety Ssu. Zdieľajú stranu $AD$ a trojuholník $AEB$ je rovnostranný, vďaka tomu aj $|AE| = |AB|$. Nakoniec aby sme mohli použiť vetu Ssu, tak si musíme uvedomiť (na čo mnohí zabudli), že $|AB| \geq |AC| = |AD|$. To však našťastie máme z predpokladu.




Už len jednoduchý výpočet. Okolo bodu $A$ je súčet uhlov $360° = 60° + |\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle EAD|$, avšak $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle EAD|$. Po úprave dostávame, že $|\sphericalangle BAD| = 150°$, a teda $|\sphericalangle CAB| = 150° - 60° = 90°$.

## 1.8 Kokosy Môže Strieľať

**Zadanie.**

*Odboj prerástol do otvorenej vojny. Matúš Móric Michal František Serafín August sa bál čo i len vykročiť z domu, domorodci totiž zasypávali okupovateľov salvami kokosov. Francúzskeho kráľa o pomoc požiadať nemohol, sotva by mu túto trápnu situáciu dokázal vysvetliť. Musel sa teda spoliehať len na tých, ktorí s ním boli na ostrove. Ich výskumné oddelenie však nezaháľalo a pripravilo nový recept na bagety, ktoré sa dali použiť na odrážanie nepriateľského bombardovania.*

*Odpaľovanie kokosov Matúša Mórica Michala Františka Serafína Augusta bavilo natoľko, že si začal písať štatistiky, kam až sa mu kokos podarilo odpáliť. Nech $a$ je kladné celé číslo reprezentujúce, o koľký odpal išlo, a nezáporné celé číslo $x$ je vzdialenosť, do ktorej kokos odpálil. Platí, že*

$$\frac{1}{2}\left((2^a - 1)^2 + 1\right) = x.$$

*Nájdite všetky čísla $a$ také, že vzdialenosť $x$ je druhou mocninou celého čísla.*

**Riešenie.** opravuje **Mišo M.** (michal.molnar@trojsten.sk)

Začnime tým, že si vyjadríme $x = y^2$ pre nejaké nezáporné číslo $y$, takže nám stačí určiť, pre ktoré $a$ je $y$ celé číslo. Upravme si teda výraz zo zadania ako

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{1}{2}\left((2^a-1)^2+1\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(2^{2a}-2\cdot 2^a+1+1\right) \\ &= 2^{2a-1}-2^a+1, \\ y^2-1 &= 2^a\cdot\left(2^{a-1}-1\right). \end{aligned}$$

Vyšetrime najprv prípad $a = 1$. Vtedy sa rovnica zjednoduší na $y^2 - 1 = 0$, takže pre $a = 1$ je $y = 1$ celé číslo.

Pre $a > 1$ je číslo $2^{a-1}$ párne, takže $2^{a-1} - 1$ bude nepárne. Všetky dvojky z prvočíselného rozkladu pravej strany sa teda nachádzajú v $2^a$. Upravme si ešte ľavú stranu na súčin, čím dostaneme

$$(y-1)\cdot(y+1) = 2^a\cdot\left(2^{a-1}-1\right).$$

Našou úlohou teraz bude rozdeliť prvočísla z výrazu napravo medzi zátvorky naľavo. Začneme dvojkami z $2^a$.

Čísla $y-1$ a $y+1$ majú zjavne rovnakú paritu. Ak by boli obe nepárne výraz napravo by bol tiež nepárny, čo neplatí, takže $y - 1$ aj $y + 1$ sú dve párne čísla. Ďalšia vec, na ktorú sa pozrieme je zvyšok po delení 4. Ak je $y - 1$ násobok 4, tak $y + 1$ dáva zvyšok 2 po delení štyrmi. Naopak, ak má $y - 1$ zvyšok 2 po delení štyrmi, $y + 1$ je násobok 4.

Je teda jasné, že jedno z čísel $y - 1$ a $y + 1$ bude mať v prvočíselnom rozklade práve jednu 2, kým to druhé bude obsahovať zvyšných $a - 1$. Zároveň sme však zistili, že aspoň jedno z čísel je deliteľné 4, takže aspoň jedno z nich bude mať v rozklade dvojky aspoň dve. Nutne teda $a - 1 \geq 2$, čiže $a \geq 3$.

Aby sme zistili, ako môžu vyzerať čísla $y - 1$ a $y + 1$, zostáva nám rozdeliť medzi ne ešte prvočísla z rozkladu $(2^{a-1} - 1)$. To je nepárne číslo, takže je deliteľné len nepárnymi prvočíslami, ktoré sú všetky väčšie ako 2. My chceme tieto prvočísla prideliť buď k 2 alebo k $2^{a-1}$ tak, aby sme dostali čísla $y-1$ a $y+1$, teda dve čísla s rozdielom 2. Ako to teda spraviť?

