



## Riešenia 3. kola letnej časti

### 3.1 Kilo Miešaných Strukovín ( $\kappa \leq 0$ )

#### Zadanie.

Ďuro Truľo kráčal krásnou krajinou, vtáčiky štebotali a slniečko príjemne hrialo. Po dlhom pochode po svojej pravej ruke uvidel statný statok, z ktorého vybehlo zarmútené ufúľané dievča. Pozrela naňho a povedala: „Prosím, prosím, nepomôžete mi roztriediť šošovičku, hrášok, fazuľu a prvočísla?“ Ďuro na ňu vyceril zuby a riekol: „OK, môžem.“

Pomôžte ufúľanej dievčine nájsť všetky prvočísla také, že sa dajú zapísať ako súčet nejakých dvoch prvočísel a zároveň aj rozdiel nejakých dvoch prvočísel (môžu a nemusia byť iné ako predošlé dve).

#### Riešenie.

opravuje Matka ([martina.ganova@trojsten.sk](mailto:martina.ganova@trojsten.sk))

Hľadané prvočíslo zo zadania si označíme  $p$ . Ako prvé si uvedomíme, že všetky prvočísla okrem čísla 2 sú nepárne. Číslo  $p$  je teda buď nepárne, alebo je číslom 2. Číslo 2 ale nikdy ako súčet prvočísel nedostaneme, keďže 2 je najmenšie prvočíslo.

Teda  $p$  je nepárne. Nepárne číslo ako výsledok súčtu dostaneme len ak sčítame párne a nepárne číslo a to isté platí aj pri rozdieli. Ako párne číslo si môžeme vybrať jedine 2,  $p$  teda môžeme zapísať ako súčet 2 a nejakého prvočísla  $q$ . Zároveň  $p$  vieme zapísať aj ako rozdiel 2 a nejakého prvočísla  $r$ . Číslo 2 určite nemôže byť v rozdieli menšenec, keďže je to najmenšie prvočíslo, ale musí byť menšiteľ. Získavame tak rovnice

$$p = q + 2,$$

$$p = r - 2.$$

Z rovníc si môžeme všimnúť, že  $q = p - 2$  a  $r = p + 2$ , čiže  $p$ ,  $q$  a  $r$  sú 3 po sebe idúce nepárne čísla.

Ak sa skúsime pozrieť na nejaké trojice po sebe idúcich nepárnych čísel, môžeme si všimnúť, že jedno z nich je vždy deliteľné 3. Povedzme, že  $q$  má po delení 3 zvyšok  $z$ . Potom  $p$  bude mať po delení 3 zvyšok  $z + 2$  a  $r$  bude mať zvyšok  $z + 4 = z + 3 + 1 = (z + 1) + 3$ , čiže ide o zvyšok  $z + 1$ . Prvočísla  $p$ ,  $q$  a  $r$  teda vždy majú každé iný zvyšok po delení 3, a keďže sú len 3 možné zvyšky, jedno z nich musí byť deliteľné 3.

Jediné prvočíslo deliteľné 3 je 3. Rýchlo si všimneme, že 3 môžeme dosadiť len na miesto  $q$ , lebo 3 je najmenšie nepárne prvočíslo a  $q$  je najmenšie číslo z trojice. Potom už ľahko dopočítame, že  $p = 5$  a  $r = 7$ . **Hľadané prvočíslo je teda 5.**

### 3.2 Kruto Majetok Stratil ( $\kappa \leq 0$ )

#### Zadanie.

Ďuro Truľo sa vracal domov naplnený pýchou a hrdosťou. Práve vykonal dobrý skutok! A na dôvažok neodchádzal naprázdno, medzi prstami (opatrne, aby ho nepokrčil) držal svoj prvý zárobok – pravé pierko z prepeličky. Bol už na

dohľad od domu, keď nastala galiba. Zafúkalo. Vietor zdvihol pierko do výšin a odniesol ho preč, na míle ďaleko od nešťastného Ďura. Toto všetko videla jeho dobrá mama, ktorá ho už vyzerala pred domom. Rozhodla sa teda synovi dať radu do života.

„Pozri, Ďurko môj, tvoj klobúk má tvar rovnobežníka ABCD. Nabudúce si zapichni pierko do bodu K alebo L, ktoré ležia postupne na stranách BC a CD. Vidiš, ako platí  $|AB| + |BK| = |AD| + |DL|$ . Vďaka tomu ti odtiaľ nevypadne.“

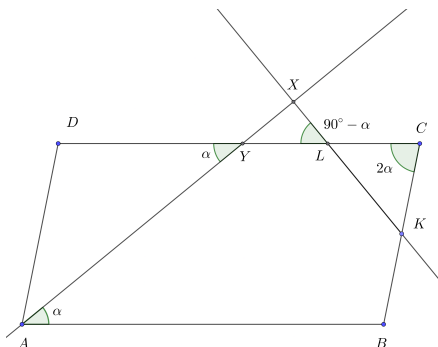
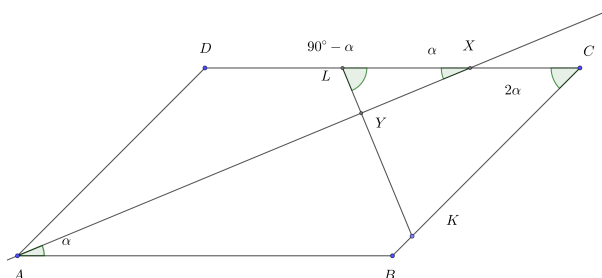
Dokážte, že os uhla  $\sphericalangle BAD$  je kolmá na priamku KL.

