



Riešenia 2. kola letnej časti

2.1 Každý Mimomartánský Spis ($\kappa \leq 0$)

Zadanie.

Nadnárodný Inštitút Vesmírnych Aktivít Mimomartánských¹ je prísne tajná nadnárodná organizácia, ktorá monitoruje Mars a jeho slnečnú sústavu, aby zachytila akékoľvek dôkazy o existencii mimomartánskeho života.

Za svoju existenciu zaznamenala množstvo incidentov, každý vo vlastnom prísne tajnom spise. Spisy sú zoradené podľa svojich identifikačných čísel 1000, 1001, 1002, ..., 2000. Koľko je medzi nimi dvojíc po sebe idúcich spisov takých, že pri súčte identifikačných čísel tejto dvojice nedôjde k prechodu cez desiatku (na žiadnom mieste)?

Riešenie.

opravuje **Kubko Poljovka** (jakub.poljovka@trojsten.sk)

Zamyslime sa najprv, kedy v spisoch nedochádza k prechodu cez desiatku na mieste jednotiek. Je to vtedy, keď menšie z čísel končí cifrou 0, 1, 2, 3, 4 alebo 9.

Na mieste desiatok nedochádza k prechodu, keď menšie z čísel má na mieste desiatok cifru 0, 1, 2, 3, 4 a ešte v špecifickom prípade, keď dané číslo končí na 99.

Na mieste stoviek nedochádza k prechodu, keď menšie z čísel má na mieste stoviek cifru 0, 1, 2, 3, 4 a ešte v špecifickom prípade, keď dané číslo končí na 999 (teda ide o číslo 1999).

Koľko je teda všetkých možností? Pozrime sa najprv na tie nešpecifické. Nešpecifické číslo má šesť možností na poslednú cifru (0, 1, 2, 3, 4, 9), pre každú z nich päť možností na cifru na mieste desiatok (0, 1, 2, 3, 4) a pre každú z nich ešte ďalších 5 možností na cifru na mieste stoviek (0, 1, 2, 3, 4). To činí celkovo $6 \cdot 5 \cdot 5 = 150$ možností.

No a koľko je tých špecifických možností? Tých je iba 6, konkrétne 1099, 1199, 1299, 1399, 1499, 1999.

Počet dvojíc za sebou idúcich spisov, pri súčte ktorých nedochádza k prechodu cez desiatku na žiadnom mieste, je $150 + 6 = 156$.

2.2 Kozmickú Misiu Spúšťame ($\kappa \leq 0$)

Zadanie.

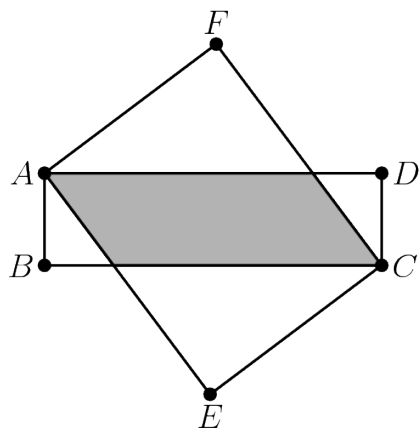
Medzitým na Zemi (na ktorej nemohol jestvovať život, veď obsahuje také toxické látky ako dihydrogén monoxid a dusík (od slova dusiť!!)) si ľudstvo všimlo, že na Marse sa dejú zvláštne veci. Rozhodli sa teda vyslať na Mars dvoch najschopnejších astronautov v slnečnej sústave: Patricka Matthews a Matthewa Patricka. Tí hneď po prilete k Marsu vytiahli vesmírnu lupu a zamerali ju do poľa, aby ho bližšie preskúmali. Sila slnečných lúčov koncentrovaných lupou však bola na pole priveľa a vypálila v ňom tmavý flak. To vnuklo astronautovi Matthewsovi senzačný nápad, s ktorým sa hneď musel podeliť.

¹Nemýliť si s Nadnárodným Inštitútom Vesmírnych Aktivít Martánských

„Počuj, Matt, čo keby sme niečo do toho poľa nakreslili?“

„A čo také?“ pýtal sa jeho kolega, astronaut Patricks. Matthews stíšil hlas a začal šepkať kolegovi do ucha. Po chvíli sa obaja začali hihňať.

A tak kreslili. Začali obdĺžnikom $ABCD$ so stranami $|AB| = 3 \text{ km}$ a $|BC| = 11 \text{ km}$. Pokračovali obdĺžnikom $AECF$ so stranami $|AF| = 7 \text{ km}$ a $|FC| = 9 \text{ km}$. Nakoniec ešte uprostred vypálili sivú plochu ako na obrázku. Určte jej obsah.



Riešenie.

opravuje Skaloš (jakub.skalos@trojsten.sk)

K tejto úlohe sa dalo pristupovať rozličnými spôsobmi. Najpriamočiarejším bolo označiť si strany kosodĺžnika ako x, y a vyjadriť si z toho všetky dĺžky v obrázku. Potom vieme z Pytagorovej vety pre malý aj veľký biely trojuholník dostať dve rovnice o dvoch neznámych, z čoho sa už dá cez riešenie kvadratickej rovnice pomerne ľahko dostať k hodnotám x, y a z nich už nie je problém vypočítať obsah kosodĺžnika.

My si však ukážeme iný postup, ktorý je trochu trikovejší a elegantnejší. Hľadáme obsah sivého kosodĺžnika, označme si ho teda ako našu neznámu S . Ďalej si priesečník AE a BC označme ako X . Všimnime si, že $\triangle ABX$ a $\triangle CEX$ sú podobné. Vyplýva to z vety uu , pretože uhol pri X zdieľajú ako vrcholový a $\sphericalangle ABX, \sphericalangle CEX$ sú oba pravé. Ich koeficient podobnosti je $|AB|/|CE| = |BX|/|EX| = 3/7$. V úlohe však nechceme až tak pracovať s dĺžkami, keďže nás zaujíma obsah, preto by nás zaujímalo, aký je pomer $S_{\triangle ABX}/S_{\triangle CEX}$. Ten vieme určiť ako

$$\frac{S_{\triangle ABX}}{S_{\triangle CEX}} = \frac{\frac{1}{2}|AB||BX|}{\frac{1}{2}|CE||EX|} = \left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{9}{49}.$$

Vieme však obsahy trojuholníkov ABX a CEX vyjadriť s využitím S ? Áno, pretože plocha, ktorá z niektorého z obdĺžnikov zostane, keď odrátame sivý kosoštvorec, je dvojnásobkom obsahu príslušného trojuholníka. To znamená,

že $S_{\triangle ABX} = \frac{1}{2} (3 \cdot 11 - S)$ a $S_{\triangle CEX} = \frac{1}{2} (7 \cdot 9 - S)$. Keď toto dosadíme do vyššie uvedenej rovnice, dostaneme

$$\frac{\frac{1}{2} (3 \cdot 11 - S)}{\frac{1}{2} (7 \cdot 9 - S)} = \frac{9}{49},$$

$$49 \cdot 3 \cdot 11 - 49S = 9 \cdot 7 \cdot 9 - 9S,$$

$$3 \cdot 7 \cdot (7 \cdot 11 - 3 \cdot 9) = 40S,$$

$$S = \frac{3 \cdot 7 \cdot 50}{40} = \frac{105}{4}.$$

Dostali sme tak hľadaný obsah, ktorý je 26.25 KiloMetrov Štvorcových.

