Korešpondenčný matematický seminár
XLVI. ročník, 2024/2025
KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Zadania 3. kola zimnej časti

Termín odoslania 2. december 2024 (pre zahraničie 29. november 2024)
V prípade otázok k zadaniam nás neváhajte kontaktovať na kms@kms.sk.

3.1 Kráľov Môžeme Striedať ($\kappa \le 0$) kategória **alfa**

„Nemusím ti snáď pripomínať, kto ťa dostal na trón," povedal Veľký Dif Ka. „Kombistan pripadne Matematickej analýze tak, ako som to naplánoval."

„Na trón som sa dostal predovšetkým ja," odvetil In Te. „Hornera som mohol upratať aj sám, len som si nechcel špiniť ruky."

„To na pôvodnej dohode nič nemení, len si si spravil svoju prácu, tak v tom láskavo pokračuj."

„Kombistan pripadne Al-Gebre a bodka. Vládnuť tam budem ja a bodka," vyhlásil In Te a opustil sieň.

Veľký Dif Ka poznal ľudí, ktorí robia problémy, a vedel, že ich treba nahradiť niekým poslušnejším. Inak by jeho vplyv nesiahal ani po hranice Matematickej ľudovo-demokratickej analýzy. Rozhodol sa, že to In Temu spočíta.

Každé z čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ sa rovná 0, 1 alebo -2. Veľký Dif Ka vie, že platí

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -5,$$
$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 19.$$

Určte všetky možné hodnoty súčtu

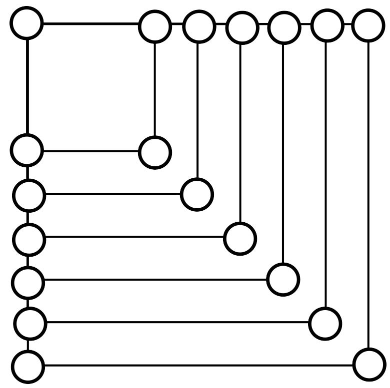
$$x_1^5 + x_2^5 + \cdots + x_n^5.$$

3.2 Krúžky Mojich Spolubojovníkov ($\kappa \le 0$) kategória **alfa**

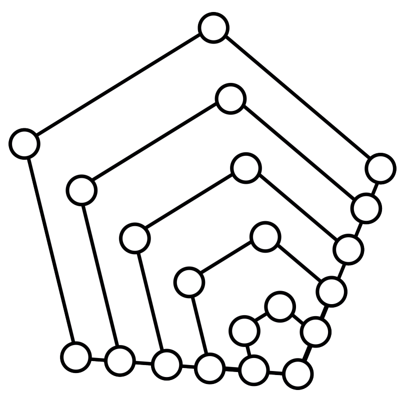
Všetky 4 spriatelené armády – Al-Gebra, Geometria, Matematická Analýza a Teória Čísel – po úspešnom ťažení narazili na obranu hlavného mesta Kombistanu. Zrazu bolo všetkým jasné, na čo prefíkaní Kombistanci delili L-ká. Múry boli nepreniknuteľné. Bez ohľadu na počet vyslaných vojakov, vždy narazili na L-ko, na prekonanie ktorého potrebovali vojakov viac. Generál Kartezián si povedal, že to nemá zmysel a že potrebujú nekonečné množstvo posíl z Matematickej Ľudovo-demokratickej Analýzy. Tak na ne teraz v tábore čakajú.

Karteziánovi pripadalo zvláštne, že vojaci Geometrie stále držia pravidelné formácie. Nikdy ich neopúšťajú, nespia, nerozprávajú sa so spolubojovníkmi…

Každá formácia vojakov Geometrie pozostávala z k do seba vložených pravidelných n-uholníkov zdieľajúcich jeden vrchol, kde k a n sú kladné celé čísla a $n \ge 3$. Každý vojak zhora vyzeral ako prázdny krúžok. Väčšina vojakov mali po dve ruky, no zopár anomálnych malo až tri. Týmito rukami pochytali iných vojakov, čo pri pohľade zhora vyzeralo ako čiary. Napríklad na obrázku 2.1 môžeme vidieť 6 pravidelných 4-uholníkov na obrázku 2.2 môžeme vidieť 5 pravidelných 5-uholníkov. V závislosti od n a k určte, či je možné zafarbiť vojakov danej formácie dvoma farbami tak, aby žiadni dvaja vojaci, ktorí sa držia, neboli rovnakej farby[1]. Zmení sa situácia, ak niektorý z vojakov odíde, pričom pustí tých druhov, ktorých predtým držal?