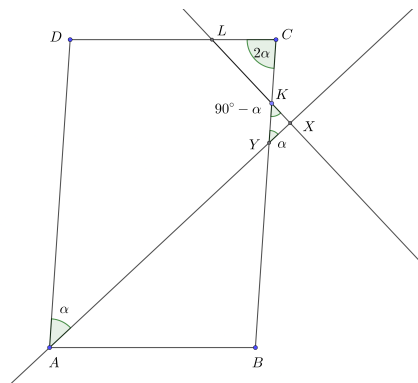
**Riešenie.**

opravujú **M&M** ([marek.murin@trojsten.sk](mailto:marek.murin@trojsten.sk)) a **Kopy** ([martin.kopcany@trojsten.sk](mailto:martin.kopcany@trojsten.sk))

V rovnobežníku platí, že protiľahlé strany majú rovnakú dĺžku, preto  $|AB| + |BC| = |AD| + |DC|$ . Potom z podmienky  $|AB| + |BK| = |AD| + |DL|$  ( $|AB| + |BK| + |KC| = |AD| + |DL| + |LC|$ ) vlastne vyplýva  $|KC| = |LC|$ , a teda trojuholník KLC je rovnoramenný. V rovnobežníku navyše platí, že osi uhlov  $\sphericalangle BAD$  a  $\sphericalangle LCK$  sú rovnobežné. Os v rovnoramennom trojuholníku je aj výškou na základňu, tak os uhla  $\sphericalangle DCB$  je kolmá na priamku KL a potom aj os  $\sphericalangle BAD$  je kolmá na priamku KL.

*Iné riešenie:* Nakreslíme si niekoľko obrázkov aby náhodou nedošlo k problému s konfiguráciami. Uvedomíme si, že trojuholník CKL je rovnoramenný, a preto  $|\sphericalangle KLC| = |\sphericalangle CKL| = 90^\circ - \alpha$ . Potom v trojuholníku XYL resp. XYK je jeden uhol  $90^\circ - \alpha$  buďto priamo alebo z vrcholových uhlov. Druhý uhol je  $\alpha$  zo súhlasných uhlov pri rovnobežkách a posledný, hľadaný uhol, je  $90^\circ$ . Pri popisovaní uhlov je však potrebné si uvedomiť, na ktorú konfiguráciu sa odvolávame.





### 3.3 Karbonátky Miesto Spratka ( $\kappa \leq 1$ )

#### Zadanie.

Ďuro Trulo kráčal hustým lesom, kukučky kukali a vetrík príjemne povieval. Po dlhom pochode došiel až k malej chalúpkke rozvoniavajúcej medom. Hneď, ako sa priblížil, vyšla z nej stará pani a prosí ho: „Och, mladý pán, prosím, pomôžte mi? Mám vnútri takého drzého fagana, nepomohli by ste mi ho strčiť do pece?“ Ďuro na ňu vyceril zuby a riekol: „OK, môžem.“

Vnútri chalúpkky stál chlapec, pozeral sa na pec a nariekal: „Pani ježibaba, tá pec nemá ani správnu výšku, ani správnu šírku, ani správnu teplotu a ani správny tlak na moju váhu, vek, výživovú hodnotu a počet spapaných perníkov.“

Ježibaba sa pozrela na svoju pec a spolu s Ďurom sa snažili nájsť správne nastavenie pre zadané reálne čísla  $a, b, c, d$ . To znamená, že sa pomocou nich snažia vyjadriť všetky štvorice reálnych čísel  $(x, y, z, w)$ , pre ktoré platí

$$y^2 z^2 w^2 x = a^7,$$

$$z^2 w^2 x^2 y = b^7,$$

$$w^2 x^2 y^2 z = c^7,$$

$$x^2 y^2 z^2 w = d^7.$$

Nájdite pre ježibabu tieto štvorice.

**Riešenie.** opravujú **Denys** ([denys.andrukhovskiy@trojsten.sk](mailto:denys.andrukhovskiy@trojsten.sk)) a **Brian Turza** ([brian.turza@trojsten.sk](mailto:brian.turza@trojsten.sk))

Máme ako zadanie sústavu rovníc, ktoré sa navzájom veľmi podobajú. V takýchto prípadoch môžeme skúsiť rovnice napríklad sčítať alebo vynásobiť. V tomto prípade by sa asi viac hodilo vynásobiť všetky rovnice:

$$(y^2 z^2 w^2 x) \cdot (z^2 w^2 x^2 y) \cdot (w^2 x^2 y^2 z) \cdot (x^2 y^2 z^2 w) = a^7 \cdot b^7 \cdot c^7 \cdot d^7,$$

$$x^7 y^7 z^7 w^7 = a^7 b^7 c^7 d^7.$$

Keďže 7 je nepárne číslo, tak nám nevadí zobrať siedmu odmocninu z oboch strán:

$$\sqrt[7]{x^7 y^7 z^7 w^7} = \sqrt[7]{a^7 b^7 c^7 d^7},$$

$$xyzw = abcd.$$

Okej. Teraz by sme sa mohli pozrieť na to, či nám tento vzťah niečo dáva. V každej rovnici vidíme takmer ten istý výraz, ako v pôvodných rovniciach. Lenže každej rovnici chýba jeden činiteľ. Tak ich skúsme týmito premennými prenásobiť:

$$y^2 z^2 w^2 x \cdot x = a^7 \cdot x,$$

$$z^2 w^2 x^2 y \cdot y = b^7 \cdot y,$$

$$w^2 x^2 y^2 z \cdot z = c^7 \cdot z,$$

$$x^2 y^2 z^2 w \cdot w = d^7 \cdot w.$$

Teda:

$$(xyzw)^2 = a^7 x,$$

$$(xyzw)^2 = b^7 y,$$

$$(xyzw)^2 = c^7 z,$$

$$(xyzw)^2 = d^7 w.$$

Tu môžeme použiť rovnosť, čo sme našli:

$$a^2 b^2 c^2 d^2 = a^7 x,$$

$$a^2 b^2 c^2 d^2 = b^7 y,$$

$$a^2 b^2 c^2 d^2 = c^7 z,$$

$$a^2 b^2 c^2 d^2 = d^7 w.$$

Chceli by sme vydeliť obidve rovnice, aby sme dostali len  $x, y, z$  alebo  $w$ . Problém by bol, keby  $a^7, b^7, c^7$  alebo  $d^7$  by bola nula. Skúsme sa pozrieť, čo by bolo, keby  $a^7 = 0$ . Zrejme potom  $a = 0$ . Potom podľa prvej rovnice  $x^2 y^2 z^2 w = 0$ . Potom je ale jedna z premenných  $x, y, z, w$  tiež nula. Keby sme potom dosadili nulu za túto premennú, dostali by sme rovnice:

$$0 = 0,$$

$$0 = b^7,$$

$$0 = c^7,$$

$$0 = d^7.$$

Čiže potom  $a = b = c = d = 0$ . Tým pádom ak jedna premenná je nula, tak ostatné môžu byť akékoľvek. Všimneme si, že rovnako by sme mohli ukázať tento fakt aj za predpokladu  $b^7 = 0$ ,  $c^7 = 0$ , alebo  $d^7 = 0$ . Teda vybavili sme hneď 2 prípady:

