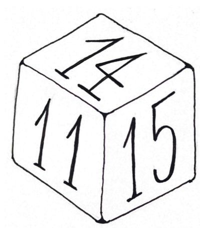
Riešenia 1. kola letnej časti

1.1 Kocka Mojich Spolupovstalcov

Zadanie.

„Mamo, tato, ja už nechcem byť nevoľník!“ povedal Jurko odhodlane svojim rodičom. „OK,“ odpovedal jeho otec a odviedol ho do tábora povstaleckých vojsk Františka Rákociho, keďže vojenská služba bol jediný spôsob ako sa oslobodiť.

Jurkovi sa výcvik páčil, keďže počas neho mohol s ostatnými povstalcami hrať kocky. Presnejšie kocku, lebo mali len jednu. Na jej stenách je napísaných 6 *po sebe idúcich prirodzených čísel. Na obrázku vidíme* 3 *z nich. Vieme, že súčty čísel na protiľahlých stranách sú rovnaké. Čomu sa môže rovnať súčet všetkých čísel?*



Riešenie. opravuje **Maryna** (maryna.horodenchuk@trojsten.sk)

Keďže podľa zadania má byť na kocke 6 po sebe idúcich prirodzených čísel, budeme na nej mať čísla 12 a 13. Tým pádom už poznáme 5 čísel na kocke: 11, 12, 13, 14, 15. Posledné číslo teda môže byť buď 10, alebo 16.

Zostáva nám použiť druhú podmienku zo zadania, že súčty na protiľahlých stenách sú rovnaké. To ale vlastne znamená, že najmenšie číslo bude oproti najväčšiemu, druhé najmenšie oproti druhému najväčšiemu a tretie najmenšie oproti tretiemu najväčšiemu. Teda ak našu šesticu tvoria čísla 10, 11, 12, 13, 14, 15, tak 10 bude oproti 15. Zároveň ale 11 má byť oproti 14, čo ale nie je možné (ako vidíme z obrázka).

Posledná možnosť ktorú ostáva overiť sú čísla 11, 12, 13, 14, 15, 16. Ľahko si rozmyslíme, že táto problematická nebude. Oproti 11 bude číslo 16. Na spodnej stene oproti 14 bude 13. No a nakoniec proti 15 bude číslo 12.

Celkový súčet všetkých čísel teda môže byť iba $11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 = 81$.

1.2 Koniec Masívneho Sprisahania

Zadanie.

Jurkovi sa do bojov v skutočnosti vôbec nechcelo a pri pohľade na krv sa mu robilo mdlo. Takže, keď počas bitky pri Trenčíne povstalci využili svoju prevahu troch ku jednému na panický útek, s radosťou sa k svojim druhom pridal.

František sa po tomto neúspechu musel porátať s dezertérmi. Rátajte aj vy! Nájdite všetky trojice reálnych čísel (x, y, z), spĺňajúcich nasledovné rovnice:

$$x + 2y = 4,$$

$$2xy - 3z^2 = 4.$$

Riešenie. opravujú **Denys** (denys.andrukhovskyi@trojsten.sk) a **Bohdan** (bohdan.bankov@trojsten.sk)

Máme dosť zaujímavú sústavu rovníc. Kým druha rovnica je niečo relatívne zložité, prvá rovnica je len lineárna rovnica, kde sú len dve premenné. Čo ak skúsime vyjadriť napríklad y pomocou x?

$$x + 2y = 4,$$
$$y = \frac{4 - x}{2}.$$

Skúsme to dosadiť do druhej rovnice.

$$2xy - 3z^2 = 4,$$
$$2x\left(\frac{4 - x}{2}\right) - 3z^2 = x(4 - x) - 3z^2 = 4.$$

Vidíme, že náš vyraz je nejaký výraz od x mínus $3z^2$. Číslo $3z^2$ je ale vždy kladné, takže oplatí sa nejak analyzovať, či môže ten výraz od x nadobúdať dostatočne veľké hodnoty, a ak áno, tak ako.

Ukážeme tri rôzne spôsoby, akými sa dá túto analýzu uskutočniť.