Obrázok 2.1: *Formácia pre $n = 4$, $k = 6$*



Obrázok 2.2: *Formácia pre $n = 5$, $k = 5$*

3.3 Kóšiho Mentálny Stav ($\kappa \leq 1$) kategórie **alfa** a **beta**

Medzitým prepadal doktor Kóši vo svojom laboratóriu depresiám. Vonku zúri vojna a geometrickí otroci sú isto práve teraz využívaní na boj. Ako to mohol dopustiť? Žiadna bytosť by nemala byť okradnutá o svoju vôľu…Rozmýšľal, ako zabrániť pokusom na ďalších nevinných tvoroch, keď si zrazu uvedomil, že pôvodcom zla nie je on, ale In Te. Ale ako ho zastaviť a nenapáchať pri tom viac zla?

Stav Kóšiho/Švarcovej mysle vieme reprezentovať prirodzeným číslom n, pričom časti jeho duše doň prispievajú prvočíslami p a q. Nájdite všetky čísla n také, že pre ne existujú prvočísla p, q, pre ktoré je Kóšiho/Švarcova myseľ rozhodnutá, teda spĺňa rovnicu $n^2 = p^2 + pq + q^2$. Nezabudnite ukázať, že pre ostatné n žiadne vhodné prvočísla neexistujú.

[1] Vojaci sa držia len v prípade, že medzi nimi na čiare nestojí ďalší vojak.

3.4 Kde Mám Stráže? ($\kappa \leq 2$) kategórie **alfa** a **beta**

Mita Li sa chystala na svoju druhú prácičku v priebehu niekoľkých dní. Opäť mala zasahovať v paláci Al-Gebry, opäť mala svoj čin hodiť na Kombistan, a opäť bol cieľom kráľ. Vyčkala na vhodnú príležitosť, keď bol In Te sám v miestnosti, nečujne sa zaňho prikradla a rozohnala sa vlajkou Kombistanu.

Pán Švarc tiež vedel, že v komnate má byť kráľ In Te sám. Hneď, ako sa pred ním otvorili dvere, zúrivo sa vrhol na prvú postavu, ktorú zbadal.

In Temu ešte hodnú chvíľu trvalo, kým sa zorientoval v situácii. Nevedel sa odpútať od svojich troch myšlienok, reprezentovaných reálnymi číslami x, y, z, ktoré mu celé popoludnie vŕtali v hlave. Tieto myšlienky mali záhadnú vlastnosť: ak ľubovoľné číslo z trojice pričítame k súčinu zvyšných dvoch, tak vždy sa dostaneme k rovnakému výsledku, a to k číslu 2. Nájdite všetky trojice (x, y, z) s touto vlastnosťou a ukážte, že žiadne ďalšie nie sú.

3.5 Komplikácie Myšlienky Stvorili ($\kappa \leq 6$) kategórie **alfa** a **beta**

Keď sa In Te zorientoval v situácii, v hlave sa mu ocitli tri úplne nové myšlienky:

1. Pán Švarc mi práve zachránil život.
2. Ten zákerný Veľký Dif Ka, však ja mu ukážem.
3. Kašľať na Kombistan, vojsko Geometrov pošlem na Matematickú Analýzu.

A hneď začal spriadať plány.

Plány kráľa In Teho vyzerali ako štvorec $ABCD$. Na strane AB si smelo vybral bod P, na strane BC bod M, na strane CD bod L, a nakoniec na strane DA bod K tak, že $|AK| = |AP| = |DL| = |CM|$. Dokážte, že $|\sphericalangle LMC| = |\sphericalangle PKM|$.

3.6 Kôň Mapou Skáče kategórie **alfa** a **beta**

Akonáhle sa v Teórii Čísel dozvedeli, že vraždy v Al-Gebre zosnovala Matematická Ľudovo-demokratická Analýza, tak s Kombistanom uzavreli mier. Na mierové rokovania Kombistanci doniesli mapu, na ktorej Teórii Čísel predostreli poľutovaniahodné podmienky, ktoré panujú v krajine Geometrie.

Mapa, ktorú priniesli Kombistanci, je tvorená tabuľkou $(m+2) \times (n+2)$ políčok pre kladné celé čísla m, n. V ľavom dolnom políčku stojí geometrický kôň, v pravom hornom políčku stojí geometrická paša. Všetky ostatné okrajové políčka tabuľky horia algebraickým ohňom, takže sa na ne nedá stúpiť. Geometrický kôň potrebuje geometrickú stravu, preto sa potrebuje dostať na geometrickú pašu, môže sa však pritom hýbať len ako jazdec v šachu. Určte všetky m, n, pre ktoré sa vie geometrický kôň dostať na geometrickú pašu.

3.7 Konečný Múr Sierpinskeho kategórie **alfa** a **beta**

In Te sa po neúspešnom atentáte na svoju osobu rozhodol vziať pomstu do vlastných rúk. So zariadením kružnicovej inverzie mal pod palcom ovládanie Geometrov. V jeho rukách sa stali rozhodujúcim prvkom bojov proti Matematickej Analýze. Spolu s vojskom Al-Gebry sa Geometri dostali až k bájnemu Palácu nekonečna, no tu začala kružnicová inverzia haprovať. In Te si zavolal jedného z generálov Al-Gebry, samotného hrdinu Karteziána, a poslal ho aj so zariadením za doktorom Kóšim, aby ho opravil. Pred In Tem stála posledná prekážka.

