Korešpondenčný matematický seminár
XLVI. ročník, 2024/2025
KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Zadania 3. kola letnej časti

Termín odoslania 14. apríl 2025 (pre zahraničie 11. apríl 2025)
V prípade otázok k zadaniam nás neváhajte kontaktovať na kms@kms.sk.

3.1 Kilo Miešaných Strukovín ($\kappa \leq 0$)

kategória **alfa**

Ďuro Truľo kráčal krásnou krajinou, vtáčiky štebotali a slniečko príjemne hrialo. Po dlhom pochode po svojej pravej ruke uvidel statný statok, z ktorého vybehlo zarmútené ufúľané dievča. Pozrela naňho a povedala: „Prosím, prosím, nepomôžete mi roztriediť šošovičku, hrášok, fazuľu a prvočísla?“ Ďuro na ňu vyceril zuby a riekol: „OK, môžem.“

Pomôžte ufúľanej dievčine nájsť všetky prvočísla také, že sa dajú zapísať ako súčet nejakých dvoch prvočísel a zároveň aj rozdiel nejakých dvoch prvočísel (môžu a nemusia byť iné ako predošlé dve).

3.2 Kruto Majetok Stratil ($\kappa \leq 0$)

kategória **alfa**

Ďuro Truľo sa vracal domov naplnený pýchou a hrdosťou. Práve vykonal dobrý skutok! A na dôvažok neodchádzal naprázdno, medzi prstami (opatrne, aby ho nepokrčil) držal svoj prvý zárobok – pravé pierko z prepeličky. Bol už na dohľad od domu, keď nastala galiba. Zafúkalo. Vietor zdvihol pierko do výšin a odniesol ho preč, na míle ďaleko od nešťastného Ďura. Toto všetko videla jeho dobrá mama, ktorá ho už vyzerala pred domom. Rozhodla sa teda synovi dať radu do života.

„Pozri, Ďurko môj, tvoj klobúk má tvar rovnobežníka $ABCD$. Nabudúce si zapichni pierko do bodu K alebo L, ktoré ležia postupne na stranách BC a CD. Vidíš, ako platí $|AB| + |BK| = |AD| + |DL|$. Vďaka tomu ti odtiaľ nevypadne.“

Dokážte, že os uhla $\sphericalangle BAD$ je kolmá na priamku KL.

3.3 Karbonátky Miesto Spratka ($\kappa \leq 1$)

kategórie **alfa** a **beta**

Ďuro Truľo kráčal hustým lesom, kukučky kukali a vetrík príjemne povieval. Po dlhom pochode došiel až k malej chalúpke rozvoniavajúcej medom. Hneď, ako sa priblížil, vyšla z nej stará pani a prosí ho: „Och, mladý pán, prosím, pomôžete mi? Mám vnútri takého drzého fagana, nepomohli by ste mi ho strčiť do pece?“ Ďuro na ňu vyceril zuby a riekol: „OK, môžem.“

Vnútri chalúpky stál chlapec, pozeral sa na pec a nariekal: „Pani ježibaba, tá pec nemá ani správnu výšku, ani správnu šírku, ani správnu teplotu a ani správny tlak na moju váhu, vek, výživovú hodnotu a počet spapaných perníkov.“

Ježibaba sa pozrela na svoju pec a spolu s Ďurom sa snažili nájsť správne nastavenie pre zadané reálne čísla a, b, c, d. To znamená, že sa pomocou nich snažia vyjadriť všetky štvorice reálnych čísel (x, y, z, w), pre ktoré platí

$$y^2z^2w^2x = a^7,$$

$$z^2w^2x^2y = b^7,$$

$$w^2x^2y^2z = c^7,$$

$$x^2y^2z^2w = d^7.$$

Nájdite pre ježibabu tieto štvorice.

3.4 Kabelu Medovníkmi Sýti ($\kappa \leq 2$) kategórie **alfa** a **beta**

Ďuro Truľo sa vracal domov naplnený pýchou a hrdosťou. Práve vykonal dobrý skutok! A na dôvažok neodchádzal naprázdno, za klobúkom (presne, ako ho mama poučila) mal zapichnutý svoj druhý zárobok – pravý sladký perník. Pýcha a hrdosť mu však nevydržali dlho. Hneď, ako došiel do dediny, začali z domov vychádzať ľudia, ukazovať na neho prstom a potichu sa na ňom chichotať. Ďuro bol z toho celý nešťastný a hneď, ako sa dostal domov, posťažoval sa svojej dobrej mame na to, ako mu minule poradila.