Spôsob 1: upraviť výrazy na štvorce

Skúsme upraviť našu rovnicu tak, aby z^2 bolo na jednej strane, a vyraz od x na inej

$$x(4 - x) - 3z^2 = 4$$

$$4x - x^2 - 4 = 3z^2$$

$$-x^2 + 4x - 4 = 3z^2.$$

Keďže z^2 je nezáporné číslo, tak aj $-x^2 + 4x - 4$ musí byť nezáporne. Nerovnosť $-x^2 + 4x - 4 \geq 0$ vyriešime buď štandardným spôsobom, alebo uvedomením si, že $-x^2 + 4x - 4 = -(x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2) = -(x - 2)^2$. Teda máme nerovnosť $-(x - 2)^2 \geq 0$, ekvivalentne $(x - 2)^2 \leq 0$. Ale $(x - 2)^2 \geq 0$ ako druhá mocnina celého čísla. Takže $(x - 2)^2 = 0$, a $x = 2$. Zrejme potom $3z^2 = -(x - 2)^2 = 0$, teda $z = 0$. Hodnotu y nájdeme dosadením do prvej rovnice: $y = \frac{4-x}{2} = \frac{4-2}{2} = 1$.

Tento spôsob používa jeden zo základných trikov v algebre, kde upravíme výraz tak, aby obsahoval štvorce.

Spôsob 2: diskriminant

Čo, ak sa pozrieme na rovnicu $x(4 - x) - 3z^2 = 4$ ako na kvadratickú rovnicu od x, a z by sme uvažovali len ako nejakú neznámu konštantu, takzvaný *parameter*? Zapíšeme túto rovnicu v tvare, v ktorom kvadratické rovnice obyčajne riešime.

$$x(4-x)-3z^2=4,$$
$$-x^2+4x+(-4-3z^2)=0.$$

No dobre. Všimneme si, že v tomto prípade konštanty a, b, c v rovnosti $ax^2+bx+c=0$ máme: $a=-1$, $b=4$, $c=(4-z^2)$.

Poznáme asi tak jeden univerzálny spôsob riešenia kvadratických rovníc, a to pomocou diskriminantu. Zrátajme ho:

$$\begin{aligned}D=b^2-4ac&=4^2-4(-1)(-4-z^2)\\&=16+4(-4-z^2)\\&=16-16-4z^2\\&=-4z^2.\end{aligned}$$

Vieme, že riešenia rovnice existujú práve vtedy, keď je diskriminant nezáporný. Takže $-4z^2\geq 0$, z čoho dostaneme, že nutne musí platiť $z=0$.

Keď $z=0$, tak aj $D=-4z^2=0$. Dosadíme to do známeho vzorca a zrátame x:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-4\pm 0}{2(-1)}=\frac{-4}{-2}=2.$$

Takže, $x=2$, a hodnotu y nájdeme rovnako dosadením do rovnice $y=\frac{4-x}{2}$.

Spôsob 3: maximum kvadratickej funkcie

Pozrieme sa na výraz od x zvlášť. Prepíšeme $x(4-x)=4x-x^2=(-1)x^2+4x+0$. Keďže koeficient pri x^2 je záporný, parabola smeruje nadol, takže táto funkcia má práve jedno maximum. Hodnotu x v tomto prípade vieme vypočítať: pre parabolu $f(x)=ax^2+bx+c$ sa maximum alebo minimum nadobúda v bode $x=\frac{-b}{2a}$. V našom prípade $a=-1, b=4$, takže maximum je v bode $x=\frac{-4}{2(-1)}=\frac{-4}{-2}=2$. Spočítame, že hodnota výrazu pre $x=2$ je $2(4-2)=4$.

Takže, vieme že platí $x(4-x)\leq 4$. Spojíme teraz túto nerovnosť s rovnosťou $4=x(4-x)-3z^2$.

$$4=x(4-x)-3z^2\leq 4-3z^2.$$

Nerovnosť $4\leq 4-3z^2$ ľahko vyriešime, keďže je ekvivalentná s nerovnosťou $0\leq -3z^2$, alebo $0\geq z^2$ (všimnite si, že keď vydelíme obidve časti nerovnosti číslom -3, tak znak nerovnosti sa otočí, keďže -3 je záporné číslo). Nerovnosť $0\geq z^2$ má len riešenie $z=0$, keďže druhá mocnina reálneho čísla je vždy nezáporná, a pre nenulové reálne čísla dokonca kladná.