2.3 Kukaj! Mimoszemský Staviteľia! ($\kappa \leq 1$)

Zadanie.

Po úspešnom kreslení sa Matthews a Patricks presunuli nad neďalekú púšť, kde učinili najväčší objav celej histórie. Našli mimozemský život. Domorodci sa plahočili po púšti a stavali nejakú monumentálnu stavbu, akiste hrobku pre vládcu ich primitívnej spoločnosti. Astronauti pristáli, aby sa pozreli zbližša. Pri pohľade z povrchu však niečo nebolo v poriadku – takto predsa pyramídy nevyzerajú!

Astronauti Matthews a Patricks sa rozhodli, že domorodcom pomôžu. Vtrhli medzi nich a začali ukazovať, čo majú ako robiť, aby pyramída vyzerala ako pyramída. V prvom rade je nutné mať vhodný parameter pyramídovosti p , ktorý je reálne číslo. Pre súradnice $[x, y, z]$ špičky pyramídy (tri reálne čísla) musí potom platiť

$$px + y + z = 1,$$

$$x + py + z = p,$$

$$x + y + z = p^2.$$

Vzhľadom na reálne číslo p vypočítajte vhodné súradnice $[x, y, z]$.

Riešenie.

opravujú **Adri** (adrianka.janackova@trojsten.sk) a **Filip** (filip.kotoc@trojsten.sk)

$$px + y + z = 1, \tag{3.1}$$

$$x + py + z = p, \tag{3.2}$$

$$x + y + z = p^2. \tag{3.3}$$

Najskôr si musíme uvedomiť, že súradnice x, y, z , ktoré chceme vypočítať, závisia od toho, akú hodnotu bude mať p , preto s ním musíme počítať ako s parametrom a teda na neho nahliadať ako na konštantu a nie ako premennú.

Máme teda 3 rovnice s 3 neznámymi (x, y, z) . Ako prvé si vyjadrime premennú z z tretej rovnice:

$$z = p^2 - x - y$$

Teraz dosadíme tento výsledok do prvej a druhej rovnice a upravíme ich:

$$px + y + z = 1 \quad (3.4)$$

$$px + y + p^2 - x - y = 1$$

$$p^2 + px - x + y - y = 1$$

$$p^2 + px - x = 1$$

$$x + py + z = p \quad (3.5)$$

$$x + py + p^2 - x - y = p$$

$$p^2 + py - y + x - x = p$$

$$p^2 + py - y = p$$

Teraz v oboch rovniciach prehodíme p^2 na druhú stranu, dostaneme:

$$px - x = 1 - p^2 \quad (3.6)$$

$$py - y = p - p^2 \quad (3.7)$$

Teraz si môžeme všimnúť, že z ľavej strany môžeme v rovniciach vyňať neznámu pred zátvorku (z prvej rovnice x a z druhej y):

$$x \cdot (p - 1) = 1 - p^2 \quad (3.8)$$

$$y \cdot (p - 1) = p - p^2 \quad (3.9)$$

Následne môžeme obe strany prenasobiť -1

$$-x \cdot (p - 1) = p^2 - 1 \quad (3.10)$$

$$-y \cdot (p - 1) = p^2 - p \quad (3.11)$$

Na pravej strane prvej rovnice vidíme rozdiel štvorcov, teda ten si vieme upraviť:

$$p^2 - 1 = (p - 1) \cdot (p + 1)$$

Na pravej strane druhej rovnice môžeme vyňať p pred zátvorku a dostaneme tak:

$$p^2 - p = p \cdot (p - 1)$$

Dostávame teda rovnice:

$$-x \cdot (p - 1) = (p - 1) \cdot (p + 1) \quad (3.12)$$

$$-y \cdot (p - 1) = p \cdot (p - 1) \quad (3.13)$$

Obe môžeme predeliť výrazom $(p - 1)$, nesmieme, ale na konci prešetriť prípad, kedy je $(p - 1) = 0$. Po vydelení dostaneme:

$$-x = (p + 1) \quad (3.14)$$

$$-y = p \quad (3.15)$$

Už len stačí vynásobiť -1 :

$$x = -p - 1 \quad (3.16)$$

$$y = -p \quad (3.17)$$

Keď sme si dopočítali hodnoty premenných x a y vzhľadom na p , tak teraz už len treba dopočítať premennú z :

$$z = p^2 - x - y$$

$$z = p^2 - (-p - 1) - (-p)$$

$$z = p^2 + p + 1 + p$$

$$z = p^2 + 2p + 1$$

$$z = (p + 1)^2$$

Teraz sme dostali výsledné súradnice $[-p - 1, -p, (p + 1)^2]$, keď $p \neq 1$. Čo ak sa ale $p = 1$? Dosadíme do pôvodných 3 rovníc:

$$px + y + z = 1, \quad (3.18)$$

$$x + y + z = 1,$$

$$x + py + z = p, \quad (3.19)$$

$$x + y + z = 1,$$

$$x + y + z = p^2. \quad (3.20)$$

$$x + y + z = 1,$$

Dostali sme 3-krát tú istú rovnicu $x + y + z = 1$. Táto rovnica má nekonečne veľa riešení, takže výsledok môžeme zapísať ako $[a, b, 1 - a - b]$, kde a, b sú reálne čísla.

2.4 Komusi Maškrty Sľubujú ($\kappa \leq 2$)

Zadanie.

Astronauti Matthews a Patricks sa spokojní vrátili do lode. Chceli sa venovať svojej ďalšej úlohe – robiť nejaký výskum na marťanských formách života. Pristáli teda s loďou pri jednom štvornohom domorodcovi a požiadali ho, aby si nastúpil. Štyri nohy, štyri rohy, štyri oči. Vyzerali aj stavbári takto? To už si udatní astronauti nepamätali, domorodec im však nerozumel, tak sa ho rozhodli nalákať na čokoládu predtým, než ho spútajú a násilím dotlačia do lode.

Čokoláda značky Zem je tvorená tabuľkou 4×8 štvorčekov. Podľa medziplanetárnej smernice spoločnosti Zem Inc., ktorá čokoládu produkuje, sa smie podávať mimozemským bytostiam len vo forme štvorcov 1×1 , 2×2 , 3×3 a 4×4 štvorčeky. Matthews a Patricks sa rozhodli, že čokoládu rovno rozdelia na niekoľko povolených kúskov. Koľko takých štvorcov mohli získať, ak rozdelili celú čokoládu? Nájdite všetky možné počty.