Začnime tým, že všetky prvočísla pridelíme k číslu 2. Dostaneme tak čísla $2^{a-1}$ a $2^a - 2 = 2(2^{a-1} - 1)$. Všimnime si, že pre $a > 2$ platí $2^a - 2 > 2^{a-1}$. Aby sme dostali $y - 1$ a $y + 1$, musí nutne platiť

$$\begin{aligned} y+1 &= 2^a-2, \\ y-1 &= 2^{a-1}, \\ (y+1)-(y-1) = 2 &= \left(2^a-2\right)-2^{a-1}, \\ 2 &= 2^a-2^{a-1}-2, \\ 4 &= 2^a-2^{a-1}, \\ 4 &= 2^{a-1}, \end{aligned}$$

odkiaľ už ľahko vidíme, že $a - 1 = 2$ a teda $a = 3$. V takom prípade je $y = 2^3 - 2 - 1 = 5$ celé číslo.

Druhá možnosť, ako rozdeliť prvočísla je taká, že nejakú časť z nich priradíme k číslu $2^{a-1}$. Dostaneme tak čísla $2^{a-1}m$ a $\frac{2^a-2}{m}$, kde $m$ je práve súčin všetkých prvočísel, ktoré sme dodali k číslu $2^{a-1}$. Nás však zaujímajú už len prípady, kedy sme priradili aspoň jedno prvočíslo, a zároveň vieme, že sa jedná o prvočísla väčšie ako 2. Platí teda $m > 2$, takže môžeme odhadnúť

$$2^{a-1}m > 2^a > \frac{2^a-2}{m}.$$

Náš odhad však vieme ešte spresniť. Keď už vieme, že $y+1 = 2^{a-1}m$ (keďže toto je to väčšie číslo), vieme odhadnúť

$$y-1 = 2^{a-1}m - 2 > 2^a - 2 > \frac{2^a-2}{m} = y-1.$$

Je jasné, že $y-1 > y-1$ nemôže nastať pre nijaké $y$, takže v tomto prípade hľadané celé číslo $y$ neexistuje.

Jediné vhodné $a$ sú teda $a = 1$ a $a = 3$.

## 1.9 Kamene Miesto Stravy

**Zadanie.**

*Matúš Móric Michal František Serafín August síce zvládol utajiť, čo sa uňho na ostrove deje, no predavači z okolitých ostrovov si všimli, že nové bagety sú viac uspôsobené na odpaľovanie kokosov ako na jedenie, a začali sa sťažovať. Keďže k náprave nedošlo, musela na ostrov prísť Obchodná inšpekcia, aby skontrolovala, čo vlastne Matúš Móric Michal František Serafín August porába.*

*Inšpekcia si do políčok štvorca $n \times n$ zapisuje čísla od 1 do $n^2$, každé práve raz. Pre každú dvojicu čísel v rovnakom stĺpci alebo riadku potom spočíta podiel väčšieho k menšiemu.* Charakteristika *rozmiestnenia čísel je najmenší z týchto $n^2(n-1)$ podielov. Na to, aby inšpekcia došla k nejakému záveru, musí zistiť, akú najväčšiu hodnotu môže charakteristika nadobudnúť. Pomôžte to inšpekcii zistiť.*

**Riešenie.** opravuje **Michal Staník** (michal.stanik@trojsten.sk)

Uvážme čísla $n^2-n, n^2-n+1, \ldots n^2-1, n^2$. Z Dirichletovho princípu vždy nejaké dve z nich musia skončiť v tom istom riadku a tiež nejaké dve musia skončiť v tom istom stĺpci. Tieto dve dvojice čísel navyše nemôžu byť úplne rovnaké (môžu zdieľať iba jeden prvok).

Preto sa isto objaví podiel, ktorý je najviac $\frac{n^2}{n^2-n}$ a tiež podiel druhej dvojice, ktorý je najviac

$$\max\left(\frac{n^2}{n^2-n+1}, \frac{n^2-1}{n^2-n}\right) = \frac{n^2-1}{n^2-n} = \frac{(n-1)(n+1)}{n(n-1)} = 1 + \frac{1}{n}.$$

Ukážeme, že toto je maximálna možná charakteristika a teda, že vieme zabezpečiť, aby všetky podiely boli aspoň $1+\frac{1}{n}$.