1. Ak  $a = b = c = d = 0$ , tak riešenia sú všetky také štvorice:  $\{(i, j, k, \ell)\}$ , kde  $i, j, k, \ell \in \mathbb{R}$  a  $i = 0$  alebo  $j = 0$  alebo  $k = 0$  alebo  $\ell = 0$ .
2. Ak je aspoň jedno číslo  $a, b, c, d$  nula, a aspoň jedno číslo  $a, b, c, d$  nenulové, tak riešenia neexistujú, keďže sme hore ukázali, že ak jedno číslo z  $a, b, c, d$  je nulové, tak potom aby rovnice boli splnené, tak musia byť všetky nulové.

Dobre, teraz môžeme predpokladať, že  $a, b, c, d$  sú nenulové. Tak potom môžeme tie štyri rovnice, čo sme mali hore, predeliť:

$$\frac{a^2 b^2 c^2 d^2}{a^7} = x,$$

$$\frac{a^2 b^2 c^2 d^2}{b^7} = y,$$

$$\frac{a^2 b^2 c^2 d^2}{c^7} = z,$$

$$\frac{a^2 b^2 c^2 d^2}{d^7} = w.$$

No a už len dokončíme vykrátením:

$$\frac{b^2 c^2 d^2}{a^5} = x,$$

$$\frac{a^2 c^2 d^2}{b^5} = y,$$

$$\frac{a^2 b^2 d^2}{c^5} = z,$$

$$\frac{a^2 b^2 c^2}{d^5} = w.$$

Čiže, pre nenulové  $a, b, c, d$  sú riešenia práve štvorice  $\left(\frac{b^2 c^2 d^2}{a^5}, \frac{a^2 c^2 d^2}{b^5}, \frac{a^2 b^2 d^2}{c^5}, \frac{a^2 b^2 c^2}{d^5}\right)$ .

### 3.4 Kabelu Medovníkmi Sýti ( $\kappa \leq 2$ )

#### Zadanie.

Ďuro Truľo sa vracal domov naplnený pýchou a hrdosťou. Práve vykonal dobrý skutok! A na dôvažok neodchádzal naprázdno, za klobúkom (presne, ako ho mama poučila) mal zapichnutý svoj druhý zárobok – pravý sladký perník. Pýcha a hrdosť mu však nevydržali dlho. Hneď, ako došiel do dediny, začali z domov vychádzať ľudia, ukazovať na neho prstom a potichu sa na ňom chichotať. Ďuro bol z toho celý nešťastný a hneď, ako sa dostal domov, pošťožoval sa svojej dobrej mame na to, ako mu minule poradila.

„Ach, Ďurko môj, za klobúk patria pierka, nie jedlo. To si máš pekne uložiť do batôžka. Pod, nech ťa naučím ako.“

A tak mama s Ďurkom nacvičovali vkladanie perníčkov do batôžka. Perníčky sú očíslované číslami 1, 2, ..., 9. Mama ich v tomto poradí v náhodných časových intervaloch pokladala Ďurovi na kôpku, vždy nový perníček pekne navrch. Ďuro zas v náhodných časových intervaloch z kôpky zobral najvrchnejší perník a vložil si ho do batôžka, pričom medzi dvoma vkladaniami mama mohla stihnúť pridať ďalšie perníky na kôpku, ale nemusela. Po čase im vyhladlo, tak si dali prestávku na obed. Po jedle sa Ďurovi strachom rozšírili oči – vôbec si nepamätá, ktoré perníčky už odložil, ani či jeho mame zostávajú nejaké perníčky, ktoré ešte na kôpku nepoložila. Našťastie si spomenul, že perníček číslo 8 už je v batôžku (no nebol presvedčený, že úplne navrchu). Ďuro sa zamyslel, ktoré perníčky mu ostávajú a v akom poradí by ich mohol zbaliť. Na základe predchádzajúcich informácií povedzte Ďurovi, koľko existuje poradí, v ktorých by ostávajúce perníčky mohli byť zbalené.

**Poznámka:** Pamätajte na to, že Ďuro vždy bral z kôpky len vrchný perníček, a nezabudnite rátať aj s možnosťou, že už boli zbalené všetky perníčky.

### Riešenie.

opravuje **Mišo M.** ([michal.molnar@trojsten.sk](mailto:michal.molnar@trojsten.sk))

Na začiatok sa zamyslime nad tým, kde sa môžu jednotlivé perníčky nachádzať. Perníček číslo 8 už je v batôžku. Pred tým, ako ho tam Ďuro vložil sa musel nachádzať na kôpke. Predtým, ako mama vyložila na kôpku perník číslo 8, musela na kôpku uložiť perníčky 1 až 7. Vieme teda, že tieto perníčky sú buď na kôpke, alebo v batôžku. O perníčku číslo 9 nevieme nič. Môže byť už zbalený, môže byť na kôpke, ale nemusel sa zatiaľ dostať ani tam.