Riešenie. opravujú Mirka (miriam.horvathova@trojsten.sk) a Naťa (natalia.cigasova@trojsten.sk)

Keď rozdeľujeme tabuľku čokolády na povolené štvorčeky, musí platiť, že súčet obsahov rozdelených kúskov je rovnaký ako obsah celej čokolády. Platí teda nasledovná rovnica:

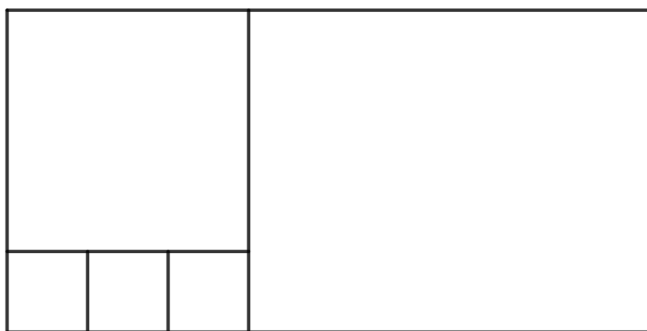
$$4^2 \cdot a + 3^2 \cdot b + 2^2 \cdot c + 1^2 \cdot d = 4 \cdot 8$$

$$16a + 9b + 4c + 1d = 32$$

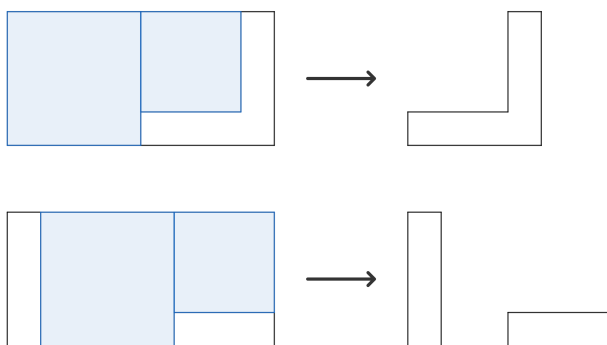
Kde a je počet 4×4 štvorcov, b je počet 3×3 štvorcov, c je počet 2×2 štvorcov a d je počet 1×1 . Potom si zavedme $S = a + b + c + d$, čo bude náš počet rôznych štvorcov na ktorý sa môže čokoláda rozdeliť. Teraz si vypíšeme všetky možnosti, ktoré splňujú našu rovnicu, postupne od najväčších kúskov a potom ich postupne zmeňujeme.

		*							*	*	*															
a	2	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b	0	1	1	0	0	0	0	0	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
c	0	1	0	4	3	2	1	0	1	0	3	2	1	0	5	4	3	2	1	0	8	7	6	5	4	3
d	0	3	7	0	4	8	12	16	1	5	2	6	10	14	3	7	11	15	19	23	0	4	8	12	16	20
S	2	6	9	5	8	11	14	17	5	8	7	10	13	16	9	12	15	18	21	24	8	11	14	17	20	23

Avšak je podstatné si uvedomiť, že nie všetky možnosti sa dajú skutočne skonštruovať. Napríklad vieme, že ak budeme mať 3×3 štvorček čokolády, budeme musieť mať aspoň tri 1×1 , inak by sme čokoládu nevedeli rozdeliť.



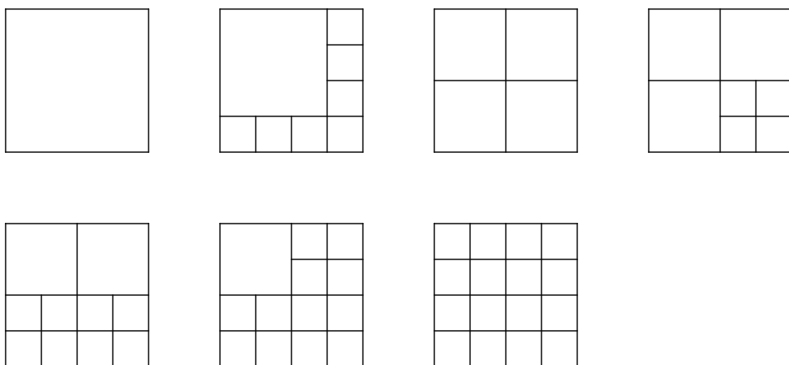
Kedže teda musí platiť $b \leq \frac{d}{3}$, vieme, že možnosti označené * v tabuľke nie sú možné a preto ich nebudeme brať do úvahy. Špeciálne sa pozrieme aj na prípad $a = 1, b = 1, c = 1$, a $d = 3$. Keď od čokolády najprv oddelíme 4×4 štvorec a potom 3×3 štvorec, získame jeden z dvoch nižšie uvedených zvyškov, kde vidíme, že neexistuje miesto pre 2×2 , preto túto možnosť tiež nebudeme brať do úvahy.



Z rovnice získavame tieto rôzne počty, na ktoré vieme čokoládu rozdeliť:

$$S \in \{2; 5; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 20; 21; 23; 24; 26; 29; 32\}$$

Aby sme dokázali, že tieto počty sú možné, môžeme buď nakresliť konštrukciu každého rozdelenia, alebo ukázať nejakým iným spôsobom, že existujú. My sme sa rozhodli pozrieť na rôzne rozdelenia 4×4 štvorca. Tie sme získali tak, že sme išli od najväčších štvorcov a doplňovali potom menšie.



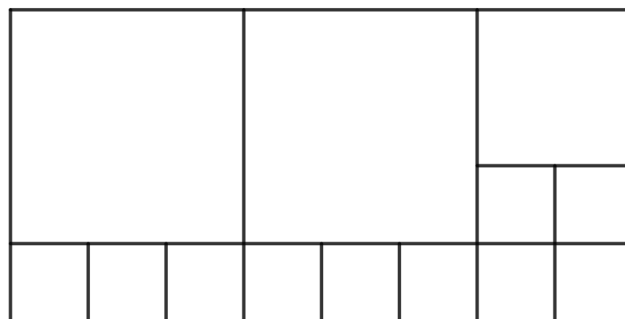
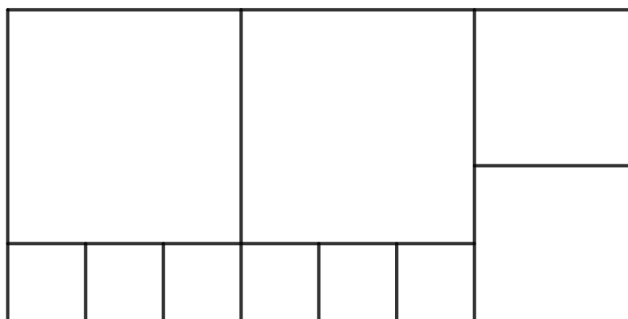
Teraz získame možné rozdelenia 4×8 tabuľky čokolády tak, že vezmeme 2 ľubovoľné rozdelenia 4×4 štvorca a dáme ich dokopy. Napríklad ak vieme rozdeliť 4×4 štvorec na $s_1 = 1$ ale aj na $s_2 = 8$ tak potom 4×8 tabuľku vieme rozdeliť na $S = s_1 + s_2 = 9$ kúskov. Dole môžeme vidieť všetky možnosti, ktoré vieme získať kombináciou dvoch 4×4 štvorcov.