Čísla rozmiestnime po jednotlivých uhlopriečkach. Začneme 1 až $n$ na hlavnej diagonále. Pokračujeme $n+1$ až $2n$ na diagonále pod ňou, pričom diagonály berieme cyklicky, teda prechádzame cez hranice tabuľky. Takto má každá diagonála práve $n$ políčok. Pre $n = 6$ by tabuľka vyzerala takto.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 32 | 27 | 22 | 17 | 12 |
| 7 | 2 | 33 | 28 | 23 | 18 |
| 13 | 8 | 3 | 34 | 29 | 24 |
| 19 | 14 | 9 | 4 | 35 | 30 |
| 25 | 20 | 15 | 10 | 5 | 36 |
| 31 | 26 | 21 | 16 | 11 | 6 |

Aby sa nám ľahšie pracovalo, chceli by sme si nájsť explicitné vyjadrenie prvku na pozícii $(i,j)$. Všimnime si, že vo zvislom smere stúpajú čísla vždy o 6 a vo vodorovnom klesajú o 5 (všeobecne zvislo stúpajú o $n$ a vodorovne klesajú o $n-1$), preto na pozícii $(i,j)$ je číslo $(ni-(n-1)j) \pmod{n^2}$ indexujúc od 1. Jediná výnimka zo striktného modulovania vo vyjadrení je, že namiesto čísla 0 máme $n^2$.

Potrebujeme dokázať tri veci (pre všetky $n$): že každé číslo je použité práve raz, že všetky pomery v riadkoch sú aspoň $1 + \frac{1}{n}$ a to isté o pomeroch v stĺpcoch.

Predpokladajme pre spor, že nejaké dve čísla na pozíciách $(i,j)$ a $(k,l)$ sú rovnaké:

$$ni - (n-1)j \equiv nk - (n-1)l \pmod{n^2},$$

$$n(i-k) \equiv (n-1)(j-l) \pmod{n^2}.$$

Z toho $n \mid (n-1)(j-l)$ a keďže čísla $n$ a $n-1$ sú nesúdeliteľné, nutne $n \mid j-l$. Avšak $j$ a $l$ sú indexy stĺpcov z rozsahu 1 až $n$, a teda ich rozdiel je deliteľný $n$ len pre $j = l$. Máme teda $n(i-k) \equiv 0 \pmod{n^2}$, čo podobne dáva $n \mid i-k$, a teda aj $i = k$. Ide teda o to isté číslo na tej istej pozícii. Žiadne číslo nie je v tabuľke dvakrát. Čísel je toľko, koľko políčok ($n^2$), takže sa každé v tabuľke musí vyskytovať.

Najmenší pomer v rámci riadku/stĺpca budú mať vždy čísla, ktoré sú v rámci neho po sebe idúce podľa veľkosti. Čísla v rámci riadku sa líšia vždy aspoň o $n-1$: keď si ich usporiadame podľa veľkosti, susedné čísla majú rozdiel $n-1$, keď sú vedľa seba v tabuľke, a $2n-1$, keď jedno je na začiatku a druhé na konci riadku.

Pri fixnom rozdieli je najmenší pomer pri najvyšších číslach, takže tento pomer bude aspoň $\frac{n^2}{n^2-n+1}$. Tento konkrétny sa však nevyskytne, pretože čísla $n^2-n+1$ až $n^2$ sú na diagonále, a teda sa spolu nepomerujú. Preto pomer v riadku bude vždy aspoň $\frac{n^2-1}{n^2-n} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$. V rámci stĺpca sa čísla vždy líšia aspoň o $n$, takže podobne ich pomer bude aspoň $\frac{n^2}{n^2-n} = \frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1} > 1 + \frac{1}{n}$.

Najväčšia možná charakteristika je $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$.

## 1.10 Kopec Memoárov Spisuje

### Zadanie.

*Keď si Matúš Móric Michal František Serafín August uvedomil, že mu okrem problémov domorodcov môžu hroziť problémy aj od francúzskeho kráľa, rozhodol sa nečakať na závery vyšetrovania Obchodnej inšpekcie a nenápadne aj s rodinou zdúchol z ostrova. Doplavili sa až do Anglicka. Aby mali z čoho žiť, rozhodol sa predať práva na svoj životopis s výstižným názvom „Pamäti a cesty“. Vo svojich memoároch toho Matúš Móric Michal František Serafín August popísal veľa. Dokonca toho popísal aspoň toľko, koľko zažil, a pravdepodobne výrazne viac.*

