



Riešenia 2. kola zimnej časti

2.1 Kóši Mučí Skalpelom ($\kappa \leq 0$)

Zadanie. Doktor Kóši mal čoraz častejšie problém sústrediť sa na svoju prácu. Dôvodom bol In Te, kráľov vezír, ktorý sa pozýval k nemu do laboratória.

„Potrebujem už len pár dní a všetko bude pripravené.“

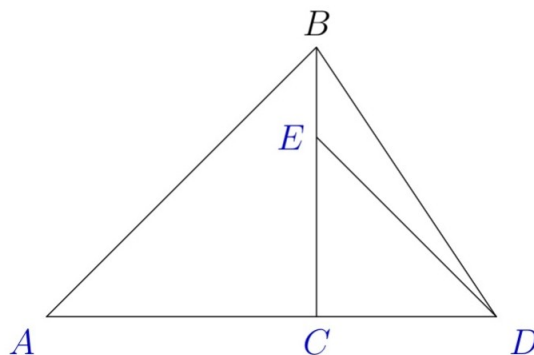
„Nemáš ,pár dní“. Kráľ očakáva svoju novú armádu...”

„Je to nematematické, spraviť z vazalov poddajných otrokov...”

„Ty sa nezaoberaj tým, čo matematické je a čo nie. To nie je Tvoja práca. Keď sa Ti úloha nepozdáva, zavolaj si na pomoc pána Švarca.“

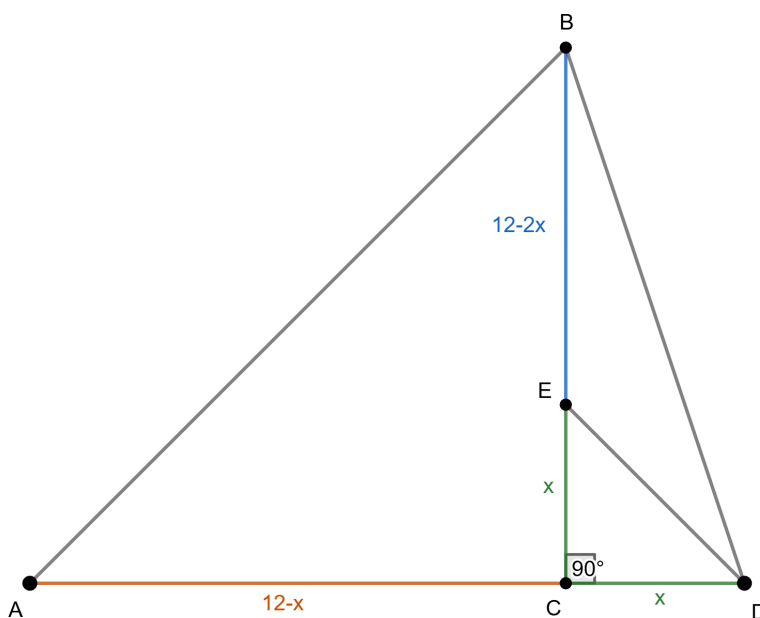
Pri tomto mene doktora zamrazilo. Ako mohol vezír vedieť o jeho alteregu? In Te odišiel a nechal Kóšiho osamote. Ten upriamil pozornosť späť na svoju prácu.

Doktor Kóši pozrel na svoj skalpel a zarezal ním do Trojuholníka ADB. Trojuholník ADB mal tuhý korienok. Jeho strana AD bola dlhá 12 cm. Avšak ani to trojuholníku nepomohlo. Kóši ním viedol dva rezy ako na obrázku, čím ho rozdelil na trojicu Trojuholníkov. Trojuholníky ACB a ECD boli pravouhlé, rovnoramenné a obsah Trojuholníka EDB bol 9 cm^2 . Aký bol obsah trojuholníka ABD?



Riešenie.

opravuje Matka (martina.ganova@trojsten.sk)



Zo zadania vieme, že trojuholník ACB je rovnoramenný a má pravý uhol pri bode C . Jeho ramenami sú strany AC a CB , a teda $|AC| = |CB|$. Zároveň aj trojuholník ECD je rovnoramenný a má pravý uhol pri bode C . Jeho ramenami sú strany CD a EC , čiže $|CD| = |EC|$. Strana AD má dĺžku 12 cm a $|AD| = |AC| + |CD|$. Dĺžku CD si môžeme označiť x a dĺžka AC bude tým pádom $|AC| = 12 - x$. Dĺžka BE je $|BE| = |BC| - |EC| = 12 - x - x = 12 - 2x$.

Zo zadania tiež vieme, že trojuholník EBD má obsah 9. Jeho obsah vieme vypočítať, pretože poznáme dĺžku jeho podstavy BE a výšky CD . Zo vzorca na obsah trojuholníka dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{|BE| \cdot |CD|}{2} &= 9, \\ \frac{(12 - 2x) \cdot x}{2} &= 9, \\ 12x - 2x^2 &= 18, \\ -2x^2 + 12x - 18 &= 0, \\ x^2 - 6x + 9 &= 0, \\ (x - 3)^2 &= 0.\end{aligned}$$

Jediným riešením tejto rovnice je $x = 3$. Dĺžka AC je potom $|AC| = 12 - 3 = 9$. Keďže AC a CB majú rovnakú dĺžku, vieme, že $|CB| = 9$.

Teraz už vieme zistiť obsah trojuholníka ADB , keďže poznáme dĺžku jeho podstavy AD a výšky CB na ňu.

$$S_{\triangle ADB} = \frac{|AD| \cdot |CB|}{2},$$

$$S_{\triangle ADB} = \frac{12 \cdot 9}{2},$$

$$S_{\triangle ADB} = 54.$$

Trojuholník ADB má obsah 54 cm^2 .