$s_1 \backslash s_2$	1	4	7	8	10	13	16
1	2	5	8	9	11	14	17
4	5	8	11	12	14	17	20
7	8	11	14	15	17	20	23
8	9	12	15	16	18	21	24
10	11	14	17	18	20	23	26
13	14	17	20	21	23	26	29
16	17	20	23	24	26	29	32

Z toho sme dokázali, že existujú rozdelenia:

$$S \in \{2; 5; 8; 9; 11; 12; 14; 15; 16; 17; 18; 20; 21; 23; 24; 26; 29; 32\}$$

Zostávajú nám teda rozdelenia $S = 10$ a $S = 13$. To už dokážeme konkrétnymi konštrukciami.



Poznámka: V tabuľke máme možnosť, ktorá sa nedá skonštruovať, konkrétne $a = 0$, $b = 1$, $c = 5$, a $d = 3$. Avšak táto možnosť má $S = 9$, čo sme si inou konštrukciou dokázali, že môže existovať.

2.5 Kúzlo Medziplanetárneho Spojenia ($\kappa \leq 6$)

Zadanie.

S pravým Marťanom na palube sa vrátili na obežnú dráhu. Teraz boli na rade pokusy, lenže ako na to? Potrebovali poradiť. Na Marse nebolo publikum, ktorého pomoci by rozumeli, a hádať s pravdepodobnosťou 50 : 50 bol vo vesmíre priveľký risk. Rozhodli sa teda pre priateľa na telefóne. Astronaut Patricks už zdvíhal slúchadlo, keď sa zháčil.

„Počuj, Pat, akú má Zem predvoľbu?“

Predvoľba Zeme je celé číslo $n \geq 2$. Astronaut Matthews si pamätá, že $p(k)$ označuje najväčšieho prvočíselného deliteľa čísla k , $\lfloor k \rfloor$ označuje dolnú celú časť reálneho čísla k (teda najväčšie celé číslo menšie alebo rovné k) a navyše platí

$$p(n) + \lfloor \sqrt{n} \rfloor = p(n+1) + \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor.$$

Patricksovi tak nezostáva nič iné ako vyskúšať všetky možné predvoľby. Pomôžte mu tým, že určíte, ktoré všetky n má vyskúšať.

Riešenie. opravujú Ema (ema.cudaiova@trojsten.sk) a BaškaN (barbora.novosadova@trojsten.sk)

Pozrime sa najskôr, ako funguje funkcia $\lfloor \sqrt{k} \rfloor$. Nech k je prirodzené číslo. Potom k^2 sa odmocní na k , $(k+1)^2$ sa odmocní na $k+1$. Medzi k a $k+1$ nie je žiadne prirodzené číslo, takže pre všetky čísla l také, že $k^2 \leq l < (k+1)^2$ je odmocnina „niekde medzi“ k a $k+1$, takže $\lfloor \sqrt{l} \rfloor = k$. Pre dve po sebe idúce čísla n a $n+1$ to znamená, že buď sú obe „medzi“ dvoma štvorcami, teda $k^2 \leq n < n+1 < (k+1)^2$, a teda $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor$ alebo je väčšie z nich štvorec, a v tom prípade $\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1 = \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor$.

Ak by platilo $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor$, muselo by platiť aj $p(n) = p(n+1)$. Lenže n a $n+1$ sú nesúdeliteľné, nemôžu mať rovnakého prvočíselného deliteľa. Táto možnosť teda nemôže nastať.

Keď $\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1 = \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor$, tak musí platiť $p(n) = p(n+1) + 1$. Hľadáme teda 2 prvočísla s rozdielom 1, to sú nevyhnutne 2 a 3. Takže $p(n) = 3, p(n+1) = 2$.

Keďže najväčším prvočíselným deliteľom čísla $n+1$ je 2, $n+1$ musí byť mocninou dvojky. Navyše vieme, že $n+1$ je štvorec, takže musí byť párnou mocninou.

$$n+1 = 2^{2k}$$

$$n = 2^{2k} - 1$$

$$n = (2^k - 1)(2^k + 1)$$

O číse n vieme, že jeho najväčší prvočíselný deliteľ je 3, a zároveň je nepárne (keďže $n+1$ je párne). Musí byť teda mocninou 3. Vieme tiež, že $(2^k - 1)$ a $(2^k + 1)$ sú deliteľmi n , no keďže ich rozdiel je 2, nemôžu byť obe súčasne deliteľné 3. Preto jedno (menšie) z nich musí byť rovné 1, a z toho už druhé je nevyhnutné rovné 3. Potom $n = 1 \cdot 3$, takže jediná vhodná predvoľba je 3.

2.6 Kartičky Maľujú Spiklenecky

Zadanie.

Telefónát bol mimoriadne plodný a okrem nových nadávok sa z neho naši astronauti naučili, že na pokusy potrebujú inteligentné formy života. Tie sa vraj vyznačujú tým, že majú ruky. Bez ohľadu na počet nôh, rohov, či očí, im bude ich súčasný Martan na nič. Potrebujú na ich loď nalákať iného, ideálne na niečo pestrofarebné...

Je dané kladné celé n . Patrick Matthews našiel na lodi veľkú hrbu kartičiek s tabuľkami $n \times n$. Začal ich vyfarbovať červenou, žltou, zelenou a modrou (každé políčko práve jednou) farbou tak, aby v každom štvorci 2×2 bola každá farba práve raz. Každú kartičku, ktorú ofarbil, ofarbil inak, pričom ofarbenia líšiace sa iba otočením nepovažujeme za rôzne (ale ofarbenia líšiace sa prevrátením rozlišujeme). Časom ho to omrzelo, lebo sa mu minuli ofarbenia.

Matthew Patricks našiel na lodi rovnakú hrbu kartičiek. Začal svoje kartičky tiež vyfarbovať červenou, žltou, zelenou a modrou tak, že v hornom riadku zafarbil políčka striedavo dvomi z týchto farieb a potom tie isté farby použil v každom nepárnom riadku zhora, no mohol zmeniť farbu, ktorou začal (čiže v každom riadku mal dve možnosti). Každý párny riadok zhora zafarbil striedavo zvyšnými dvoma farbami, pričom opäť si v každom z riadkov mohol vybrať počiatočnú farbu. Aj jeho to časom omrzelo, lebo sa mu minuli ofarbenia.