Takže, $z = 0$. Číslo x nájdeme buď spätným dosadením z do rovnice $x(4-x) - 3z^2 = 4$ a vyriešením kvadratickej rovnice, alebo uvedomením toho, že pre $x \neq 2$ výraz $x(4-x)$ by bol ostro menší ako 4, a v tom prípade by malo platiť $4 < 4 - 3z^2$, a potom by platilo $z^2 < 0$, čo je zrejme spor.

Takže $x = 2$. Hodnotu y by sme potom našli dosadením do rovnosti $y = \frac{4-x}{2} = \frac{4-2}{2} = 1$.

Teda jedinou vyhovujúcou trojicou čísel (x, y, z) je trojica $(2, 1, 0)$.

Záver

Pri každom spôsobe riešenia sme našli práve jednu trojicu, a to $(x, y, z) = (2, 1, 0)$.

1.3 Kadejakého Mafiána Strážim

Zadanie.

Jurko sa bál odplaty Františka Rákociho, a tak sa po návrate domov nechal naverbovať do druhej armády, tentoraz cisárskej, ktorá ich pri Trenčíne tak ľahko rozohnala. Tí mu v boji až tak nedôverovali, a tak ho nechali strážiť väzňov na Bytčianskom zámku. S nimi Jurko vždy vychádzal zadobre a skamarátil sa aj s istým zbojníkom Uhorčíkom.

Na zemi je kriedou napísané číslo 2026. *Jurko a Uhorčík sa hrajú hru. Postupne sa striedajú v ťahoch, pričom začína Jurko. Hráč, ktorý je na ťahu, vyberie taký kladný deliteľ d čísla N aktuálne zapísaného na zemi, aby bolo číslo $N - (2d - 1)$ kladné. Pôvodné číslo N následne zmaže a nahradí číslom $N - (2d - 1)$. Prehráva hráč, ktorý na zem napíše číslo* 1. *Kto vie zaručene vyhrať?*

Riešenie. opravujú **BaškaN** (barbora.novosadova@trojsten.sk) a **Kubko** (jakub.poljovka@trojsten.sk)

Všimnime si, ako sa pri hre mení parita čísla N: ten, kto je na ťahu, odčituje vždy nepárne číslo $2d - 1$. Odčítavanie nepárneho čísla mení paritu, teda ak na začiatku ťahu je napísané párne číslo, to čo napíšem, bude nepárne, a naopak.

Jurko začína, pričom na zemi je párne číslo. Teda on napíše na zem nepárne číslo, následne Uhorčík napíše párne, a tak sa budú striedať, až kým niekto nenapíše 1 — ten niekto bude zjavne Jurko, keďže 1 je nepárne. Uhorčík je teda zaručený víťaz.

Ešte poznamenajme, že pokiaľ $N > 1$, vždy viem urobiť ťah. Môžem totiž voliť $d = 1$, keďže $1 \mid N$ a $N - (2 \cdot 1 - 1) = N - 1 > 0$ pre $N > 1$. Pre $N = 1$ už ťah robiť nepotrebujem, keďže hráč predo mnou prehral.

1.4 Kamarát Mi Sfúkol

Zadanie.

Jurkovi sa jeho nového kamaráta zavše uľútostilo, a tak mu poradil ako z hradu utiecť. Pred nadriadenými sa následne poctivo ponúkol, že pôjde väzňa naháňať do okolitých lesov. Odvtedy ho už viac nevideli.

V trojuholníku LES zvolíme bod X na strane LS tak, aby $|SX| = 2|XL|$. Podobne zvolíme bod Y na strane LE tak, aby $|EY| = 2|YL|$. Bod Z zvolíme tak, aby $LYZX$ bol rovnobežník a LZ tvorilo uhlopriečku tohto rovnobežníka.

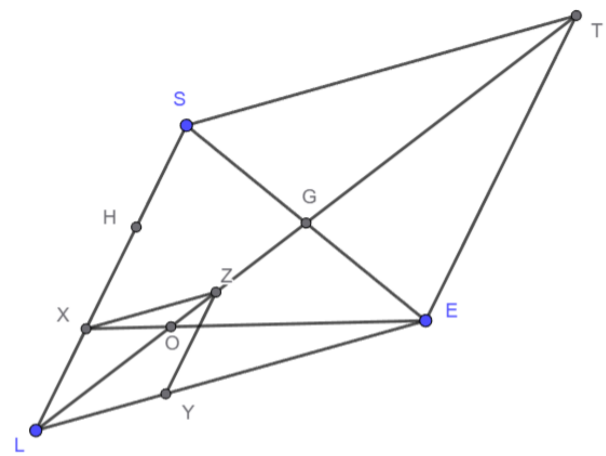
a) *V akom pomere delí priamka EX úsečku LZ?*