*Dokážte, že keď $k > 1$ je reálne číslo, $n \geq 3$ je celé číslo a $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$ sú kladné reálne čísla, tak*

$$\frac{x_1 + kx_2}{x_2 + x_3} + \frac{x_2 + kx_3}{x_3 + x_4} + \cdots + \frac{x_n + kx_1}{x_1 + x_2} \geq \frac{n(k+1)}{2}.$$

**Riešenie.** opravuje **Lukáš** (lukas.gaborik@trojsten.sk)

Začnime pozorovaním, že parameter $k$ je v zadanej nerovnosti akýsi neprirodzený, spôsobuje, že výraz na ľavej strane nie je symetrický. Radi by sme sa ho teda nejakým spôsobom zbavili. Môžeme si všimnúť, že ak $k = 1$, tak tento problém už nenastáva, výraz na ľavej strane je symetrický. Ba čo viac, menovateľ a čitateľ dvoch po sebe idúcich zlomkov sa zhodujú. Pokiaľ ste už nejaké úlohy s nerovnosťami riešili, toto by vám malo udrieť do oka, pretože pokiaľ by sme súčet zmenili na súčin, tieto menovatele a čitatele sa pekne navzájom vykrátia. Nuž a nerovnosť medzi akýmsi súčtom a akýmsi súčinom už nie je nič iné ako nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom. Z nej ľahko dostaneme, že

$$\frac{x_1 + x_2}{x_2 + x_3} + \frac{x_2 + x_3}{x_3 + x_4} + \cdots + \frac{x_n + x_1}{x_1 + x_2} \overset{\text{AG}}{\geq} n\sqrt[n]{\frac{x_1 + x_2}{x_2 + x_3} \cdot \frac{x_2 + x_3}{x_3 + x_4} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n + x_1}{x_1 + x_2}} = n. \tag{10.1}$$

A teraz prichádza otázka, ako a prečo by nám toto malo pomôcť s inými hodnotami $k$. Uvedomme si však, že my vieme každý zlomok rozbiť na dva, tak aby jeden z týchto zlomkov bol člen z nerovnosti (10.1), konkrétne

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{x_2 + x_3} + \frac{(k-1)x_2}{x_2 + x_3}\right) + \left(\frac{x_2 + x_3}{x_3 + x_4} + \frac{(k-1)x_3}{x_3 + x_4}\right) + \cdots + \left(\frac{x_n + x_1}{x_1 + x_2} + \frac{(k-1)x_1}{x_1 + x_2}\right) \overset{?}{\geq} n + \frac{n(k-1)}{2},$$

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{x_2 + x_3} + \frac{x_2 + x_3}{x_3 + x_4} + \cdots + \frac{x_n + x_1}{x_1 + x_2}\right) + (k-1)\left(\frac{x_2}{x_2 + x_3} + \frac{x_3}{x_3 + x_4} + \cdots + \frac{x_1}{x_1 + x_2}\right) \overset{?}{\geq} n + (k-1)\frac{n}{2}.$$

Nahliadnime, že ak sa nám podarí dokázať nerovnosť

$$\frac{x_1}{x_1 + x_2} + \frac{x_2}{x_2 + x_3} + \cdots + \frac{x_n}{x_n + x_1} \overset{?}{\geq} \frac{n}{2}, \tag{10.2}$$

tak sme hotoví, lebo sčítaním (10.1) a $(k-1)$-násobku (10.2) dostaneme zrovna požadovanú nerovnosť. Tým sme sa zbavili parametra $k$ a môžeme sa vrhnúť do dokazovania.

Nerovnosť (10.2) dokážeme matematickou indukciou. Začnime bázou pre $n = 3$. Chceme teda dokázať

$$\frac{x_1}{x_1 + x_2} + \frac{x_2}{x_2 + x_3} + \frac{x_3}{x_3 + x_1} \overset{?}{\geq} \frac{3}{2},$$

$$2x_1(x_2 + x_3)(x_3 + x_1) + 2x_2(x_1 + x_2)(x_3 + x_1) + 2x_3(x_1 + x_2)(x_2 + x_3) \overset{?}{\geq} 3(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_1).$$