Zabudnime teda na chvíľu na číslo 9 a pozrime sa na to, ktoré perníčky z 1 až 7 môžu byť na kôpke. Ďuro určite mohol zobrať perníček hneď po tom, ako ho mama dala na kôpku. Takže ktorýkoľvek perníček môže byť v batôžku. Rovnako tak mohol Ďuro s balením počkať, kým mama nepridala ďalší, čiže ktorýkoľvek perníček môže byť stále na kôpke, bez ohľadu na to, ktoré perníčky zbalil. Pre každý z týchto sedem perníčkov tak máme dve nezávislé možnosti – buď je na kôpke alebo v batôžku – čiže máme dokopy  $2^7 = 128$  možností. Zároveň si uvedomme, že pre každú z týchto možností je aj poradie na kôpke dané jednoznačne. Ani Ďuro, ani mama uberaním či pridávaním nemenia poradie perníčkov, takže sú zoradené zdola nahor od najmenšieho čísla po najväčšie.

Tým pádom je aj vzájomné poradie balenia perníčkov 1 až 7 dané jednoznačne pre každú možnosť. Otázkou zostáva, kedy zabalíme perníček číslo 9. Ak už je zbalený, tak máme 128 možností, ako zabalíť zvyšné. Ak už je na kôpke, tak je určite navrchu, takže najprv zabalíme jeho a potom pre zvyšné perníčky máme ďalších 128 možností. Ak však na kôpke nie je, tak výsledné poradie závisí od toho, kedy ho tam mama položí.

### Dopočítanie pomocou kombinačných čísel

Označme  $k$  počet perníčkov, ktoré sú na kôpke. Ďuro zabalí niekoľko z nich predtým, ako mama na kôpku položí perník číslo 9. Potom musí Ďuro zbalíť ten, a už mu zostane len dobaľiť zvyšok. Ak mama položí perník číslo 9 predtým, ako Ďuro zabalí aspoň jeden perník z kôpky, výsledné poradie bude rovnaké, ako by tam perník už ležal od začiatku. Zaujímajú nás teda možnosti, kedy mama uloží perník po prvom, po druhom, ..., po  $k$ -tom zbalenom perníku. Takže máme  $k$  nových možností.

Pre konkrétne  $k$  máme  $\binom{7}{k}$  možností, ktoré perníčky sú na kôpke. Pre každú možnú kôpku zas máme  $k$  možností, kedy sa na nej objaví perníček číslo 9. Dokopy je to  $k \cdot \binom{7}{k}$  možných poradí. Počítajme teda:

- Ak  $k = 1$ , dostaneme  $1 \cdot \binom{7}{1} = 7$  poradí.
- Ak  $k = 2$ , dostaneme  $2 \cdot \binom{7}{2} = 42$  poradí.

- Ak  $k = 3$ , dostaneme  $3 \cdot \binom{7}{3} = 105$  poradí.
- Ak  $k = 4$ , dostaneme  $4 \cdot \binom{7}{4} = 140$  poradí.
- Ak  $k = 5$ , dostaneme  $5 \cdot \binom{7}{5} = 105$  poradí.
- Ak  $k = 6$ , dostaneme  $6 \cdot \binom{7}{6} = 42$  poradí.
- Ak  $k = 7$ , dostaneme  $7 \cdot \binom{7}{7} = 7$  poradí.

Dokopy tak máme  $2 \cdot 128 + 7 + 42 + 105 + 140 + 105 + 42 + 7 = 704$  poradí, v ktorých mohol Ďuro zabaliť zvyšné perníčky.

### Dopočítanie bez kombinačných čísel

Možnosti, kedy je perníček číslo 9 na kôpke alebo zbalený, už máme spočítané. Rovnako ako vyššie si uvedomíme, že ak perníček číslo 9 položí mama na kôpku skôr ako Ďuro zabalí prvý perníček, tak dostaneme rovnaké poradie, ako keby tam perníček číslo 9 už ležal od začiatku.

V opačnom prípade existuje nejaký perníček s číslom  $x$  (od 1 po 7), ktorý Ďuro zbalí tesne predtým, ako sa na kôpke objaví číslo 9. Výsledné poradie balenia teda bude: najprv perníčky s číslom väčším ako  $x$  (ak také na kôpke sú), potom perníček s číslom  $x$ , potom číslo 9, a nakoniec perníčky s číslom menším ako  $x$  (ak také sú). Pre dané číslo  $x$  teda poradie závisí len na tom, ktoré perníčky boli okrem neho na začiatku na kôpke. Každý zo zvyšných 6 perníčkov tam buď bol, alebo už bol zbalený, takže máme  $2^6 = 64$  možností. Číslo  $x$  zas môžeme vybrať 7 spôsobmi. Pribudne nám teda  $7 \cdot 64 = 448$  možností.

Hľadaný počet možných poradí tak je  $2 \cdot 128 + 7 \cdot 64 = 704$ .

## 3.5 Kamenný Múr Sfúkne ( $\kappa \leq 6$ )

### Zadanie.

Ďuro Truľo kráčal jesenným hájom, listy padali a vtáčiky príjemne vyspevovali. Po dlhom pochode sa vynoril na čistinke tiahnucej sa pomedzi stromy. Spoza jedného buka sa k nemu vrhol vlk a povedal: „Krásne ráno, mladý pán, nemáte záujem o prácičku? Potrebujem pomôcť rozfúkať dom jednému prasatu.“ Ďuro na neho vyceril zuby a riekol: „OK, môžem.“

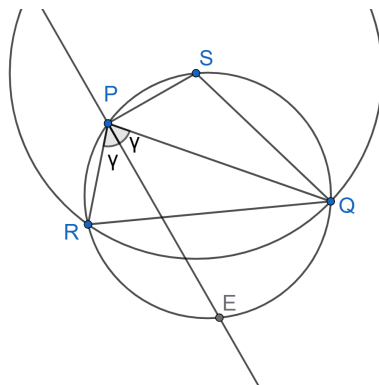
Ďuro sa teda vybral s vlkom, aby si obzrel prácu, čo ho čaká. Dom bol kruhová kamenná stavba – jeho vonkajší múr mal tvar kružnice  $k$  so stredom v bode  $S$ . Na jeho obvode v bodoch  $R$  a  $Q$  mal okná, tie však boli zadenbené. Prasiatko  $P$  bolo niekde vo vnútri, ale nie v bode  $S$ . V bode  $S$  bol komín a vlk sa doň už pozeral, takže vedel, že prasiatko sa nachádzalo v takom bode, že štvoruholník  $SPQR$  bol tetivový. Dokážte, že os  $\sphericalangle RPQ$  bola kolmá na  $SP$ .