b) *V akom pomere delí priamka SY úsečku LZ?*

c) *Dokážte, že priamky LZ, EX a SY sa pretínajú v jednom bode.*

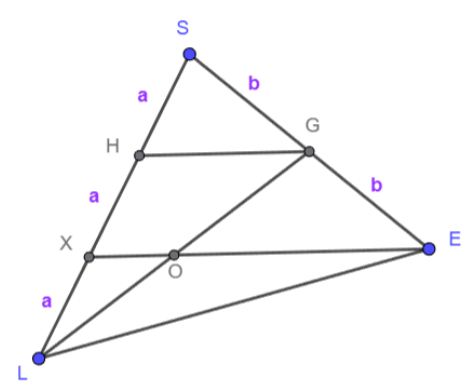
Riešenie. opravujú **Filip** (filip.kotoc@trojsten.sk) a **Nate** (nina.petlanova@trojsten.sk)

Na začiatok si nakreslíme ilustračný obrázok zadania, do ktorého si hneď vyznačíme aj zopár pomocných bodov:

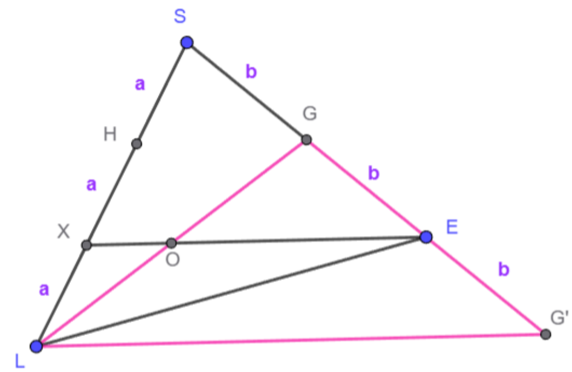


Modrými bodmi máme vyznačený trojuholník LES, v obrázku sú aj body X, Y, Z zo zadania. Priesečník úsečiek EX a LZ si nazvime O, ďalej si označme bod H, ktorý leží presne v strede úsečky XS. Teraz si môžeme pridať bod T, tak aby štvoruholník $LETS$ bol rovnobežník a LT bola jeho uhlopriečka, priesečník uhlopriečok rovnobežníka $LETS$ si označíme ako G. Vieme, že uhlopriečky v rovnobežníku sa navzájom rozpoľujú, takže bod G leží v strede úsečky SE a zároveň v strede úsečky LT. Zároveň si môžeme všimnúť, že rovnobežník $LETS$ vieme dostať rovnoľahlosťou, z rovnobežníka $LYZX$ so stredom v bode L a koeficientom $k = 3$, keďže oba body Y a aj X ležia v $\frac{1}{3}$ úsečiek LE a LS.

Vďaka tomu si môžeme trochu zjednodušiť naše riešenie, a to tak, že nebudeme skúmať, v akej časti uhlopriečky LZ sa nachádza bod O, no namiesto toho budeme skúmať v akej časti úsečky LG sa nachádza bod O. Máme teda nový zjednodušený obrázok:

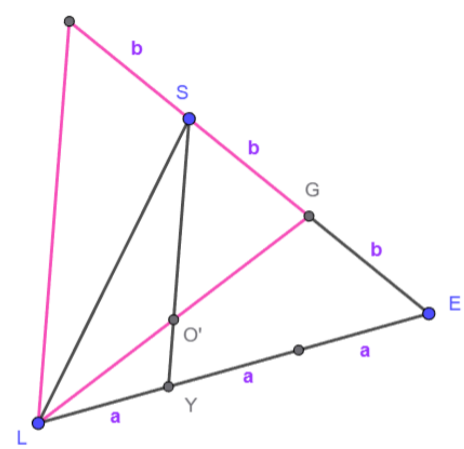


Vyznačíme si všetky rovnaké vzdialenosti písmenami a a b. Keď si v tomto novom obrázku spojíme body H a G, tak nám vznikne stredná priečka trojuholníku XES. Z toho vieme, že ak by sme spravili rovnoľahlosť malého trojuholníka HGS so stredom v bode S a koeficientom $k = 2$, dostali by sme pôvodný trojuholník XES. Ak by sme však túto rovnoľahlosť dali s koeficientom $k = 3$, tak by sme dostali nový trojuholník, kde by sa S zobrazilo samé na seba, bod H by sa zobrazil na bod L a bod G by sa zobrazil do nového bodu G'.