2.2 Kreslíme Množiny Skvostné ($\kappa \leq 0$)

Zadanie. *Grafik Peter Senov bol medzitým na svojej pravidelnej návšteve u kolegu z Geometrie. Aj keď krajina sa pod vládou Al-Gebry zmenila, na rozhovore dvoch umelcov to nebolo badať. Petrov priateľ Feuer Sebastian mal ako vždy veľmi podnetné otázky.*

„Pozri, Peter, je všeobecne známe, že keď máš v rovine rozsypanú množinu čísel $\{1, 2, \dots, 30\}$, tak jej podmnožina je pekná, ak sa v nej nenachádza žiadne číslo zároveň s jeho trojnásobkom. V čom je však ozajstné umenie, je vedieť nájsť najväčšiu peknú podmnožinu. Koľko najviac prvkov môže mať pekná podmnožina? Koľko rôznych pekných podmnožín s týmto počtom prvkov existuje?“

Riešenie. opravujú **David** (david.belobrad@trojsten.sk) a **Adri** (adrianka.janackova@trojsten.sk)

Na začiatok rozdelíme našu množinu $\{1, \dots, 30\}$ na disjunktné (navzájom rôzne) podmnožiny tak, aby každá podmnožina obsahovala rastúcu postupnosť takú, že každý jej člen je 3-násobkom predchádzajúceho, teda

$$\{1 \rightarrow 3 \rightarrow 9 \rightarrow 27\}, \{2 \rightarrow 6 \rightarrow 18\}, \{4 \rightarrow 12\}, \{5 \rightarrow 15\}, \{7 \rightarrow 21\}, \{8 \rightarrow 24\}, \{10 \rightarrow 30\}, \quad (2.1)$$

$$\{11\}, \{13\}, \{14\}, \{16\}, \{17\}, \{19\}, \{20\}, \{22\}, \{23\}, \{25\}, \{26\}, \{28\}, \{29\}. \quad (2.2)$$

Všimnime si, že ak do peknej podmnožiny pridáme nejaký člen, ktorý je v našom rozdelení na podmnožiny v množine samostatne, nezabráni nám to pridať ľubovoľné iné číslo z množiny $\{1, \dots, 30\}$. Teda nakoľko máme za cieľ dostať do peknej podmnožiny čo najviac čísel, takéto čísla tam budú patriť všetky.

Pozrime sa ďalej na podmnožiny z nášho rozdelenia, ktoré sú po dvojiciach. Ak vyberieme jedno z nich do peknej podmnožiny, druhé tam pri dodržaní podmienok zadania byť nesmie. Teda do najväčšej peknej podmnožiny patrí práve jedno z nich.

Ak zoberieme 3-prvkovú podmnožinu, tak v prípade, že by sme do peknej podmnožiny vybrali *stredné* z čísel, zabránili by sme zvyšným dvom číslam, aby boli v peknej podmnožine. Ak však vyberieme *krajné* dve, tento problém nenastane a môžeme ich tam pridať dve namiesto jedného, čo je optimálne, nakoľko chceme maximalizovať ich počet.

V prípade 4-prvkovej množiny, ak vyberieme *ľavé krajné* číslo, nemôžeme vybrať druhé zľava, ale tretie alebo štvrté už áno, avšak najviac jedno z nich, nakoľko pridanie ďalšieho vedie ku porušeniu pravidla o trojnásobkoch zo zadania. Rovnaká úvaha ide použiť aj na ostatné pozície ako počiatok našich úvah a teda z takejto podmnožiny do peknej podmnožiny vieme vybrať najviac 2 čísla. A teda tak aj spravíme.

Väčšie podmnožiny nášho delenia na podmnožiny už nemáme a teda vieme usúdiť, že najväčšia *pekná* podmnožina musí mať nutne $13 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 22$ prvkov.

Podme sa ešte pozrieť na to, koľko je takýchto podmnožín. Ak je číslo v našom delení osamostatnené, tak v tejto množine nutne bude. Ak sú po dvojiciach, vždy tam bude práve jedno z nich (teda sa tieto pekné podmnožiny delia na dve vetvy). Ak sú po trojiciach, existuje práve jeden vhodný výber do peknej podmnožiny. V prípade, že sú v podmnožine nášho delenia 4 čísla, sú práve 3 možnosti, ako vybrať prvky do peknej podmnožiny (konkrétne $1. + 3.$, $1. + 4.$ a $2. + 4.$). Nakoľko sú tieto výbery na sebe navzájom nezávislé, počet *pekných* podmnožín sa dá spočítať ako súčin počtu výberov z nášho rozdelenia množiny na podmnožiny a to ako $2^5 \cdot 3 = 96$.

2.3 Kvóty Musíme Splniť ($\kappa \leq 1$)

Zadanie. Petrovi pripadal jeho priateľ mimoriadne ustaraný, a tak mu nedalo, aby sa nespýtal aj na jeho rodinu. Feuer Sebastian si povzdychol a odpovedal:

„Vieš, my Bachovci sme boli vcelku známy rod, a tak sa nás nové opatrenia dotkli o to viac. Moje deti boli pridelené do továrne na epsilon, ja celé dni driem na nekonečnom poli. Skoro sa ani nevidáme, domov nás nepustia, kým nesplníme kvóty.

No a tie kvóty sú strašné, každý deň musia moje deti vyprodukovať aspoň $n = p^r q^s$ epsilon, kde p, q sú navzájom rôzne prvočísla a r, s sú nezáporné celé čísla. Vieš si predstaviť, koľko potom existuje deliteľov čísla n^2 neprevyšujúcich n a zároveň nedeliacich n ? Ja nie, ale rád by som to vedel.“ Zistite to pre Sebastiana.

Riešenie.

opravuje Vilčo (viliam.geffert@trojsten.sk)

Zo zadania vieme, že p, q sú vzájomne rôzne prvočísla a že $r, s \in \mathbb{Z}^+$. Číslo n je podľa zadania definované ako $n = p^r q^s$, teda $n^2 = (p^r q^s)^2 = p^{2r} q^{2s}$. Keďže chceme zistiť počet deliteľov n^2 neprevyšujúcich a zároveň nedeliacich n , podme sa pozrieť na počty deliteľov čísel n^2 a n .