### Riešenie.

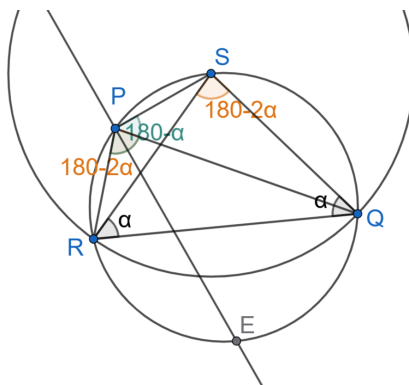
opravuje **Mati** ([matus.zelko@trojsten.sk](mailto:matus.zelko@trojsten.sk))

Riešenie 1: Pokiaľ máme šťastie a poznáme Švrčkov bod, tak tento príklad má veľmi elegantné riešenie. Uvážme bod  $E$  priesečník osi uhla  $\sphericalangle QPR$  a kružnice  $k_1$  opísanej trojuholníku  $RQP$ . Tento bod sa nazýva Švrčkov bod a je o ňom mimo iné známe, že leží v strede zodpovedajúceho kružnicového oblúka. Keďže platí  $|AC| = |AB|$ , tak aj bod  $A^1$ , je v strede oblúku opačného oblúku na ktorom leží bod  $E$ . Špeciálne úsečka  $AE$  je priemerom kružnice  $k_1$  a podľa Tálesovej vety je teda uhol  $ADE$  pravý.

<sup>1</sup>ide o anti-Švrčkov bod



Riešenie 2: Ak Švrčkov bod nepatrí medzi zbrane ktorými disponujeme, tak bolo dôležité nezúfať. Riešenie bolo možné relatívne priamočiaro vyuhliť. Označme  $|\sphericalangle SRQ| = \alpha$ , trojuholník  $RQS$  je rovnoramenný, takže aj  $|\sphericalangle RQS| = \alpha$  a  $|\sphericalangle RSQ| = 180^\circ - 2\alpha$ . Ďalej vďaka obvodovosti príslušných uhlov platí  $|\sphericalangle RSQ| = |\sphericalangle RPQ| = 180^\circ - 2\alpha$ . Keďže štvoruholník  $RQSP$  je tetivový, dostávame  $|\sphericalangle SPR| = 180^\circ - |\sphericalangle RQS| = 180^\circ - \alpha$ . Nakoniec si uvedomme, že  $|\sphericalangle RPE| = 1/2 |\sphericalangle RPQ| = 90^\circ - \alpha$ , ide o os uhla. Posledným výpočtom dostávame  $|\sphericalangle SPE| = |\sphericalangle SPR| - |\sphericalangle EPR| = 180^\circ - \alpha - 90^\circ + \alpha = 90^\circ$ .



### 3.6 Kráča Mocný Silák

### Zadanie.

*Ďuro Truľo sa vracal domov naplnený pýchou a hrdosťou. Práve vykonal dobrý skutok! A na dôvažok neodchádzal naprázdno, v batôžku (presne ako ho naučila jeho mama) ťahal domov jedno celé prasa. Po úspešnom rozfúkání domu sa totiž ukázalo, že sa v ňom neskrýva jedno, ale hneď tri. Cesta však bola tentoraz úmorná. Niešť si domov prasa na chrbte, to je veru fuška aj pre tých najmocnejších junákov. Keď sa doma mame poťažoval na to, ako náročnú mal cestu, tá hneď vedela, kde je chyba.*

„Nuž, Ďurko môj, neradno nosiť domov takú výslužku, ktorá sa vie niesť sama. Stačí, keď prasiatko priviažeš na špagátik, a ono pôjde s tebou. Samozrejme, ak bude mať špagátik tie správne parametre.“

*Pri priväzovaní prasäta na špagätik sú dôležité najmä časť dĺžky  $p$ , za ktorú prasa popoťahujeme, a časť dĺžky  $n$ , ktorú bude mať na krku. Aby prasa neutieklo, musí byť  $p$  prvočíslo,  $n$  kladné celé číslo a navyše musí platiť*

$$4n^3 + p^3 = 3np^2.$$

Nájdite pre Ďura všetky vhodné dvojice  $(p, n)$ .

**Riešenie.** opravujú **Kubko** ([jakub.poljovka@trojsten.sk](mailto:jakub.poljovka@trojsten.sk)) a **MichalS** ([michal.stanik@trojsten.sk](mailto:michal.stanik@trojsten.sk))

Na začiatok by sme chceli preskúmať vzťah medzi  $n$  a  $p$ . Tu nám môže pomôcť presunúť členy, ktoré obsahujú len jednu neznámu, na rovnakú stranu a sledovať, čo sa deje na tej druhej. Prepíšme si teda rovnicu v zadaní do tvaru

$$4n^3 = 3np^2 - p^3.$$

Vidíme, že pravá strana je deliteľná  $p$  (dokonca aj  $p^2$ ), takže aby platila rovnosť, musí byť aj ľavá strana rovnice deliteľná  $p$ . Keďže sa jedná o prvočíslo, musí sa nachádzať v prvočíselnom rozklade čísla  $n^3$  alebo 4 (alebo dokonca v oboch). My sa pozrieme najprv na prvú možnosť.

Aby bolo  $p$  v prvočíselnom rozklade  $n^3$ , musí byť aj v rozklade čísla  $n$ . V takom prípade nutne  $p \leq n$ , inak by nemohlo byť jeho deliteľom. Tento fakt môžeme využiť, keď si zo zadania vyjadríme  $p^3$ . Dostávame

$$p^3 = 3np^2 - 4n^3 \leq 3n^3 - 4n^3 = -n^3.$$

Keďže  $n$  je kladné celé číslo,  $-n^3$  je záporné, takže aj  $p^3$  musí byť záporné, aby platila táto nerovnosť. Avšak všetky prvočísla sú kladné, čiže takéto  $p$  nemôže existovať. Vidíme teda, že  $p$  nemôže byť deliteľom  $n^3$  ani  $n$ .