Majú naši astronauti rovnaké zbierky farebných kartičiek? Pamätajte, že ofarbenia líšiace sa iba otočením nepovažujeme za rôzne.

Riešenie. opravujú **Mati** (matus.zelko@trojsten.sk) a **Bebe** (alzbeta.klimentova2@gmail.com)

Keďže zadanie pred nás postavilo ťažko riešiteľnú úlohu ako prirodzene pomenovať kozmonautov, tak budeme Patricka Matthews a volať Patrick a Matthewa Patricksa budeme volať Matthew.

Zadanie po nás chce, aby sme ukázali, že dve množiny kartičiek sa rovnajú. To vieme spraviť ukázaním dvoch inklúzií. Prípad 1×1 je degenerovaný a nebudeme sa ním zaoberať. Riešme pre $n > 1$.

Najprv ukážeme, že každá Matthewova kartička je aj v Patrickovej kope. To je však takmer zjavné. Matthew párne a nepárne riadky zafarbujú inou dvojicou farbičiek, takže ak si v tabuľke zoberieme ľubovoľný štvorec 2×2 , tak horné dve políčka budú mať iné farby ako dolné, keďže sa nachádzajú v riadkoch s inou paritou. Navyše Matthew v každom riadku striedal dvojicu farieb prislúchajúcu danému riadku. Takže aj dvojica horných políčok má vzájomne rozličnú farbu. To isté platí aj pre dvojicu spodných políčok. Zobrali sme si ľubovoľnú Matthewovu kartičku a v nej sme ukázali, že ľubovoľný, takže každý štvorec 2×2 už obsahuje všetky 4 farby. Tzn. túto kartičku nájdeme aj na Patrickovej kope.

Naopak, teraz ukážeme, že každá Patrickova kartička je na Matthewovej kope. Spravme pár pozorovaní:

a. Všimnime si, že v Patrickovej kope neexistuje kartička, na ktorej by niektoré dve susedné políčka mali rovnakú farbu (ani keď susedia len rohom). Inak by štvorec obsahujúci tieto 2 políčka nemal všetky 4 farby.

b. Všimnime si, že ak na Patrickovej kartičke existuje riadok alebo stĺpec taký, že je celý vyplnený iba dvojicou (podľa a. nutne sa striedajúcich) farieb, tak každý riadok, alebo stĺpec už je dvojfarebný. Tzn. kartička je aj na Matthewovej kope. Prečo? BUNV nech to je riadok, inak si otočíme kartičku. Potom v susednom riadku už nemôže byť políčko s farbou z prvého riadku, inak by v tabuľke bol štvorec obsahujúce toto políčko a dve políčka toho prvého riadku. Tento štvorec by nebol štvorfarebný. Vďaka tomu susedný riadok musí obsahovať iba ostávajúce 2 farby. Tie sa podľa a. musia striedať. Rovnaký argument indukciou prevedieme na celú tabuľku. Takže ak existuje riadok obsahujúci iba 2 farby, tak už vieme, že daná kartička sa nachádza aj na Matthewovej kope.

c. Ak existuje (BUNV, inak si obrátime tabuľku) riadok ktorý obsahuje tri farby, tak v ňom existuje trojica susedných políčok obsahujúca tieto 3 farby. Označme ich A, B, C a poslednú farbu si označme D . Zelená a modrá farba slúžia iba na označenie políčok.

A	B	C

A	B	C
C	D	A

Všimnime si, že modré políčko rohom susedí s políčkami s farbami A, B, C takže už musí mať farbu D . Ľahko doplníme farby aj na zelené políčka.

A	B	C
C	D	A

A	B	C
C	D	A
A	B	C

Teraz modré políčko susedí s políčkami s farbami C, D, A takže už musí mať farbu B. Znovu doplníme farby aj na zelené políčka. Všimnime si, že sme tam, kde sme začali. Indukciou dostávame, že existuje stĺpec v ktorom sa striedajú iba 2 farby, takže podľa b. sa príslušná kartička tiež už nachádza na Matthewovej kope.

Ukázali sme, že každá Patricksova kartička je aj na Matthewovej kope, čo dokončuje túto úlohu.

2.7 Kreslenie Marťanského Stvorenia

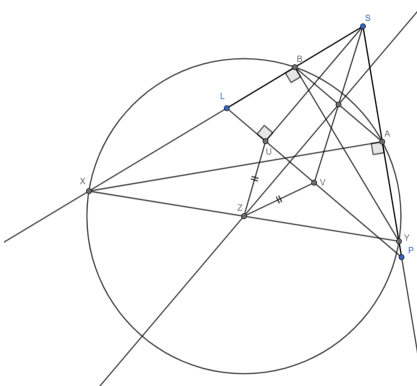
Zadanie.

Farebné kartičky splnili svoj účel a astronauti Matthews a Patricks mali čoskoro na lodi inteligentnú formu života. Tá musela byť mimoriadne inteligentná, lebo mala hneď 3 ruky: pravú (P), ľavú (L) a spodnú (S), ktorá vyrastala namiesto pupka.

Tieto životné formy boli výrazne nevyvážené, lebo $|LS| < |PS| < |LP|$. Navyše trojuholník PLS bol ostrouhlý. Matthews a Patricks fixkou na Marťanovi vyznačili na strane LP body U a V tak, aby SU bola výškou a SV ťažnicou trojuholníka. Ďalej na priamkach LS a PS označili postupne body X a Y tak, že $|PX| = |XS|$ a $|LY| = |YS|$. Dokážte, že stred úsečky XY je v rovnakej vzdialenosti od bodu U ako od bodu V.

Riešenie.

opravuje Juraj Rosinský (juraj.rosinsky@trojsten.sk)

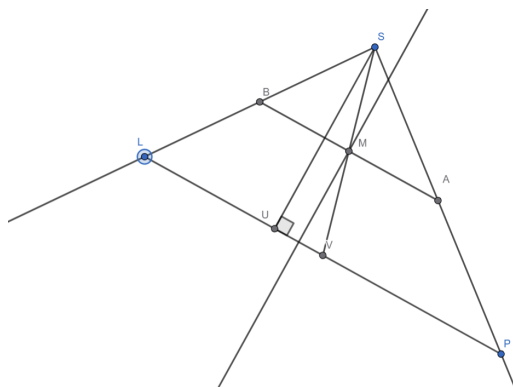


Nazvime Z stred úsečky XY, A stred PS a B stred LS. Najskôr dokážme, že Z leží na osi úsečky AB.