„Ach, Ďurko môj, za klobúk patria pierka, nie jedlo. To si máš pekne uložiť do batôžka. Poď, nech ťa naučím ako.“

A tak mama s Ďurkom nacvičovali vkladanie perníčkov do batôžka. Perníčky sú očíslované číslami 1, 2, …, 9. Mama ich v tomto poradí v náhodných časových intervaloch pokladala Ďurovi na kôpku, vždy nový perníček pekne navrch. Ďuro zas v náhodných časových intervaloch z kôpky zobral najvrchnejší perník a vložil si ho do batôžka, pričom medzi dvoma vkladaniami mama mohla stihnúť pridať ďalšie perníky na kôpku, ale nemusela. Po čase im vyhladlo, tak si dali prestávku na obed. Po jedle sa Ďurovi strachom rozšírili oči – vôbec si nepamätá, ktoré perníčky už odložil, ani či jeho mame zostávajú nejaké perníčky, ktoré ešte na kôpku nepoložila. Našťastie si spomenul, že perníček číslo 8 už je v batôžku (no nebol presvedčený, že úplne navrchu). Ďuro sa zamyslel, ktoré perníčky mu ostávajú a v akom poradí by ich mohol zbaliť. Na základe predchádzajúcich informácií povedzte Ďurovi, koľko existuje poradí, v ktorých by ostávajúce perníčky mohli byť zbalené.

Poznámka: Pamätajte na to, že Ďuro vždy bral z kôpky len vrchný perníček, a nezabudnite rátať aj s možnosťou, že už boli zbalené všetky perníčky.

3.5 Kamenný Múr Sfúkne ($\kappa \leq 6$) kategórie **alfa** a **beta**

Ďuro Truľo kráčal jesenným hájom, listy padali a vtáčiky príjemne vyspevovali. Po dlhom pochode sa vynoril na čistinke tiahnucej sa pomedzi stromy. Spoza jedného buka sa k nemu vrhol vlk a povedal: „Krásne ráno, mladý pán, nemáte záujem o prácičku? Potrebujem pomôcť rozfúkať dom jednému prasaťu.“ Ďuro na neho vyceril zuby a riekol: „OK, môžem.“

Ďuro sa teda vybral s vlkom, aby si obzrel prácu, čo ho čaká. Dom bol kruhová kamenná stavba – jeho vonkajší múr mal tvar kružnice k so stredom v bode S. Na jeho obvode v bodoch R a Q mal okná, tie však boli zadebnené. Prasiatko P bolo niekde vo vnútri, ale nie v bode S. V bode S bol komín a vlk sa doň už pozeral, takže vedel, že prasiatko sa nachádzalo v takom bode, že štvoruholník $SPQR$ bol tetivový. Dokážte, že os $\sphericalangle RPQ$ bola kolmá na SP.

3.6 Kráča Mocný Silák

kategórie **alfa** a **beta**

Ďuro Truľo sa vracal domov naplnený pýchou a hrdosťou. Práve vykonal dobrý skutok! A na dôvažok neodchádzal naprázdno, v batôžku (presne ako ho naučila jeho mama) ťahal domov jedno celé prasa. Po úspešnom rozfúkaní domu sa totiž ukázalo, že sa v ňom neskrýva jedno, ale hneď tri. Cesta však bola tentoraz úmorná. Niesť si domov prasa na chrbte, to je veru fuška aj pre tých najmocnejších junákov. Keď sa doma mame posťažoval na to, ako náročnú mal cestu, tá hneď vedela, kde je chyba.

„Nuž, Ďurko môj, neradno nosiť domov takú výslužku, ktorá sa vie niesť sama. Stačí, keď prasiatko priviažeš na špagátik, a ono pôjde s tebou. Samozrejme, ak bude mať špagátik tie správne parametre."

Pri priväzovaní prasaťa na špagátik sú dôležité najmä časť dĺžky p, za ktorú prasa *popoťahujeme*, a časť dĺžky n, ktorú bude mať *na krku*. Aby prasa neutieklo, musí byť p prvočíslo, n kladné celé číslo a navyše musí platiť

$$4n^3 + p^3 = 3np^2.$$

Nájdite pre Ďura všetky vhodné dvojice (p, n).

3.7 Kýblikova Múdra Stratégia

kategórie **alfa** a **beta**

Ďuro Truľo kráčal zelenými kopcami, svrčky cvrlikali a mráčiky príjemne tienili. Po dlhom pochode sa dostal k úbočiu, do ktorého viedli banské štôlne. Spoza rohu vystrčil hlavu trpaslík, a keď Ďura zbadal, rozbehol sa za ním. Povedal mu: „Ach jaj, hrozné nešťastie sa stalo. Našej Snehulienke niekto uškodil a ona teraz zomiera. Prosím, pomôžte jej, zachráňte ju." Ďuro na neho vyceril zuby a riekol: „OK, môžem."