Tým pádom musí nastať druhá možnosť, totiž že  $p$  je v prvočíselnom rozklade čísla 4. To znamená, že  $p = 2$ . Keď poznáme  $p$  vieme si napísať rovnicu pre  $n$  a vyriešiť

$$4n^3 + 8 = 12n.$$

Po vydelení 4 dostaneme

$$n^3 + 2 = 3n.$$

Samozrejme, toto je kubická rovnica, pre ktorú existujú vzorce na vyjadrenie riešenia. Mohli by sme použiť tie a skontrolovať, ktoré riešenia nám dá kladné celé číslo. My radšej ukážeme postup, ktorý znalosť týchto vzorcov nevyžaduje.

Všimnime si, že rovnicu vieme upraviť do tvaru

$$2 = 3n - n^3.$$

Vidíme, že  $n$  je deliteľom pravej strany, takže aby platila rovnosť vyššie, musí byť zároveň deliteľom čísla 2. Keďže sa jedná o kladné celé číslo, máme len dve možnosti 1 alebo 2. Lahko overíme, že vyhovuje len  $n = 1$ . Jediným riešením úlohy tak je dvojica  $(p, n) = (2, 1)$ .

### 3.7 Kýblikova Múdra Stratégia

**Zadanie.**

Ďuro Truľo kráčal zelenými kopcami, svrčky cvrlikali a mráčky príjemne tienili. Po dlhom pochode sa dostal k úbočiu, do ktorého viedli banské štôľne. Spoza rohu vystrčil hlavu trpaslík, a keď Ďura zbadal, rozbehol sa za ním. Povedal mu: „Ach jaj, hrozné nešťastie sa stalo. Našej Snehulienke niekto uškodil a ona teraz zomiera. Prosím, pomôžte jej, zachráňte ju.“ Ďuro na neho vyceril zuby a riekol: „OK, môžem.“

Kým Ďuro rozmyšľal, ako zachráni krásnu dievčinu, trpaslíci potrebovali zahnať nudu. Hapčí a Kýblik mali 10 drahokamov s číslami 0, 1, ..., 9, s ktorými hrali takúto hru: Najprv Hapčí vybral ľubovoľný drahokam a položil ho na stôl. Následne Kýblik zvolil jeden zo zvyšných drahokamov a položil ho sprava od prvého. Potom zase Hapčí vybral drahokam a položil ho zľava od všetkých uložených drahokamov, následne Kýblik vybral drahokam a položil ho sprava od všetkých predchádzajúcich, atď.

Po tom, ako boli všetky drahokamy vyložené, vzniklo 10-ciferné číslo (resp. 9-ciferné, ak prvý drahokam zľava mal číslo nula). Kýblik chcel, aby toto číslo bolo deliteľné čo najviac číslami z množiny  $M = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ . Hapčí, naopak, chcel, aby bolo deliteľné čo najmenej číslami z  $M$ . Koľko najviac deliteľov výsledného čísla vedel dosiahnuť Kýblik, nech by Hapčí hral akokoľvek? A koľko najmenej deliteľov výsledného čísla vedel dosiahnuť Hapčí, nech by Kýblik hral akokoľvek?

**Riešenie.**

### 3.8 Kúsok Mrzutá Snehulienka

**Zadanie.**

Ďuro Trulo sa vracal domov naplnený pýchou a hrdosťou. Práve vykonal dobrý skutok! A na dôvažok neodchádzal naprázdno, na špagátiku (s parametrami presne podľa rady jeho mamy) si domov viedol nevestu – Snehulienku. Tej po jej záchrane nijak neprekážalo, že Ďuro nie je princ, naopak, bola mimoriadne nadšená z toho, že žije. No ako tak kráčali, vyzerala stále viac a viac zarmútené. Keď ju doviedol do dvora a stiahol jej špagátik z krku, s plačom mu ušla. Jeho dobrá mama len nešťastne pokrútila hlavou.

„Joj, Ďurko môj, takto sa s dievčinami nezaobchádza. Chudera sa od hanby isto túži pod zem prepadnúť. Svoju milú si máš viesť za ruku, hladiť ju a bozkávať... Pod sem, nech ti nakreslím ako.“

Ďuro si môže predstaviť svoju vyvolenú ako lichobežník ABCD so základňami AB, CD, ktorého uhlopriečky sú navzájom kolmé. Bozkávať ju smie iba v bodoch P, N, Q, M, ktoré sú postupne stredmi strán AB, BC, CD, DA. Na základni CD existuje špeciálny bod L, rozdielny od bodu Q, pre ktorý platí, že  $\angle MLN$  je pravý. (Tento bod sa nazýva dľaň a za ňu vyvolenú treba držať.) Určte veľkosť uhla LPA.

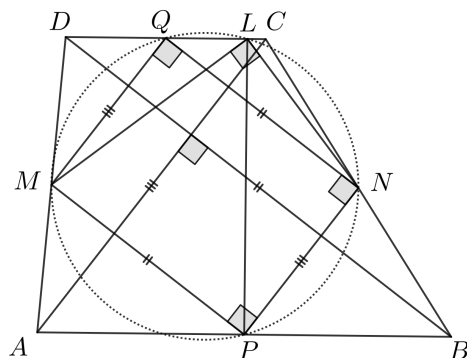
**Riešenie.**

opravuje Lukáš ([lukas.gaborik@trojsten.sk](mailto:lukas.gaborik@trojsten.sk))

V zadaní úlohy vidíme pomerne veľa pravých uhlov, skúsme teda zistiť, ako ich vieme dostať bližšie k sebe. Jeden z pravých uhlov zvierajú priamky AC a BD, stojí teda za pokus skúsiť v obrázku nájsť nejaké ich rovnobežky.

A také tam naozaj sú – napríklad MQ je stredná priečka trojuholníka ACD, preto je rovnobežná s prislúchajúcou stranou AC. Rovnako vieme dostať aj  $NP \parallel AC$  a  $BD \parallel MP \parallel NQ$ . Z toho však jednoducho vyplýva, že aj  $\angle MPN$ ,  $\angle PNQ$ ,  $\angle NQM$  a  $\angle QMP$  sú pravé, čiže MPNQ je obdĺžnik.