Vieme, že vzdialenosť bodov $|EG'| = b$, pretože z rovnoľahlosti $|SG'| = 3|SG|$. Keď si teraz vyznačíme trojuholník $LG'G$, tak vidíme, že bod E je v strede strany $G'G$, zároveň vidíme, že úsečka OE je rovnobežná s LG', potom je ale úsečka OE stredná priečka trojuholníka $LG'G$ a teda bod O leží v strede úsečky LG.

Analogickým postupom by sme mohli zistiť, že priesečník úsečiek SY a LZ tiež leží v strede úsečky LG a teda, že tento priesečník je totožný s bodom O. Viď obrázok. ČBTD



Pokračujeme ale ešte, pretože potrebujeme už len dopočítať pomer, v ktorom bod O delí úsečku LZ. Vieme, že bod O leží v strede úsečky LG, a že bod G leží v strede úsečky LT, takže potom platí $4|LO| = |LT|$. Zároveň sme si vyššie povedali, že veľký rovnobežník $LETS$ vznikol rovnoľahlosťou malého rovnobežníka $LYZX$ s koeficientom

$k = 3$, takže platí: $3|LZ| = |LT|$. Potom keď spojíme tieto 2 rovnice dostaneme

$$4|LO| = 3|LZ|$$

$$|LO| = \frac{3}{4}|LZ|$$

$$|OZ| = \frac{1}{4}|LZ|$$

A teda pomer v ktorom delí bod O úsečku LZ je $3:1$.

1.5 Kradnutie – Môj Svet

Zadanie.

V lese Jurko ľahko našiel svojho kamaráta a ochotne sa stal členom jeho zbojníckej družiny. Spolu ozbíjali mnoho zámožných kupcov a šľachticov. Jedného dňa si Uhorčík uvedomil, že už má dosť našetrené vo svojom dôchodkovom sporení, a tak sa rozhodol, že ukončí svoju aktívnu kariéru. Zbojníci si tak museli spomedzi seba vybrať nového kapitána.

Kapitánom musí byť niekto, kto dokáže v každom ročnom období nájsť vhodný lup. Zbojníci si teda spomedzi seba zvolia toho, kto nájde všetky celé čísla m, n také, že $\frac{2m-1}{n}$ *aj* $\frac{2n-1}{m}$ *sú celé čísla. Nájdite ich aj vy!*

Riešenie. opravuje **Mišo M.** (michal.molnar@trojsten.sk)

Než sa vrhneme do samotného riešenia, všimnime si, že $2m-1$ aj $2n-1$ sú nepárne čísla (od násobku 2 sme odčítali 1). Ich delitele teda budú nutne nepárne čísla, takže aby mali oba zlomky celočíselnú hodnotu, aj m a n musia byť nepárne. Pripomeňme si tiež fakt, že m, n môžu byť podľa zadania aj kladné aj záporné.

Začneme špeciálnym prípadom, keď $|m| = |n|$, t. j. $m = \pm n$. Dosadením do druhého zlomku zistíme, že n musí byť deliteľom výrazu $2n-1$. Keďže n isto delí $2n$, musí deliť aj rozdiel týchto dvoch čísel, ktorým je číslo 1. Platí tak $n = \pm 1$ a tým pádom aj $m = \pm 1$, hoci znamienka môžu mať rôzne. Ľahko si všimneme, že všetky štyri možnosti vyhovujú, delíme totiž číslom ± 1. Prvé riešenia tak sú $(m, n) = (1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ a $(-1, -1)$.

Bez nášho špeciálneho prípadu vieme povedať, že jedno z čísel m, n bude mať väčšiu absolútnu hodnotu. Bez ujmy na všeobecnosti, nech platí $|m| > |n|$. Riešenia, kde je „väčšie" n dostaneme jednoducho vymenením hodnôt.