Ako zistíme počet deliteľov nejakého čísla? Nech číslo a má prvočíselný rozklad $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k}$, kde $p_1, p_2, \dots, p_k$ sú vzájomne rôzne prvočísla. Na to, aby bolo nejaké číslo d deliteľom čísla a , musí platiť, že prvočíselný rozklad čísla d je nejaká časť prvočíselného rozkladu čísla a . Musí teda obsahovať rovnaké prvočísla $p_1, p_2, \dots, p_k$ ako prvočíselný rozklad čísla a , no tieto prvočísla môžu mať iné exponenty, ktoré ale nemôžu byť väčšie ako exponenty v prvočíselnom rozklade a . Teda keď chceme vytvoriť deliteľa čísla a , tak pri každom prvočíse p z prvočíselného rozkladu vyberáme exponenty z množiny $\{0, 1, \dots, m\}$, ktorých je $m + 1$. Počet deliteľov čísla a teda bude $(m_1 + 1)(m_2 + 1) \dots (m_k + 1)$.

Koľko deliteľov teda má n ? A koľko n^2 ? S použitím vyššie ukázaného vzorčeka vieme zistiť, že n má $(r + 1)(s + 1) = rs + r + s + 1$ deliteľov, zatiaľ čo n^2 má $(2r + 1)(2s + 1) = 4rs + 2r + 2s + 1$ deliteľov. Nech $d \in \mathbb{Z}^+$ je nejaký deliteľ n^2 , ktorý neprevyšuje n . Potom vieme, že podiel $\frac{n^2}{d}$ určite nie je menší ako n , teda $\frac{n^2}{d} \geq n$. Každý deliteľ n^2 , ktorý je menší alebo rovný ako n , má svoj „opak“, teda deliteľa väčšieho alebo rovného n . Polovica deliteľov n^2 bude menšia alebo rovná n , čo je $2rs + r + s + 1$ deliteľov (n^2 má n ako „zdvojeného deliteľa“). Taktiež však vieme, že každý deliteľ n je aj deliteľom n^2 a zároveň žiaden z deliteľov čísla n ho určite neprevyšuje. Počet deliteľov čísla n^2 , ktoré neprevyšujú číslo n a ani nie sú jeho deliteľmi, je teda $(2rs + r + s + 1) - (rs + r + s + 1) = rs$.

2.4 Kružnice Mužstvo Skonvertujú ($\kappa \leq 2$)

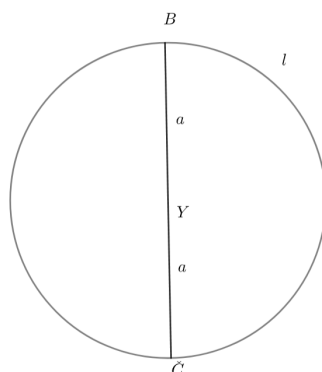
Zadanie. Kým sa Peter Senov vracal znepokojený domov, aby zvestoval novinky o dianí v krajine Geometrie, v Al-Gebre čakal kráľ Kardáno Abel Gauss Horner na predvedenie novej armády. Ukážky sa ujal In Te, ktorý od doktora Kóšihó odporoval používanie novej zbrane – kružnicovej inverzie. Tá umožňovala pomocou jednoduchého zariadenia zinvertovať ľubovoľného obyvateľa Geometrie, čím držiteľ zariadenia získal úplnú moc nad svojím cieľom.

Testované zariadenie vyzeralo ako kružnica k so stredom v bode A , cez ktorý prechádzala kružnica l so stredom Y . Priesečníky týchto kružníc boli označené ako B a $\check{C}$, pričom platilo, že bod Y ležal na úsečke $B\check{C}$. Na polpriamke opačnej k AY bol určený zlovestný bod X taký, že $|AX| = 2|AY|$.

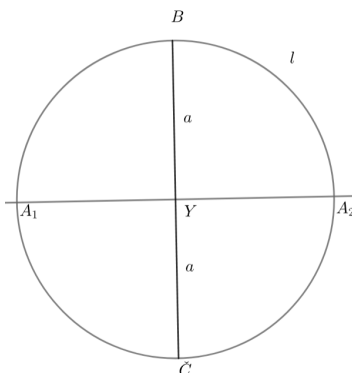
1. Dokážte, že bod X ležal vonku z kružnice k .
2. Z bodu X vychádzali dotyčnice ku kružnici k . Body dotyku boli označené D, T , pričom T sa nachádzalo v rovnakej polrovine danej priamkou AY ako bod B . Nakoniec dokážte, že $\check{C}BTD$ je štvorec.

Riešenie. opravujú **Filip** (filip.kotoc@trojsten.sk) a **Baška** (barbora.novosadova@trojsten.sk)

Na úplnom začiatku je dobré si predstaviť, ako bude situácia vyzeráť na obrázku. Pokiaľ má bod Y ležať na úsečke $B\check{C}$, a zároveň body $B, \check{C}$ ležia aj na kružnici l , ktorej je bod Y stredom, potom musí platiť, že bod Y je stredom úsečky, pretože vzdialenosť Y od B a Y od $\check{C}$ je polomer kružnice l (nazvime ho a).



Zo zadania vieme, že cez bod A prechádza kružnica l , inými slovami bod A leží na kružnici l . Zároveň vieme, že body $B, \check{C}$ ležia aj na kružnici k , ktorej stredom je bod A , takže bod A je od oboch bodov rovnako vzdialený. Bod A teda leží na osi úsečky $B\check{C}$ a zároveň kružnici l . Máme teda celkovo 2 možnosti, kam ho umiestniť.