No ešte máme bod L, ktorý nemáme v ďalšom súvis s obrázkom, okrem toho, že  $|\angle MLN| = 90^\circ$ . Všimnime si však, že nad MN je okrem bodu L pravý uhol aj pri bode Q, čo nám hovorí, že body L a Q ležia na Tálesovej kružnici nad priemerom MN. Táto kružnica však zdieľa tri body M, N, Q s kružnicou opísanou obdĺžniku MPNQ, preto na kružnici leží až päť bodov, a to L, M, N, P a Q.



Teraz nám už však na určenie hľadaného uhla nechýba veľa. Totiž všimnime si, že aj  $\angle PNQ$  je pravý. To však znamená, že priemerom uvažovanej kružnice je aj úsečka  $PQ$ . Preto aj všetky uhly nad ňou sú pravé, čím vieme preniesť uhol k žiadanej úsečke  $PL$  ako  $|\angle PLQ| = 90^\circ$ . A nakoniec už veľkosť hľadaného uhla ľahko vyplynie z rovnobežiek  $AB \parallel CD$  preťatých pričkou  $LP$ , čiže  $|\angle LPA| = 90^\circ$ .

### 3.9 Koza Milého Starčeka

#### Zadanie.

Ďuro Trulo kráčal rozkvitnutými humnami, stromy sa zeleneli a kvietky príjemne rozvoniavali. Po dlhom pochode sa dostal až na okraj dediny, kde sa nachádzala inokedy opustená studňa. Tentoraz pri nej stáli dvaja páni a jeden starček. Hneď, ako starček zbadal príchodzieho, spýtal sa ho: „Mladý muž, nevideli ste tu niekde moju kozu? Nevieť ju nikde nájsť... Pomohli by ste mi ju pohľadať?“ Ďuro na neho vyceril zuby a riekol: „OK, môžem.“

Dvaja prístojaci Ďurovi poradili, že koza skočila do studne, a že ju stačí odtiaľ len vytiahnuť. Studňa vyzerala ako nenulový polynóm s reálnymi koeficientmi, nazvime ho  $p(x)$ . Na to, aby Ďuro vedel kozu zo studne vytiahnuť, veľmi by sa mu hodilo, aby bol v tvare  $p(x) = a(x) + b(x)$ , pričom  $a(x)$  a  $b(x)$  sú druhé mocniny polynómov s reálnymi koeficientami. Vtom sa však zháčil – existuje taký polynóm  $p(x)$ , že sa dá takto rozdeliť práve jedným spôsobom? A čo práve dvoma spôsobmi?

Poznámka: Ak sa dve rozdelenia líšia iba v poradí sčítancov, tak ich považujeme za totožné.

#### Riešenie.

opravuje Džavo ([adam.dzavoronok@trojsten.sk](mailto:adam.dzavoronok@trojsten.sk))

Nech sa dá  $p$  vyjadriť ako súčet  $a(x) + b(x)$ , kde  $a, b$  sú druhé mocniny polynómov s reálnymi koeficientmi. Označme si  $a(x) = h(x)^2$  a  $b(x) = g(x)^2$ . Keďže  $p$  je nenulový, tak aspoň jeden z dvojice  $g, h$  je tiež. Hlavnou ideou riešenia si bolo povedať, že je nepravdepodobné, aby sa to dalo iba jedným či dvoma spôsobmi. Keď sa pozrieme na prípad bez druhých mocnín, kde môžeme zapísať nenulový polynóm  $q(x)$  ako  $q(x) = c(x) + d(x)$  a nekladíme žiadne reštrikcie na  $c, d$ , tak následne položením  $e(x) = uc(x) + vd(x)$  a  $f(x) = (1-u)c(x) + (1-v)d(x)$  pre  $u, v \in \mathbb{R}$  dostávame nekonečne veľa ďalších dvojíc polynómov s reálnymi koeficientami, ktorých súčet je znova  $q(x)$ .

Tak poďme skúsiť niečo podobné aj pre náš príklad. Vhodne si navážime  $g, h$  aby sme dostali podobné polynómy  $e, f$  ako vyššie, ale musíme si dať pozor na umocňovanie. Vieme skúsiť vhodne navážiť  $g, h$  a dať ich spolu ako jeden polynóm a ten druhý nejak doplniť, aby to vyšlo. Takýto prístup vedie k nasledovnému riešeniu

$$e(x) + f(x) = \left( \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} h(x) + \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} g(x) \right)^2 + \left( \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} h(x) - \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} g(x) \right)^2 = h(x)^2 + g(x)^2 = p(x),$$

kde  $u, v \in \mathbb{R}$ . Aby sme sa presvedčili, že polynómy budú naozaj rôzne, tak sa stačí pozrieť na vedúci koeficient vo vnútri jednej zo zátvoriek. Jeho druhá mocnina bude vedúci koeficient  $u$  resp  $f$ . To, že budú navzájom odlišné, sa dá vidieť, napríklad ak zafixujeme  $v = 1$  a budeme meniť  $u$ . Následne, ak  $h_n, g_n$  sú vedúce koeficienty  $h, g$  (prípadne aj jeden nulový, ak je jeden polynóm vyššieho stupňa), tak vedúci koeficient vnútri prvej zátvorky  $\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}h_n + \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}g_n$  je funkcia v  $u$ , ktorá pre BUNV  $h_n > 0$  nadobúda hodnoty z intervalu  $(-h_n, h_n)$ , z čoho sme hotoví.