Kým Ďuro rozmýšľal, ako zachráni krásnu dievčinu, trpaslíci potrebovali zahnať nudu. Hapčí a Kýblik mali 10 drahokamov s číslami 0, 1, …, 9, s ktorými hrali takúto hru: Najprv Hapčí vybral ľubovoľný drahokam a položil ho na stôl. Následne Kýblik zvolil jeden zo zvyšných drahokamov a položil ho sprava od prvého. Potom zase Hapčí vybral drahokam a položil ho zľava od všetkých uložených drahokamov, následne Kýblik vybral drahokam a položil ho sprava od všetkých predchádzajúcich, atď.

Po tom, ako boli všetky drahokamy vyložené, vzniklo 10-ciferné číslo (resp. 9-ciferné, ak prvý drahokam zľava mal číslo nula). Kýblik chcel, aby toto číslo bolo deliteľné čo najviac číslami z množiny $M = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$. Hapčí, naopak, chcel, aby bolo deliteľné čo najmenej číslami z M. Koľko najviac deliteľov výsledného čísla vedel dosiahnuť Kýblik, nech by Hapčí hral akokoľvek? A koľko najmenej deliteľov výsledného čísla vedel dosiahnuť Hapčí, nech by Kýblik hral akokoľvek?

3.8 Kúsok Mrzutá Snehulienka

kategórie **alfa** a **beta**

Ďuro Truľo sa vracal domov naplnený pýchou a hrdosťou. Práve vykonal dobrý skutok! A na dôvažok neodchádzal naprázdno, na špagátiku (s parametrami presne podľa rady jeho mamy) si domov viedol nevestu – Snehulienku. Tej po jej záchrane nijak neprekážalo, že Ďuro nie je princ, naopak, bola mimoriadne nadšená z toho, že žije. No ako tak kráčali, vyzerala stále viac a viac zarmútene. Keď ju doviedol do dvora a stiahol jej špagátik z krku, s plačom mu ušla. Jeho dobrá mama len nešťastne pokrútila hlavou.

„Joj, Ďurko môj, takto sa s dievčinami nezaobchádza. Chudera sa od hanby isto túži pod zem prepadnúť. Svoju milú si máš viesť za ruku, hladiť ju a bozkávať…Poď sem, nech ti nakreslím ako.“

Ďuro si môže predstaviť svoju vyvolenú ako lichobežník $ABCD$ so základňami AB, CD, ktorého uhlopriečky sú navzájom kolmé. Bozkávať ju smie iba v bodoch P, N, Q, M, ktoré sú postupne stredmi strán AB, BC, CD, DA. Na základni CD existuje špeciálny bod L, rozdielny od bodu Q, pre ktorý platí, že $\sphericalangle MLN$ je pravý. (Tento bod sa nazýva dlaň a za ňu vyvolenú treba držať.) Určte veľkosť uhla LPA.

3.9 Koza Milého Starčeka

kategória **beta**

Ďuro Truľo kráčal rozkvitnutými humnami, stromy sa zeleneli a kvietky príjemne rozvoniavali. Po dlhom pochode sa dostal až na okraj dediny, kde sa nachádzala inokedy opustená studňa. Tentoraz pri nej stáli dvaja páni a jeden starček. Hneď, ako starček zbadal príchodzieho, spýtal sa ho: „Mladý muž, nevideli ste tu niekde moju kozu? Neviem ju nikde nájsť…Pomohli by ste mi ju pohľadať?“ Ďuro na neho vyceril zuby a riekol: „OK, môžem.“

Dvaja prístojaci Ďurovi poradili, že koza skočila do studne, a že ju stačí odtiaľ len vytiahnuť. Studňa vyzerala ako nenulový polynóm s reálnymi koeficientmi, nazvime ho $p(x)$. Na to, aby Ďuro vedel kozu zo studne vytiahnuť, veľmi by sa mu hodilo, aby bol v tvare $p(x) = a(x) + b(x)$, pričom $a(x)$ a $b(x)$ sú druhé mocniny polynómov s reálnymi koeficientami. Vtom sa však zháčil – existuje taký polynóm $p(x)$, že sa dá takto rozdeliť práve jedným spôsobom? A čo práve dvoma spôsobmi?

Poznámka: Ak sa dve rozdelenia líšia iba v poradí sčítancov, tak ich považujeme za totožné.

3.10 Kedy Máme Svadbu?

kategória **beta**

Ďuro Truľo sa vracal domov naplnený pýchou a hrdosťou. Práve vykonal dobrý skutok! A na dôvažok neodchádzal naprázdno, domov kráčal ruka v ruke (presne, ako mu to mama nakreslila) s Lízinkou, ktorú zachránil zo studne. Nechcel, aby sa jeho milá zaňho hanbila, ani aby mu ušla ako minule.

Osud zadal celé číslo $k \geq 2$. Nájdite všetky funkcie $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vedúce k láske. Na to, aby funkcia viedla k láske, musí spĺňať, že $f(x_1)! + f(x_2)! + \cdots + f(x_k)!$ je deliteľné $x_1! + x_2! + \cdots + x_k!$ pre všetky k-tice prirodzených čísel $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Tak im držme palce.