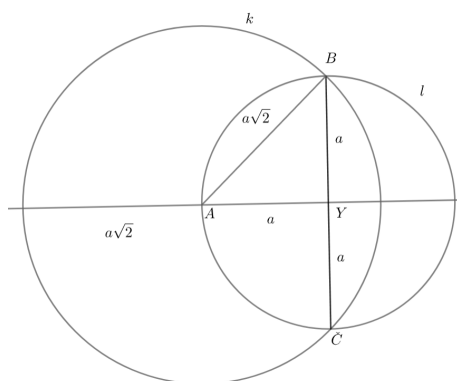


Bez ujmy na všeobecnosti uvažujme bod A_1 ako náš bod A . Vieme, že vzdialenosť bodu A od bodu Y je a , pretože bod A leží na kružnici l . Zároveň vieme, že uhly AYB a AYC sú pravé, keďže bod A leží na osi úsečky BC . Tým pádom vieme dorátať dĺžku strany AB cez Pytagorovu vetu ako

$$|AY|^2 + |BY|^2 = |AB|^2,$$

$$\sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}.$$

Podobne si vieme dorátať aj dĺžku strany AC . O týchto stranách zároveň vieme, že sú polomerom kružnice k .

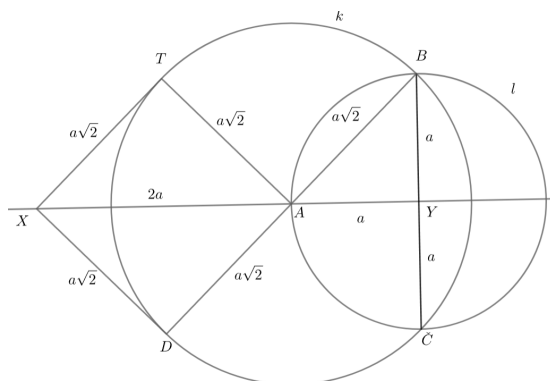


Vieme, že bod X je vzdialený od bodu A dvojnásobok $|AY| = a$, teda X je od A vzdialený $2a$. Polomer kružnice k je $a\sqrt{2}$, čo je menej ako $2a$, teda bod X sa nachádza mimo kružnice k . Tým sme dokázali časť 1.

Teraz zostrojme dotyčnicu ku kružnici k z bodu X cez dotykový bod T . Zároveň vedme k tomuto bodu úsečku z bodu A . Keďže bod T leží na kružnici k , tak jeho vzdialenosť od bodu A je polomer kružnice k , teda $a\sqrt{2}$. Navyše vieme, že vzdialenosť bodov X, A je $2a$ a v bode T sa nachádza pravý uhol, pretože tam máme dotyčnicu. Z Pytagorovej vety teda opäť vieme dorátať dĺžku strany XT .

$$|XT|^2 = |XA|^2 - |AT|^2,$$

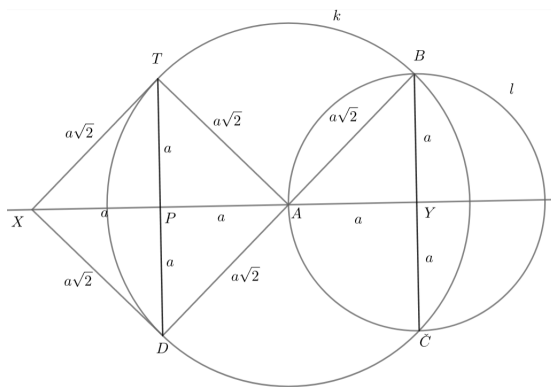
$$|XT| = \sqrt{(2a)^2 - (a\sqrt{2})^2} = \sqrt{4a^2 - 2a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}.$$



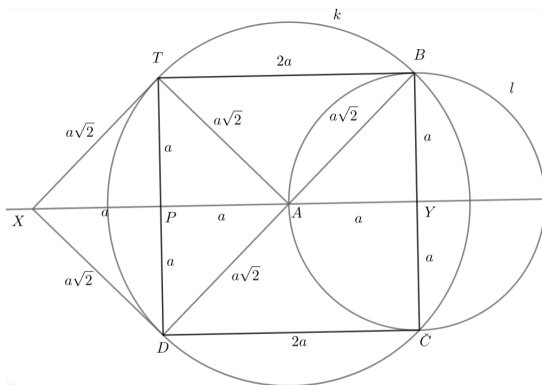
Analogicky určíme, že $|XD| = a\sqrt{2}$.

Vidíme, že štvoruholník $ATXD$ je štvorec, pretože všetky jeho strany sú rovnaké a má 2 pravé uhly (premýšľajte si, že potom musí mať aj zvyšné dva). Teda vieme, že jeho uhlopriečky sú rovnako dlhé, pretínajú sa v strede a sú na seba kolmé. Z toho vieme, že dĺžka úsečky TD je $2a$, zároveň vieme, že je rovnobežná s úsečkou $B\check{C}$, pretože obe sú kolmé na AY .

Nazvime si teraz priesečník uhlopriečok AX a TD ako bod P .



Vidíme, že bod P je od bodu Y vzdialený $2a$, oba body Y aj P sú postupne stredy strán $\check{C}B$ a TD a zároveň sú obe tieto strany kolmé na PY . Z toho vidno, že úsečky BT , $\check{C}D$ sú obe rovnobežné s PY , zároveň z toho vidno, že aj body B, T sú od seba vzdialené $2a$, ako aj body $\check{C}, D$.



Môžeme vidieť, že všetky strany štvoruholníka $\check{C}BTD$ sú rovnako dlhé a zároveň vieme, že jeho strany sú rovnobežné, z toho vidíme, že $\check{C}BTD$ je rovnobežník. Jediný rovnobežník s rovnakými dĺžkami strán, ktorému vieme opísať kružnicu je štvorec. Čo Bolo Treba Dokázať.