Podľa konštrukcie bodov X a Y priamka AX je os úsečky PS, BY je os úsečky LS (lebo trojuholníky PSX a LSY sú rovnoramenné). To znamená, že $\angle XBY = \angle XAY = 90^\circ$. Tálesova veta nám hovorí, že body A a B ležia na

kružnici s priemerom XY . Teda A, B, X, Y ležia na tej istej kružnici so stredom Z . Vieme, že os tetivy kružnice prechádza cez stred kružnice. Stred kružnice A, B, X, Y je Z a to znamená, že Z leží na osi úsečky AB .

Dokážme teraz, že os úsečky AB a os úsečky UV sú tie isté priamky. Nakreslíme si to na jednoduchšom obrázku, kde M je stred úsečky AB .



Vieme, že A je stred PS a B je stred LS , to znamená že $AB \parallel LP$ a M je tiež stred úsečky SV (lebo trojuholníky SBA a SLP sú podobné). Trojuholník SUV je pravouhlý a M je stred prepony. To znamená, že $|MS| = |MV| = |MU|$, a teda M leží na osi úsečky UV lebo $|MV| = |MU|$. Keďže $AB \parallel LP$, tak os úsečky UV kolmo pretína úsečku AB v jej strede. Teda os úsečky UV je os úsečky AB .

Vieme, že os úsečky AB prechádza cez bod Z , teda aj os úsečky UV prechádza cez bod Z a to znamená, že $|UZ| = |VZ|$, teda stred úsečky XY má rovnakú vzdialenosť od bodu U ako od bodu V .

2.8 Krásni Modrí Schopní

Zadanie.

V priebehu niekoľkých dní vypukol na Marse ošial. Obyvatelia sa neustále dožadovali autorít, aby prešetrili údajný výskyt mimomartánskych bytostí, ktoré narúšajú výstavbu obchodných centier, vandalizujú polia neslušnými symbolmi a kradnú dobytok. Nadnárodný Inštitút Vesmírnych Aktivít Mimomartánskych bral túto hrozbu vážne, a tak vytvoril zásahový tím zvaný Martania v modrom.

Jedným z novovyškolených agentov bol aj agent Ľ.² Ten sa preukázal ako mimoriadne platný agent v skúške z „Hľadania mimomartánskej aktivity“, keď ako jediný dokázal nájsť všetky trojice celých čísel (a, b, c) také, že

$$(ac - b)^2 + (bc - a)^2 = c.$$

Nájdite ich aj vy.

Riešenie.

opravuje Michal Staník (michal.stanik@trojsten.sk)

Ako prvé si všimnime, že c je súčet dvoch druhých mocnín celých čísel (štvorcov), a teda $c \geq 0$.

²Čítaj Ľ.

Rovnicu roznásobením a vyňatím členov iným spôsobom vieme previesť do tvaru, kde na jednej strane máme iba premenné a , b a na druhej strane iba c :

$$\begin{aligned}a^2c^2 - 2abc + b^2 + b^2c^2 - 2abc + a^2 &= c, \\a^2c^2 + b^2 + b^2c^2 + a^2 &= c + 4abc, \\(c^2 + 1)(a^2 + b^2) &= c(1 + 4ab), \\\frac{a^2 + b^2}{1 + 4ab} &= \frac{c}{c^2 + 1}.\end{aligned}$$

Skúsené oko si všimne, že ľavá strana má menovateľa obvykle väčšieho ako čitateľa. Poďme zistiť, kedy presne. Vyjdeme klasicky z nezápornosti štvorca rozdielu:

$$\begin{aligned}(a - b)^2 &\geq 0, \\a^2 + b^2 - 2ab &\geq 0, \\a^2 + b^2 &\geq 2ab.\end{aligned}$$

Ak navyše $a^2 + b^2 > 0$, tak menovateľ vieme prebiť trikrát čitateľom:

$$3(a^2 + b^2) \geq 1 + 2ab + 2ab = 4ab + 1.$$

Ak $a^2 + b^2 = 0$, tak nutne $a = b = 0$. Po dosadení máme $c = 0$ a získavame prvé riešenie $(0, 0, 0)$. Záporná táto hodnota (ako súčet štvorcov) byť nemôže.

V opačnom prípade platí uvedená nerovnosť, teda

$$\frac{a^2 + b^2}{1 + 4ab} \geq \frac{1}{3}.$$

Tým pádom aj pravá strana našej upravenej rovnice je aspoň $\frac{1}{3}$, čiže

$$\begin{aligned}\frac{c}{c^2 + 1} &\geq \frac{1}{3}, \\3c &\geq c^2 + 1, \\0 &\geq c^2 - 3c + 1.\end{aligned}$$

Násobiť $c^2 + 1$ môžeme, keďže táto hodnota je aspoň 1. Dostali sme kvadratickú nerovnosť s kladným koeficientom pri c^2 . Korene pravej strany sú $\frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2}$, čo sú čísla v intervale $(0, 1)$, resp. $(2, 3)$. Hodnota bude záporná medzi nimi, teda prípustné celočíselné hodnoty c sú 1 a 2.

Ak $c = 1$, máme

$$(a - b)^2 + (b - a)^2 = 1,$$

čo nemôže nastať, pretože ľavá strana je $2(a - b)^2$, čiže párna.

Ak $c = 2$, máme

$$(2a - b)^2 + (2b - a)^2 = 2.$$

Číslo 2 vieme ako súčet štvorcov vyjadriť len ako $1 + 1$. Tu nesmieme zabudnúť na to, že 1 ako štvorec vieme získať nie len umocnením 1 na druhú, ale aj -1 . Teda musí platiť $2a - b = 2b - a \in \{1, -1\}$.

Máme niekoľko možností:

$$2a - b = 1$$

$$2a - b = -1$$

$$2a - b = 1$$

$$2b - a = 1$$

$$2b - a = -1$$

$$2b - a = -1$$

$$4b - b = 2 + 1$$

$$4b - b = -2 - 1$$

$$4b - b = -2 + 1$$

$$3b = 3$$

$$3b = -3$$

$$3b = -1$$

$$b = 1$$

$$b = -1$$

$$a = 1$$

$$a = -1$$

V každej možnosti (stĺpci) sme si napísali sústavu rovníc a potom sme pričítali dvojnásobok druhej rovnice k prvej, aby sme vylúčili premennú a . V tretej možnosti nevychádza b celočíselne a posledná štvrtá možnosť (s výmenou 1 a -1) je symetrická s treťou, čiže tiež nemá riešenie.

Dokopy máme teda tri riešenia: $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 2)$, $(-1, -1, 2)$.

2.9 Kúsok Morálnosť Spochybňuje

Zadanie.

Hneď prvý prípad agenta Ľ sa týkal nejakého šialenca, ktorý tvrdil, že ho uniesli mimomarfania a vo svojej „lietajúcej rakete“ ho pokreslili. Neznalo to veľmi vierohodne, ale dotýčny bol skutočne pokreslený. A tie zvláštne symboly... Úlohou Marťanov v modrom však bolo zabrániť akýmkoľvek rečiam, preto nemal agent Ľ inú možnosť ako (napriek osobnému presvedčeniu) vymazať svojmu spoluobčanovi pamäť. Na to využije pamäťovú gumu, ktorá vojde jedným uchom dnu a druhým von...