Všimnime si, že dokazovaná nerovnosť je cyklická (ak všetkým $x$ zvýšime index o 1, vzhľad nerovnosti sa nezmení), čo znamená, že po roznásobení budú mať cyklické výrazy rovnaké koeficienty. Preto zaveďme značenie $\sum_{\text{cyc}} f(x_1, x_2, x_3) := f(x_1, x_2, x_3) + f(x_2, x_3, x_1) + f(x_3, x_1, x_2)$. Napríklad teda $\sum_{\text{cyc}} x_1^2 x_2 := x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1$. Potom roznásobením dostaneme

$$2x_1(x_2+x_3)(x_3+x_1)+2x_2(x_1+x_2)(x_3+x_1)+2x_3(x_1+x_2)(x_2+x_3) \overset{?}{\geq} 3(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1),$$

$$4\sum_{\text{cyc}} x_1^2x_2+2\sum_{\text{cyc}} x_1x_2^2+6x_1x_2x_3 \overset{?}{\geq} 3\sum_{\text{cyc}} x_1^2x_2+3\sum_{\text{cyc}} x_1x_2^2+6x_1x_2x_3,$$

$$\sum_{\text{cyc}} x_1^2x_2-\sum_{\text{cyc}} x_1x_2^2 \overset{?}{\geq} 0.$$

Ak teraz tieto členy vhodne preusporiadame, dostaneme dvojice, kde po vyňatí spoločného násobku zostane člen deliteľný $x_2 - x_3$. Následne

$$(x_1^2x_2-x_3x_1^2)+(x_2^2x_3-x_2x_3^2)-(x_1x_2^2-x_3^2x_1) \overset{?}{\geq} 0,$$

$$x_1^2(x_2-x_3)+x_2x_3(x_2-x_3)-x_1(x_2+x_3)(x_2-x_3) \overset{?}{\geq} 0,$$

$$(x_1^2-x_1x_2-x_1x_3+x_2x_3)(x_2-x_3) \overset{?}{\geq} 0,$$

$$(x_1(x_1-x_2)-x_3(x_1-x_2))(x_2-x_3) \overset{?}{\geq} 0,$$

$$(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_1-x_3) \geq 0.$$

Nuž a to, že platí posledná nerovnosť, je už zrejmé z podmienky na usporiadanie hodnôt $x$.

Máme teda nerovnosť dokázanú pre nejakú základnú hodnotu, prejdime preto na indukčný krok. Predpokladajme, že pre ľubovoľnú $n$-ticu $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$ kladných reálnych čísel, pričom $n \leq m$, už nerovnosť platí. Teraz chceme ukázať, že platí aj pre ľubovoľnú $(m+1)$-ticu $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_{m+1}$.

Všimnime si, že nerovnosť pre $m$-ticu $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_m$ sa od dokazovanej nerovnosti vo veľa členoch nelíši, totiž

$$\frac{x_1}{x_1+x_2}+\cdots+\frac{x_{m-1}}{x_{m-1}+x_m}+\frac{x_m}{x_m+x_1} \geq \frac{m}{2},$$

$$\frac{x_1}{x_1+x_2}+\cdots+\frac{x_{m-1}}{x_{m-1}+x_m}+\frac{x_m}{x_m+x_{m+1}}+\frac{x_{m+1}}{x_{m+1}+x_1} \overset{?}{\geq} \frac{m+1}{2}.$$

Jediná trojica hodnôt $x$, pre ktoré sa výrazy v týchto nerovnostiach nezhodujú, sú $x_1, x_m, x_{m+1}$. Pre ne však vďaka tomu, že $x_1 \geq x_m \geq x_{m+1}$, platí

$$\frac{x_1}{x_1+x_m}+\frac{x_m}{x_m+x_{m+1}}+\frac{x_{m+1}}{x_{m+1}+x_1} \geq \frac{3}{2}.$$

Čo sa však stane, keď sčítame túto nerovnosť s nerovnosťou pre $m$-ticu? Nuž,

$$\begin{aligned}\left(\frac{x_1}{x_1+x_2}+\cdots+\frac{x_{m-1}}{x_{m-1}+x_m}+\frac{x_m}{x_m+x_1}\right)+\left(\frac{x_1}{x_1+x_m}+\frac{x_m}{x_m+x_{m+1}}+\frac{x_{m+1}}{x_{m+1}+x_1}\right)&\geq\frac{m+3}{2},\\ \frac{x_1}{x_1+x_2}+\cdots+\frac{x_{m-1}}{x_{m-1}+x_m}+\left(\frac{x_m}{x_m+x_1}+\frac{x_1}{x_1+x_m}\right)+\frac{x_m}{x_m+x_{m+1}}+\frac{x_{m+1}}{x_{m+1}+x_1}&\geq\frac{m+3}{2},\\ \frac{x_1}{x_1+x_2}+\cdots+\frac{x_{m-1}}{x_{m-1}+x_m}+\frac{x_m}{x_m+x_{m+1}}+\frac{x_{m+1}}{x_{m+1}+x_1}&\geq\frac{m+3}{2}-1=\frac{m+1}{2},\end{aligned}$$

čo sme chceli dokázať.