Veľmajster Sierpinski svoj trojuholník ABC, chrániaci vstup do Paláca nekonečna, ešte stále nedokončil. Nevadí, aspoň preň platí $|AB| = |AC|$. Označme D stred strany BC a E kolmý priemet D na AB. Ďalej, nech M je stred úsečky DE. Dokážte, že priamky AM a CE sú na seba kolmé.

3.8 Konanie Musíme Strestať

kategórie **alfa** a **beta**

Udýchaný Kartezián dobehol ku Kóšimu, ktorému svedomie nedovoľovalo užívať si výhody získané záchranou In Teho. Kartezián Kóšimu podal ovládač, ale skôr ako stačil čokoľvek povedať, v Kóšim vzplanul spravodlivý hnev na tento diabolský vynález, šmaril ho o zem a rozmlátil na márne zlomky najbližším kladivom.

Kartezián povedal: „Čo to robíte? Takto nepomstíme vraždu Kardána Abela Gaussa Hornera! Kráľ vravel, že ovládač je kľúčový a len vy ho dokážete opraviť. Teraz je nadobro zničený…“

„Ten prístroj zotročuje nevinných Geometrov! Ovláda ich mysle! To všetko In Te…On ma nútil túto zvrátenosť vytvoriť…“

Zákony matematiky sú číslované kladnými celými číslami. Kartezián hneď začal určovať množiny zákonov, ktoré In Te týmto ovládačom porušil. Množinu kladných celých čísel M nazveme množinou *porušených zákonov*, ak obsahuje aspoň dva prvky a pre každé dva prvky $x > y$ z množiny M platí, že aj číslo

$$\frac{y^2}{x-y}$$

je prvok množiny M. Nájdite všetky množiny porušených zákonov.

3.9 Krutý Model Spravodlivosti

kategória **beta**

Medzitým sa na bojisku ukázala prevaha a sila vojska Al-Gebry, a tak došlo k dobytiu Matematickej Ľudovo-demokratickej Analýzy aj bez pomoci Geometrov. In Te sa rozhodol nečakať na ovládač a rovno sa začal mstiť vodcom nepriateľa na čele s Veľkým Dif Kom. Popravy boli v plnom prúde, keď sa vrátil Kartezián a mohutným hlasom zvolal:

„Zatýkam Vás, kráľ In Te, v mene ľudu Al-Gebry, za zločiny proti matematike.“

In Teho tento zvrat zaskočil natoľko, že sa nebránil. To umožnilo udalostiam nabrať rýchly spád.

Každá z $n \geq 4$ udalostí mala priradené reálne číslo $u_1, u_2, \dots, u_n$. Navyše boli nejaké reálne čísla navyše, a to u_{n+1}, ktoré bolo rovnaké ako u_1 a u_{n+2}, ktoré sa rovnalo u_2. Predpokladajme, že existuje spád, čo je reálne číslo $s > 0$ také, že pre každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí

$$u_i^2 = s + u_{i+1}u_{i+2}.$$

Dokážte, že aspoň 2 z čísel $u_1, u_2, \dots, u_n$ priradených udalostiam sú záporné.

3.10 Krásny Matematický Svet

kategória **beta**

O pár mesiacov na to bol opäť grafik Peter Senov na návšteve u svojho dobrého priateľa Feuera Sebastiana Bacha. Bach práve niečo maľoval pred domom, zvnútra bolo cítiť dobré jedlo a počuť radostné výkriky detí. Priatelia sa pozdravili a Peter si hneď všimol, že Feuer Sebastian je v dobrej nálade.

„Vieš, od toho súdu s tým kráľom Al-Gebry, tým In Tentom, či ako sa volal…Veľa sa toho zmenilo k lepšiemu. Kombistan si všimol naše útrapy a spolu s Teóriou Čísel apelovali u nového kráľa za zlepšenie našich podmienok. A on ich vypočul! Musím povedať, že kráľ Kartezián sa mi páči viac ako tí predchádzajúci. Umožnil návrat Pyty Gorovej, zrušil otročenie na nekonečných poliach, a tak sa môžem opäť venovať umeniu. Pozri, na čom teraz robím…“

Základom veľdiela Feuera Sebastiana Bacha bol rôznostranný trojuholník ABC. Označme b os uhla ABC a c os uhla ACB. Priamka b pretína stranu AC v bode B_1 a kružnicu opísanú trojuholníku v bode $B_2 \neq B$. Analogicky priamka c pretína stranu AB v bode C_1 a opísanú kružnicu v bode $C_2 \neq C$. Označme I priesečník priamok b, c a bod J zas priesečník priamky B_1C_1 s priamkou B_2C_2. Dokážte, že body I a J sú navzájom rôzne a priamka nimi prechádzajúca je rovnobežná s priamkou BC.

A tak bol v matematike opäť raz mier a poriadok.