Nech m je kladné celé číslo. Pamäť je nekonečná postupnosť $a_1, a_2, a_3, \dots$, v ktorej a_1 je kladné celé a pre každé $n \geq 1$ platí

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n^2 + 2^m & \text{ak } a_n < 2^m, \\ a_n/2 & \text{ak } a_n \geq 2^m. \end{cases}$$

Pamäťová guma však vymaže len celé spomienky. Preto vzhľadom na m určte všetky a_1 , pre ktoré je každý člen postupnosti celé číslo.

Riešenie.

opravuje Štepi (martin.stepanek@trojsten.sk)

Kým je naše aktuálne $a_n \geq 2^m$, tak ho delíme dvomi, a zaujíma nás, či takto ostaneme pri celých číslach. Chceme si teda rozložiť a_n na $2^k b$, kde b je nepárne. Postupnosť potom bude vyzeráť tak, že keď spravíme prvý krok, tak sa nám môžu zmeniť k aj b , ale potom sa iba k postupne znižuje o 1, až kým nie je zase $2^k b < 2^m$. Necelé čísla nám pri tom vyjdú práve vtedy, keď je $b > 2^m$.

Zaujíma nás teda, čo sa deje s b pri prvom kroku. Ďalší člen postupnosti bude $2^{2k}b^2 + 2^m$. Na oboch stranách máme mocniny dvojky, takže by sme ich chceli vybrať pred zátvorku, ale nevieme, ktorá z nich je väčšia. Preto rozoberieme prípady:

- Ak $2k < m$, potom $2^{2k}b^2 + 2^m = 2^{2k}(b^2 + 2^{m-2k})$. Hodnota v zátvorke je nepárna, takže to bude naše nové b .
- Ak $2k > m$, potom dostávame $2^m(2^{2k-m}b^2 + 1)$, zase je hodnota v zátvorke nepárna.

Zatiaľ si môžeme všimnúť, že v oboch prípadoch sa nám b zväčší. Ak teda ostávame pri týchto prípadoch, tak určite niekedy dostaneme necelé čísla. Zostáva nám ešte jeden prípad:

- Ak $2k = m$, potom dostávame $2^m(b^2 + 1)$, kde už zátvorka vpravo je párna, takže už nemôžeme použiť ten argument, čo predtým. Našťastie ale $b^2 \equiv 1 \pmod{4}$ (3 nie je kvadratický zvyšok), takže $4 \nmid b^2 + 1$, teda nové b bude $(b^2 + 1)/2$.

To je tiež väčšie ako b okrem prípadu, keď $b = 1$.

Ak je teda v nejakom momente $b > 1$, potom sa už bude len zväčšovať, a teda niekedy dostaneme necelé číslo. Ak $b = 1$, potom ďalšie číslo postupnosti bude $2^{2k} + 2^m$. Aby toto malo stále nepárnu časť 1, musí byť $2k = m$. Tým dostaneme nejakú mocninu dvojky, ktorú budeme deliť dvomi, až kým sa nedostaneme na 2^{m-1} . Potom zase aplikujeme prvý krok. Aby sme zase dostali mocninu dvojky, musí byť aj $2(m-1) = m$.

Jediná možnosť je teda $m = 2$. V tomto prípade môžeme začať s ľubovoľným $2^k > 1$, vždy sa takto dostaneme ku 2 a odtiaľ znovu na 8, takto teda vždy ostaneme pri celých číslach. Vo všetkých ostatných prípadoch začnú byť čísla niekedy necelé.

2.10 Kruté Mazanie Spomienok

Zadanie.

Sedíš za počítačom a pozeráš si nové zadania KMS, keď sa zrazu ozve klopanie na dvere. Otvoríš a za nimi je postava v modrom. Má zvláštnu sivo-zelenkavú pokožku, na tvári mesačné okuliare³ a na tele oblek, ktorému zhruba uprostred brucha začína tretí rukáv. Akoby ho kreslila umelá inteligencia. Postava niečo nezrozumiteľne povie a pred očami sa ti zjaví gumený štupeľ do uší. Zrazu ňa jedna ruka chytí zospodu za bradu, ďalšia zvrchu za temeno, chceš sa vytrhnúť, ale nejde to. Cítiš, ako sa ti niečo tlačí do ľavého ucha...

...a viac nevieš o ničom, len o lichobežníku ABCD so základňami BC a AD, pričom AD je tá dlhšia z nich. Na uhlopriečke AC má vyznačený bod P, na uhlopriečke BD bod Q. Vidiš, že priamka AC je osou $\sphericalangle$ BPD a priamka BD osou $\sphericalangle$ AQC. Dokáž, že $\sphericalangle$ BPD a $\sphericalangle$ AQC majú rovnakú veľkosť.

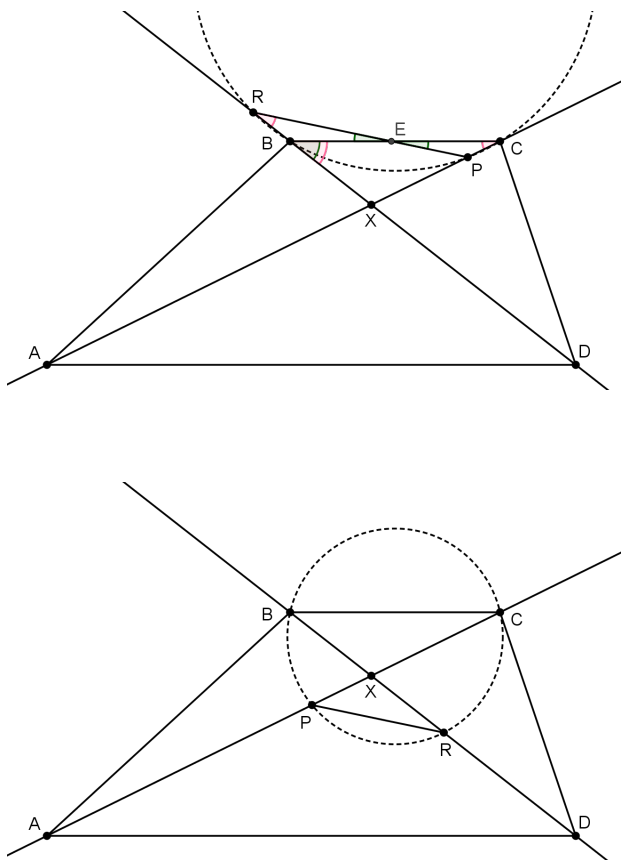
Riešenie.

opravuje **Mišo M.** (michal.molnar@riesky.sk)

³Vyzerajú ako slnečné, avšak v skutočnosti neznižujú, ale zvyšujú množstvo svetla, ktoré nimi prechádza.