2.5 Krátke Medzinárodné Stretnutie ($\kappa \leq 6$)

Zadanie. *Kombistanci boli šokovaní a znechutení rozprávaním Petra Senova. Rozhodli sa teda vyslať delegáciu za kráľom Kardánom Abelom Gaussom Hornerom, aby mu zvestovala ich obavy. V trónnej sále Al-Gebry však čakalo ďalšie nepríjemné prekvapenie. Počas rozprávania delegácie si kráľ niečo šepkal so svojim vezírom. Nakoniec rozprávanie ukončil nesúvisiacou otázkou.*

„Existujú také reálne čísla x, y, z , že

$$\frac{1}{(x-y)(x+y)} + \frac{1}{(y-z)(y+z)} + \frac{1}{(z-x)(z+x)} = 0?^{\text{“}}$$

Riešenie.

opravujú **Mati** (matus.zelko@trojsten.sk) a **Sebík** (sebik.hajdu@trojsten.sk)

Na začiatok si uvedomme, že $x \neq y$ a $x \neq -y$. Podobne pre ostatné dvojice, inak by výraz v menovateli nebol definovaný. Dobré, roznásobíme zátvorky v menovateľoch a upravíme na spoločný menovateľ. Dostávame

$$\frac{(y^2 - z^2)(z^2 - x^2) + (x^2 - y^2)(z^2 - x^2) + (x^2 - y^2)(y^2 - z^2)}{(x^2 - y^2)(y^2 - z^2)(z^2 - x^2)} = 0.$$

Teraz môžeme rovnicu vynásobiť nenulovým menovateľom a dostávame tvar

$$(y^2 - z^2)(z^2 - x^2) + (x^2 - y^2)(z^2 - x^2) + (x^2 - y^2)(y^2 - z^2) = 0.$$

Ďalej sa dalo postupovať rôzne, no ukazuje sa, že relatívne pekne fungovalo zatnúť zuby a roznásobiť to¹. My zatneme zuby a dostaneme

$$(y^2 z^2 - z^4 - x^2 y^2 + x^2 z^2) + (x^2 z^2 - y^2 z^2 - x^4 + x^2 y^2) + (x^2 y^2 - y^4 - z^2 x^2 + z^2 y^2) = 0.$$

Sčítame rovnaké členy, prenášobíme -1 a dostávame

$$x^4 + y^4 + z^4 - y^2 z^2 - x^2 y^2 - x^2 z^2 = 0$$

Nasleduje drobný trik, ktorý je hlavnou pointou celej úlohy a vcelku sa ho oplatí poznať. Prenásobením rovnice dvomi a preusporiadaním dostávame

$$x^4 - 2x^2 y^2 + y^4 + y^4 - 2y^2 z^2 + z^4 + z^4 - 2z^2 x^2 + x^4 = 0,$$

čo vieme upraviť na štvorce a dostať

$$(x^2 - y^2)^2 + (y^2 - z^2)^2 + (z^2 - x^2)^2 = 0.$$

Tento výraz má riešenie, iba ak $x^2 = y^2$, tzn. $x = y$ alebo $x = -y$. Avšak na začiatku sme si povedali, že žiaden z týchto prípadov nespĺňa pôvodnú rovnicu, lebo preň nie je definovaná.

2.6 Kombistanci Mapujú Situáciu

Zadanie. Delegácia Kombistanu sa vrátila domov zaskočená. Ved' nemala byť Al-Gebra hlasom múdrosti? Mali sa zachovať ako hrdinovia, nie páchať takéto ohavnosti. V Kombistane sa zhodli, že je nutné zakročiť. Než však čokoľvek vykonajú, musia zhromaždiť dôkazy, aby sa vyhli unáhleným rozhodnutiam a predišli ďalšiemu medzinárodnému konfliktu.

¹No pain, no gain. Avšak dalo sa to spraviť aj bez toho

Kombistanci mali mapu bývalej Krajiny Geometrie. Tá vyzerala ako štvorčeková sieť $n \times n$, pričom v prvom riadku chýbali dve prostredné políčka. Zvyšok štvorčkovej siete chceli pokryť fotkami, ktoré by odhaľovali, čo sa na danom území deje. Fotku si vieme predstaviť ako domino 2×1 , resp. 1×2 štvorčeky. Koľko z týchto domín môže byť obrátených vodorovne? Nájdite všetky možnosti pre

1. $n = 6$,
2. $n = 2024$.

Riešenie.

2.7 Kord Mita Skladá

Zadanie. Toho večera v tmavom kúte hradu v hlavnom meste Al-Gebry sa chystala Mita Li na ďalšiu tajnú prácičku. Kvôli kontrolám po ceste si nemohla zobrať zbraň vcelku, no Mita bola skúsená a vedela, ako si zbraň zmontovať. Ak všetko klapne, Al-Gebra bude ráno potrebovať nového vládcu.

Ako rukoväť Mitinej zbrane slúži číslo r a ostrie má tvar čísla o . Mita si samozrejme nezabudla svoj skrutkovač a kladivko. Pomocou skrutkovača dokáže z dvoch kladných celých čísel a a b zhotoviť dvojicu čísel $\overline{ab}$, $\overline{ba}$, ktorou nahradí pôvodnú dvojicu čísel. Keď na čísla a, b použije kladivko, tak ich zmení na čísla $a + b$ a $|a - b|$.

Mita vie, že kráľ Horner disponuje štítom, cez ktorý preniknú iba zbrane, ktorých rúčka r aj ostrie o sú deliteľné číslom 9. Určte všetky dvojice kladných celých čísel (x, y) , z ktorých dokáže Mita zmajstrovať takúto zbraň.

Poznámka: Značením $\overline{ab}$ rozumieme celé číslo zložené z cifier kladného celého a , za ktorými sú napísané cifry kladného celého čísla b .

Riešenie. opravujú Štepi (martin.stepanek@trojsten.sk) a Vítek (vit.hanika@trojsten.sk)

Zaujíma nás iba, či budú tie čísla deliteľné deviatimi, takže sa nám stačí pozeráť na zvyšky po delení 9. Nech máme dvojicu zvyškov (a, b) (pričom bez ujmy na všeobecnosti to prvé číslo je väčšie alebo rovné ako to druhé), potom skrutkovačom dostaneme $(a + b, a + b)^2$ a kladivkom $(a + b, a - b)$, pričom zase to prvé číslo bude väčšie alebo rovné ako to druhé. Od tohto bodu už budeme hovoriť iba o zvyškoch a týchto nových operáciach. Ešte budeme hovoriť, že ak dosiahneme $(0, 0)$, tak sme vyhrali a ak sa to z nejakej dvojice nedá, tak sme prehrali.