### 3.10 Kedy Máme Svadbu?

#### Zadanie.

*Ďuro Trúlo sa vracal domov naplnený pýchou a hrdosťou. Práve vykonal dobrý skutok! A na dôvažok neodchádzal naprázdno, domov kráčal ruka v ruke (presne, ako mu to mama nakreslila) s Lízinkou, ktorú zachránil zo studne. Nechcel, aby sa jeho milá zaňho hanbila, ani aby mu ušla ako minule.*

*Osud zadal celé číslo  $k \geq 2$ . Nájdite všetky funkcie  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  vedúce k láske. Na to, aby funkcia viedla k láske, musí spĺňať, že  $f(x_1)! + f(x_2)! + \dots + f(x_k)! \mid f(x_1)! + f(x_2)! + \dots + f(x_k)!$  pre všetky  $k$ -tice prirodzených čísel  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ . Tak im držíme palce.*

#### Riešenie.

opravuje Michal Staník ([michal.stanik@trojsten.sk](mailto:michal.stanik@trojsten.sk))

Ako prvé si musíme uvedomiť, čo to tá hľadaná funkcia  $f$  má spĺňať. Keď sa v zadaní píše, že „je dané celé číslo  $k$ “ alebo „osud zadal celé číslo  $k$ “, tak to znamená, že  $k$  je parameter úlohy a ďalej je pevné. Nevieme ho meniť a všetky podmienky vzťahujúce sa na  $k$  (v našom prípade  $x_1! + \dots + x_n! \mid f(x_1)! + \dots + f(x_k)!$ ) platia len pre to konkrétne  $k$ , ktoré nám osud (niekto zvonka) zadal. Zmysel parametra je, že nehľadáme funkciu len pre jednu konkrétnu hodnotu, napríklad  $k = 3$ , ale riešime „nekonečne veľa podobných úloh“ s rôznymi hodnotami  $k$ . Naše riešenie musí byť pritom dosť všeobecné, aby sme dali (a dokázali) odpoveď pre každé prípustné  $k$  (teda také, že  $k \geq 2$ ).

Nech teda  $k \geq 2$  je ľubovoľné, naďalej pevné (takže ideme riešiť všeobecne) a  $f$  je funkcia vyhovujúca zadaniu. Vezmeme si ľubovoľné prirodzené číslo  $n$  a dosadíme do zadanej podmienky hodnoty  $x_1 = x_2 = \dots = x_k = n$ . Dostaneme  $kn! \mid k \cdot f(n)!$ , čiže ekvivalentne  $n! \mid f(n)!$ . Keďže obe strany sú kladné čísla, musí platiť  $n! \leq f(n)!$ . Z toho, že faktoriál je rastúca funkcia na kladných číslach, potom máme  $n \leq f(n)$ .

Ďalej ukážeme, že pre všetky dostatočne veľké prvočísla  $p$  – konkrétne pre  $p > f(1)$  platí  $f(p) = p$ . Dosadíme  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = p - 1$ ,  $x_3 = \dots = x_k = p$  (ak  $k = 2$ , tak  $p$  nepriradíme žiadnemu  $x_i$ ). Dostaneme

$$1! + (p-1)! + (k-2)p! \mid f(1)! + f(p-1)! + (k-2)f(p)!.$$

Pozrime sa teraz na zvyšky ľavej a pravej strany po delení  $p$ . Pritom využijeme Wilsonovu vetu, ktorá hovorí, že pre prvočísla platí  $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ .

$$1! + (p-1)! + (k-2)p! \equiv 1 - 1 + (k-2)p(p-1)! \equiv 0 \pmod{p},$$

$$f(1)! + f(p-1)! + (k-2)f(p)! \equiv f(1)! + f(p-1)! \equiv 0 \pmod{p}.$$

Druhá kongruencia plynie z toho, že  $f(p) \geq p$ , a teda  $f(p)!$  ako súčin obsahuje člen  $p$ , a teda má zvyšok 0.

Vidíme, že ľavá strana deliteľnosti je deliteľná  $p$ , teda aj pravá musí byť. Keďže  $p > f(1)$  a je to prvočíslo, nenachádza sa v súčine  $f(1)!$  (ani tam nevznikne ako súčin viacerých členov), tým pádom  $f(1)! \not\equiv 0$ , a teda aj  $-f(1)! \equiv f(p-1)! \not\equiv$

0. Ak by bolo  $f(p-1) \geq p$ , tak by bolo deliteľné  $p$  (opäť by  $p$  bolo v súčine). Preto  $f(p-1) = p-1$  (už vieme, že menej byť nemôže).

Prvočísel väčších ako  $f(1)$  je nekonečne veľa ( $f(1)$  je konkrétne číslo pre uvažovanú konkrétnu funkciu  $f$ ), tak už máme nekonečne veľa čísel takých, že  $f(p-1) = p-1$ . To už vyzerá, že  $f(n) = n$  pre všetky  $n$  – poďme to dokázať.

Pre spor, nech  $f(n) > n$  (menšie byť nemôže). Dosaďme  $x_1 = n, x_2 = \dots = x_k = p-1$  pre prvočíslo  $p > n+1, p > f(1)$  (dosť veľké prvočíslo vždy existuje). Máme

$$n! + (k-1)(p-1)! \mid f(n)! + (k-1)f(p-1)! = f(n)! + (k-1)(p-1)!,$$

$$n! + (k-1)(p-1)! \mid f(n)! + (k-1)(p-1)! - (n! + (k-1)(p-1)!),$$

$$n! + (k-1)(p-1)! \mid f(n)! - n!.$$

Stále máme dosť veľkú voľnosť pre prvočíslo  $p$  – môžeme ho voliť stále väčšie a väčšie, čím sa nám zväčšuje ľavá strana. Číslo  $f(n)! - n!$  má teda ľubovoľne veľkého deliteľa, takže to musí byť nula. Platí teda  $f(n)! = n!$  a z prostosti faktoriálu na prirodzených číslach (neexistujú  $a, b$  také, že  $a! = b!$ ) máme, že  $f(n) = n$  pre všetky prirodzené čísla  $n$  (keďže  $n$  sme si volili ľubovoľne).

Na záver už iba overíme, že funkcia  $f(n) = n$  spĺňa zadanie – vtedy na oboch stranách deliteľnosti máme to isté číslo  $x_1! + \dots + x_k!$ , takže deliteľnosť je splnená a toto je skutočne (jediná) vyhovujúca funkcia.