Označme X priesečník uhlopriečok BD a AC . Ako prvé si uvedomme, že $|\angle BPD| = |\angle AQC|$ platí práve vtedy, keď sa zhodujú ich polovice. Ak by sa nám teda podarilo dokázať napríklad $|\angle BPC| = |\angle BQC|$ ⁴, mali by sme úspešne vyriešenu úlohu. Keďže body P a Q ležia vnútri lichobežníka $ABCD$, je táto podmienka ekvivalentná s tým, že body B, C, P, Q ležia na kružnici (veta o obvodových uhloch). My skúsime dokázať práve toto tvrdenie.

Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $|\angle ACB| \geq |\angle DBC|$. Označme R priesečník kružnice opísanej trojuholníku BPC a priamky BD rôznej od B . Uvedomme si, že R leží dokonca vnútri úsečky BD . Ak by neležal, úsečka PR by prešla BC a z obvodových uhlov by sme ľahko dopočítali, že $|\angle ACB| < |\angle DBC|$, čo je v rozpore s našim predpokladom.

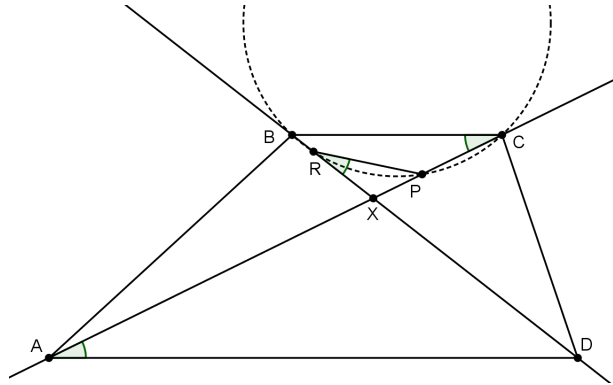


Tým pádom máme vďaka obvodovým uhľom $|\angle BPC| = |\angle BRC|$. Teraz rozlíšime dva prípady, podľa toho, kde na úsečke AC sa bod P nachádza. Prípady $P = X$ si odložíme na neskôr. Ak P leží vnútri úsečky CX , platí

$$|\angle DRP| = 180^\circ - |\angle BRP| = |\angle BCP| = |\angle PAD|,$$

kde prvá rovnosť platí pre susedné uhly, druhú máme vďaka tomu, že $BCPR$ je tetivový štvoruholník a posledná platí pre striedavé uhly, nakoľko BC a AD sú rovnobežné. Keďže P leží na úsečke CX , body A a R ležia v rovnakej polrovine danej priamkou DP . Podľa vety o obvodových uhloch tak z rovnosti $|\angle DRP| = |\angle PAD|$ dostaneme, že body A, D, P a R ležia na kružnici.

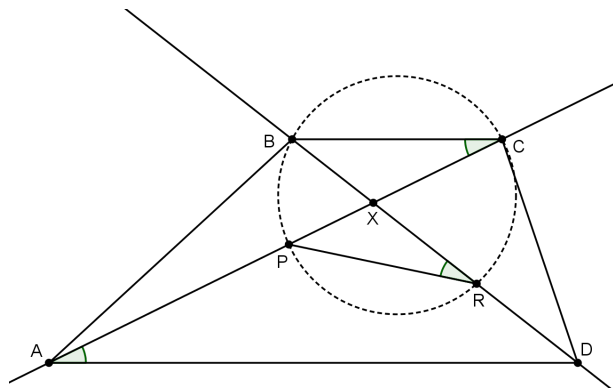
⁴Toto neplatí napríklad ak P leží na úsečke XC a Q na XD . Z riešenia však zistíme, že tento prípad pre naše P a Q nenastane, t. j. vždy dostaneme $|\angle BPC| = |\angle BQC|$.



Druhým prípadom je, že P leží vnútri úsečky AX . Potom platí

$$180^\circ - |\angle PRD| = |\angle PRB| = |\angle PCB| = |\angle PAD|,$$

kde prvá rovnosť platí pre susedné uhly, druhá vďaka obvodovým uhlom, a posledná pre striedavé uhly. Keďže P leží vnútri úsečky AX , body R a A ležia v opačných polrovinách daných priamkou PD . Vďaka $|\angle PAD| = 180^\circ - |\angle PRD|$ je štvoruholník $PADR$ tetivový.



V oboch prípadoch sme zistili, že body A, D, P, R ležia na kružnici. Zároveň v oboch prípadoch máme vďaka obvodovým uhlom $|\angle APD| = |\angle ARD|$. Potom však platí aj

$$|\angle DPC| = 180^\circ - |\angle APD| = 180^\circ - |\angle ARD| = |\angle ARB|.$$

Spomeňme si teraz na to, že body B, C, R, P ležia na kružnici. Keďže aj P aj R ležia vnútri lichobežníka, pre ich obvodové uhly platí $|\angle BRC| = |\angle BPC|$, čiže

$$|\angle BRC| = |\angle BPC| = |\angle DPC| = |\angle ARB|.$$

Druhá rovnosť plynie z toho, že AC je osou uhla $\angle BPD$, tretiu rovnosť sme práve odvodili. Potom však platí, že BD je osou uhla $\angle ARC$.

Platí teda, že $R = Q$? Zostáva nám overiť, či sa nemôže stať, že pre dva rôzne body R a Q bude BD osou uhlov $\angle ARC$ aj $\angle AQC$. Ak by takýto prípad nastal, trojuholníky AQR a CQR majú spoločnú stranu QR a rovnaké uhly pri nej. Sú teda zhodné podľa vety *usu*. To znamená, že $|AQ| = |CQ|$ a $|AR| = |CR|$, takže priamka QR je osou úsečky AC .

Keďže aj B a D ležia na QR , nutne $|DA| = |DC|$ a $|BA| = |BC|$. Útvár $ABCD$ je teda deltoid, ktorý má rovnobežné strany, len ak sú všetky rovnako dlhé. Tým pádom $|DA| = |BC|$, čo je sporom so zadáním, kde predpokladáme $|DA| > |BC|$.

Skutočne teda $R = Q$ a uhly $\sphericalangle BPD$ a $\sphericalangle AQC$ majú rovnakú veľkosť.

Nakoniec prejdime ešte prípad, kedy $P = X$. V takom prípade $|\sphericalangle BPD| = 180^\circ$. Potom je nutne AC kolmá na BD , aby mohla byť osou tohto uhla. Ak $Q = X$, máme hotovo a zjavne $|\sphericalangle BPD| = |\sphericalangle AQC|$. Ak nie, tak na priamke máme dva rôzne body $Q \neq X$, pre ktoré je BD osou uhla $\sphericalangle AQC$, resp. $\sphericalangle AXC$, čo, ako vidíme z predošlého odstavca, nevyhovuje zadaniu.