Ak v nejakom bode použijeme skrutkovač, potom obe čísla budú rovnaké. Ďalej použitím skrutkovača sa dostaneme na $(2x, 2x)$. Použitím kladivka sa z (x, x) dostaneme na $(2x, 0)$, potom skrutkovačom aj kladivkom na $(2x, 2x)$. Tým sa nezmení deliteľnosť deviatimi, takže ak $x \neq 0$, tak už potom nevyhráme.

Ak zo začiatkovej dvojice použijeme iba kladivko, tak z (a, b) dostaneme $(a + b, a - b)$ a potom $(2a, 2b)$. Keď to budeme robiť ďalej, tak sa teda dostaneme len k číslam $(2^k a, 2^k b)$ a $(2^k(a + b), 2^k(a - b))$. Po prvom použití skrutkovača potom dostaneme $(2^k(a + b), 2^k(a + b))$ alebo $(2^k a, 2^k a)$.

Vyhráme teda v prípade, že $a \equiv 0 \pmod{9}$ alebo $a + b \equiv 0 \pmod{9}$. Keďže násobenie 2 nám deliteľnosť deviatimi nezmení, v iných prípadoch nemôžeme vyhrať.

²lebo $10a \equiv a \pmod{9}$ a $10b \equiv b \pmod{9}$.

2.8 Kontrolujeme Miesto Smrti

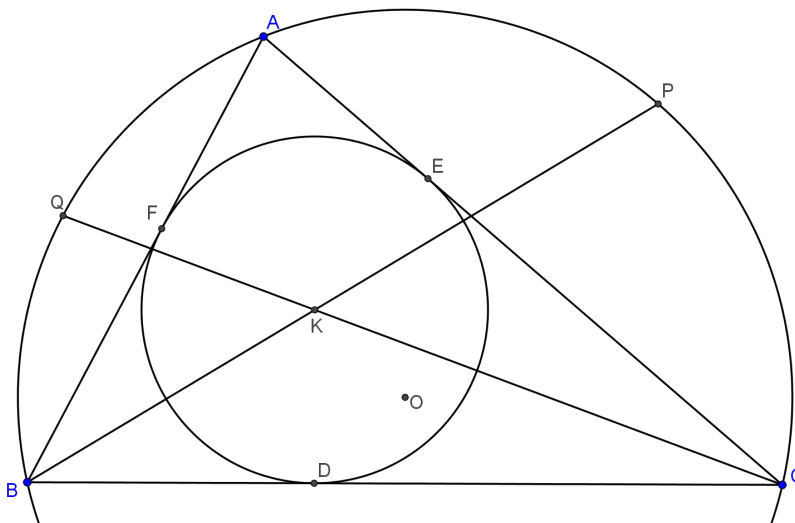
Zadanie. Kráľ zomrel. S tým by sa obyvatelia Al-Gebry dokázali vysporiadať, avšak Kardáno Abel Gauss Horner bol zavraždený. To ľudí mimoriadne pobúrilo. Hneď, ako sa to dozvedel vezír In Te, povolal vyšetrovací tím. Ten sa s najmodernejším vybavením pustil do práce. Vyšetrovatelia zbierali vzorky, zaznamenávali dôkazy, analyzovali stopy a hlavne prezerali miesto činu.

Miesto činu vyzeralo ako rôznostranný ostrouhlý trojuholník ABC . **Opísanú** kružnicu trojuholníka označme k . Kráľ ležal v strede K jeho **vpísanej** kružnice. Body D, E, F sú body dotyku vpísanej kružnice postupne so stranami BC, AC, AB . Ďalej označme postupne P, Q priesečníky k s priamkami BK, CK , a priesečník priamok PE a QF ako L . Dokážte, že stred kružnice k leží na priamke KL .

Riešenie.

opravuje **Mišo M.** (michal.molnar@trojsten.sk)

Označme O stred kružnice k . Podľa zadania nám stačí ekvivalentne dokázať, že bod L leží na priamke KO , resp. že priamky KO, PE a QF sa pretínajú v jednom bode. Ak dokážeme ľubovoľné z týchto tvrdení, tak máme vyhrané. My sa zameriame na to posledné.



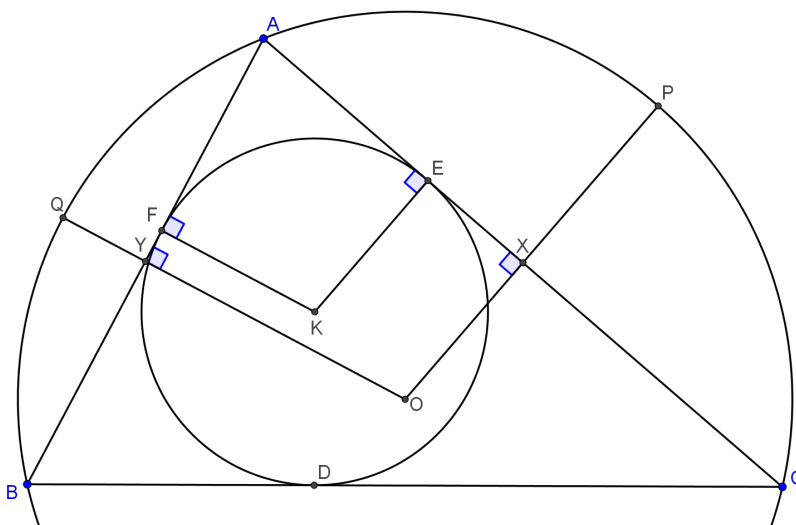
Než sa však pustíme do dokazovania, preskúmajme najprv body, ktoré dané priamky definujú. Bod K je stredom *vpísanej*, bod O stredom *opísanej* kružnice. V bodoch E a F sa vpísaná kružnica dotýka strán trojuholníka. Najzaujímavejšie sú body P a Q . Priamka BK , na ktorej leží P , je os uhla $\sphericalangle ABC$. Je známe, že os uhla pretína kružnicu opísanú trojuholníku v strede kružnicového oblúka, v tomto prípade medzi A a C .³ Jedná sa o tzv. Švrčkov bod trojuholníka ABC voči bodu B . Bod P teda zároveň leží aj na osi strany AC . Rovnako by sme dokázali, že aj bod Q leží na osi strany AB .

Na osiach strán trojuholníka leží aj stred O jeho opísanej kružnice. Úsečky OP a OQ sú teda kolmé postupne na AC a AB . Podobne, keďže v bodoch E a F sa vpísaná kružnica dotýka strán trojuholníka, platí, že aj KE je kolmá na AC a KF je kolmá na AB . Môžeme tak napísať $OP \parallel KE$ a $OQ \parallel KF$.

V tomto momente sme sa dostali k rovnobežnosti úsečiek, ktorú by sme radi použili na dôkaz, že sa nejaké tri priamky pretínajú v jednom bode. S tým nám pomôže *rovnolahlosť*. Ak nejaká rovnolahlosť zobrazuje bod K na

³<https://prase.cz/library/SvrckuvBodSS/SvrckuvBodSS.pdf>

bod O , bod E na bod P a bod F na bod Q , tak stred tejto rovnoľahlosti leží na priamkach KO , PE a QF . Dokážeme, že trojuholníky KEF a OPQ sú rovnoľahlé.



Už vieme, že platí $KE \parallel OP$ a $KF \parallel OQ$. Na rovnoľahlosť nám stačí ukázať, že sú tieto trojuholníky podobné, ale nie zhodné. V opačnom prípade by mohli byť priamky KO , PE a QF rovnobežné. Začnime zdôvodnením, prečo nie sú zhodné. Prvým krokom je uvedenie si, že úsečky KE a KF sú polomery vpísanej kružnice, a teda $|KE| = |KF|$. Analogicky $|OP| = |OQ|$, keďže sa jedná o polomery kružnice k opísanej trojuholníku ABC . Potom aj $|OP| > |KE|$ a trojuholníky zhodné nie sú. Navyše

$$\frac{|KE|}{|OP|} = \frac{|KF|}{|OQ|}.$$

Pozrime sa teraz na uhly medzi spomínanými úsečkami. Uhol EKF je súčasťou štvoruholníka $AEKF$. Už vieme, že uhly AEK a AFK sú pravé. Keď označíme α uhol EAF , vieme vyjadriť zvyšný uhol ako

$$|\angle EKF| = 360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \alpha.$$

Podobný postup nám prejde aj pre uhol POQ . Priamky OP a OQ sú kolmé postupne na strany AC a AB . Označme X priesečník OP a AC a Y priesečník OQ a AB . Keďže P a Q ležia zvonka trojuholníka ABC a O ako stred opísanej kružnice ostrouhlého trojuholníka leží vnútri, môžeme povedať, že $\angle XOY$ je totožný s $\angle POQ$. Opäť tak dostávame štvoruholník $AXOY$ s pravými uhlami AXO a AYO a uhlom s veľkosťou $|\angle XAY| = \alpha$. Platí teda

$$|\angle POQ| = |\angle XOY| = 360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \alpha = |\angle EKF|.$$

Tým sme ukázali, že trojuholníky KEF a OPQ sú podobné podľa vety *sus*. Tým, že majú rovnobežné dve dvojice strán, tak sú zároveň rovnoľahlé, takže priamky KO , PE a QF sa pretínajú v jednom bode, čo sme chceli dokázať.

2.9 Kráľ Menežuje Spravodlivosť

Zadanie. Korunováciu vezíra zakončili slávnostné zvolania:

„Nech žije kráľ In Te! Kráľ In Te! Kráľ In Te!“

Nový vládca Al-Gebry sa chystal na príhovor, keď do siene vpadli vyšetrovatelia, aby oznámili novinky. Počúvali ich všetci dvorania aj zástupcovia okolitých krajín. Hlavný vyšetrovateľ povedal:

„Po dosadení všetkých neznámych sme došli k záveru, že vlajka Kombistanu, na ktorej bol kráľ Kardáno Abel Gauss Horner napichnutý, značí jediné. Vraždu si objednal práve Kombistan.“

Všetci boli zhrození, len In Te zachoval chladnú hlavu. Zavolať si zástupcov Teórie Čísel a Matematickej Ľudovo-demokratickej Analýzy a požiadal ich krajiny o pomoc pri odvete za tento hrozný čin. Delegát Teórie Čísel okamžite bežal k telefónu, aby získal informácie z domova.

„Haló, existujú ešte nejaké jednotky, ktoré by sme mohli vyslať na pomoc našim hrdinom z Al-Gebry?“

„Čakajte na linke, čoskoro to zistíme.“

Nájdite všetky kladné celé čísla n , pre ktoré existuje n navzájom rôznych prirodzených čísel takých, že najväčší spoločný deliteľ každých dvoch z nich je rovný absolútnej hodnote ich rozdielu.

Riešenie.

opravuje Michal Staník (michal.stanik@trojsten.sk)

Pre malé n nie je problém nájsť vhodných n čísel – keď máme jedno číslo, nemusíme splniť žiadnu podmienku, dve čísla vieme mať napríklad 6 a 8 s rozdielom aj najväčším spoločným deliteľom (NSD) rovným 2.

Úlohu by sme mohli skúsiť vyriešiť postupným pridávaním čísel. Formalizovali by sme to ako matematickú indukciu – ak máme vhodných n čísel (kde NSD ľubovoľných dvoch z nich je rovný ich rozdielu), pridaním ďalšieho čísla k nim (a prípadnou zmenou ostatných) zostrojíme $(n + 1)$ -ticu vyhovujúcich čísel. Keď ukážeme tento krok, vďaka indukcii budeme mať úlohu hotovú, pretože tento krok môžeme opakovať, koľkokrát bude treba.

Ako by sme mohli z n -tice čísel spĺňajúcej zadanie vytvoriť $(n + 1)$ -ticu? Existuje nejaké číslo, ktoré k nej môžeme iba pridať? Áno, vieme pridať číslo 0, pretože rozdiel 0 a ľubovoľného čísla a je a , rovnako ako aj ich NSD je a , pretože všetko delí nulu. Toto má ale dva problémy:

1. 0 nie je prirodzené číslo.
2. Ak už raz pridáme nulu, nemôžeme ju v ďalšom kroku pridať znova (čísla majú byť rôzne).

Oba tieto problémy by sme mohli vyriešiť tým, že všetky čísla zvýšime o pevnú konštantu. Rozdiely sa tým zachovávajú, ostáva zvoliť konštantu tak, aby sa zachovali aj NSD dvojíc čísel. Vhodnou konštantou je ľubovoľný spoločný násobok všetkých našich čísel (napr. ich najmenší spoločný násobok alebo ich súčin).

Ak totiž máme čísla a, b (spomedzi našich n čísel) a číslo c , ktoré je násobkom každého z nich, tak ak $d = |a - b| = \text{NSD}(a, b)$, tak nutne platí aj $d \mid a \mid c$, z čoho $d \mid a + c$, $d \mid b + c$, čiže d je spoločným deliteľom posunutých čísel. Zároveň čísla $a + c$ a $b + c$ nemôžu mať spoločného deliteľa väčšieho ako ich rozdiel, čo je d , takže d je ich najväčší spoločný deliteľ.

Náš indukčný krok teda bude vyzeráť tak, že vezmeme n čísel spĺňajúcich zadanie, pridáme k nim nulu (nie je ešte medzi nimi, lebo tie čísla sú prirodzené) a zvýšime všetky o ich spoločný násobok (ak použijeme súčin, tak do násobenia tú nulu, samozrejme, nezahrnieme), čím dostaneme $n + 1$ prirodzených čísel (aj najmenšia nula sa zväčšila aspoň o 1).

Dokázali sme, že n čísel vyhovujúcich danej podmienke vieme nájsť pre ľubovoľné prirodzené číslo n .

2.10 Koordinujeme Množstvo Svalnáčov

Zadanie. A tak Al-Gebra, Teória Čísel a Matematická Ludovo-demokratická Analýza vyhlásili vojnu Kombistanu. Vojnu bolo treba nutne vyhrať, preto sa kráľ In Te rozhodol využiť aj vojakov z Geometrie. Aj keď ich bude sám ovládať, treba pre nich ešte nájsť tie správne funkcie.

Nájdite všetky funkcie $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ také, že pre každú dvojicu kladných reálnych čísel x, y platí

$$f(x) = f(x + y) + f(x + x^2 f(y)).$$

Riešenie.

opravuje **Jakub Poljovka** (jakub.poljovka@trojsten.sk)

Z uvedenej rovnice vidíme, že $f(x) > f(x + y)$, keďže hodnota $f(x + x^2 f(y))$ je kladná (zo zadania). To ale znamená, že funkcia f musí byť klesajúca, lebo $x < x + y$ a x, y sú ľubovoľné kladné reálne čísla. Z klesajúcnosti nám automaticky vyplýva aj prostosť funkcie ⁴.

Dosaďme do rovnice dvojicu $[1, y]$ za $[x, y]$. Dostávame

$$f(1) = f(1 + y) + f(1 + f(y)). \quad (10.1)$$

Teraz by sme chceli vytvoriť člen $f(1 + f(y))$ druhým spôsobom, aby sme sa ho odčítaním zbavili. Dosaďme preto dvojicu $[1, f(y)]$, čím dostávame

$$f(1) = f(1 + f(y)) + f(1 + f(f(y))). \quad (10.2)$$

Odčítaním a úpravou rovníc (10.1) a (10.2) dostávame

$$f(1 + y) = f(1 + f(f(y))). \quad (10.3)$$

Keďže už vieme, že f je prostá, z rovnosti (10.3) vyplýva

$$\begin{aligned} 1 + y &= 1 + f(f(y)), \\ f(f(y)) &= y. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Dosaďme do pôvodnej rovnice dvojicu $[x, f(\frac{1}{x^2})]$:

$$f(x) = f\left(x + f\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) + f\left(x + x^2 f\left(f\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right),$$

čo síce vyzerá hrozne, ale vďaka (10.4) to vieme upraviť a zbaviť sa zároveň f -ka, aj člena x^2 .

$$f(x) = f\left(x + f\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) + f(x + 1). \quad (10.5)$$

Do pôvodnej rovnice dosadíme dvojicu $[x, 1]$:

$$f(x) = f(x + 1) + f(x + x^2 f(1)). \quad (10.6)$$

⁴Teda ak $f(x) = f(y)$, tak $x = y$.

Odčítaním a úpravou rovností (10.5) a (10.6) dostávame

$$f\left(x + f\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = f(x + x^2 f(1)),$$

z čoho opäť vďaka prostosti funkcie f vyplýva

$$\begin{aligned} x + f\left(\frac{1}{x^2}\right) &= x + x^2 f(1), \\ f\left(\frac{1}{x^2}\right) &= x^2 f(1). \end{aligned} \tag{10.7}$$

Dosadením $\frac{1}{\sqrt{x}}$ do rovnosti (10.7) tak nakoniec dostávame

$$f(x) = \frac{f(1)}{x}.$$

Za hodnotu $f(1)$ môžeme pripustiť ľubovoľnú konštantu $c \in \mathbb{R}^+$. Dôsledkovými úpravami sme tak odvodili, že ak má existovať nejaké riešenie pôvodnej funkcionálnej rovnice, musí ísť o riešenie tvaru $f(x) = \frac{c}{x}$. Aby sme toto riešenie overili, potrebujeme ešte urobiť skúšku správnosti, čiže dosadiť toto riešenie do pôvodnej rovnice. Po dosadení dostávame

$$\begin{aligned} \frac{c}{x} &= \frac{c}{x+y} + \frac{c}{x+x^2 \frac{c}{y}}, \\ (x+y) \left(x + x^2 \frac{c}{y}\right) &= x \left(x + x^2 \frac{c}{y}\right) + x(x+y), \\ cx^2 &= x^2. \end{aligned}$$

Zo skúšky vidíme, že aby rovnica platila, musí byť $c = 1$. Dostávame jediné riešenie danej funkcionálky, a to $f(x) = \frac{1}{x}$.