Pozrime sa teraz bližšie na zlomok $\frac{2n-1}{m}$. Keďže n je v absolútnej hodnote menšie, hodnotu zlomku vieme pekne obmedziť. Platí

$$|2n-1| \leq 2|n| + 1 < 2|m| + 1.$$

Keďže m, n sú celé čísla vieme vyvodiť dokonca $|2n-1| \leq 2|m|$. Pre celý zlomok tak dostaneme odhad

$$\left|\frac{2n-1}{m}\right| = \frac{|2n-1|}{|m|} \leq \frac{2|m|}{|m|} = 2.$$

Na začiatku sme zistili, že čitateľ aj menovateľ musia byť nepárne. Podiel dvoch nepárnych čísel musí vyjsť opäť nepárny, takže jedine $\frac{2n-1}{m} = \pm 1$, čo môžeme upraviť na $m = \pm(2n-1)$.

Keď už máme vyjadrenú jednu neznámu voči druhej, môžeme dosadiť do druhého zlomku a dopočítať sa k výsledkom. Podľa znamienka máme dva prípady.

Prípad $m = 2n - 1$: V tomto prípade dostávame

$$\frac{2(2n-1)-1}{n} = \frac{4n-3}{n} = 4 - \frac{3}{n}.$$

Ľahko vidíme, že n musí byť ± 1 alebo ± 3. Druhý zlomok sme zabezpečili tým, že $m = 2n - 1$, takže vyhovujú všetky štyri riešenia $(m, n) = (1, 1)$, $(-3, -1)$, $(5, 3)$, $(-7, -3)$. Riešenie $(1, 1)$ nespĺňa podmienku $|m| > |n|$, našli sme ho však už na začiatku a vieme, že vyhovuje.

Prípad $m = -(2n - 1)$: V druhom prípade dostávame

$$\frac{-2(2n-1)-1}{n} = \frac{-4n+1}{n} = -4 + \frac{1}{n}.$$

Ľahko vidíme, že n je ± 1, takže riešenia sú dve: $(m, n) = (-1, 1)$ a $(3, -1)$. Opäť sme našli aj riešenie $(-1, 1)$, ktoré nespĺňa $|m| > |n|$, ale ktoré sme tiež mali aj predtým.

Zostáva nám už len pridať „otočené" riešenia, kde $|m| < |n|$, a zistíme, že všetky možné hodnoty (m, n) sú:

$$(1,1),\ (1,-1),\ (-1,1),\ (-1,-1),\ (-3,-1),\ (5,3),\ (-7,-3),\ (-1,-3),\ (3,5),\ (-3,-7),\ (3,-1),\ (-1,3).$$

1.6 Kapitán Mocný Silný

Zadanie.

Keďže sa Jurko ukázal ako najlepší pátrač, zverili práve jemu kapitánstvo aj s kapitánskou valaškou. Tá bola vskutku veľká a nepraktická, tak nečudo, že sa o ňu pri ceste lesom potkol a spadol tvárou priamo do tŕnia. V ňom videl úžasný zázrak – pôvabnú žiariacu dievčinu, ktorá mu ponúkla akýkoľvek dar, ktorý si zaželá. Jurko vedel, ako si zbojníci ctia um a prefíkanosť, a tak bez váhania odpovedal: „Silu!"

Presvedčte sa, že Jurkova sila nie je menšia ako doteraz. Nech a, b, c sú kladné reálne čísla také, že $ab + bc + ca = 1$. Dokážte, že platí

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \sqrt{3} + \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a}.$$

Riešenie. opravuje **Petr** (petr.velycko@trojsten.sk)

Nejdříve začneme tím, že provedeme několik úprav nerovnosti, kterou se snažíme dokázat.

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \sqrt{3} + \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a};$$

$$\frac{1-ab}{a+b} + \frac{1-bc}{b+c} + \frac{1-ac}{a+c} \geq \sqrt{3};$$

$$\frac{ac+bc}{a+b} + \frac{ab+ac}{b+c} + \frac{ab+bc}{a+c} \geq \sqrt{3};$$

$$a + b + c \geq \sqrt{3}.$$

Mezi druhou a třetí nerovnosti jsme třikrát využili předpokladu $ab+bc+ac = 1$. Dále si uvědomíme, že $a+b+c > 0$, a tedy umocnění nerovnosti na druhou je ekvivalentní úprava, můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 &\geq 3; \\ a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac) &\geq 3; \\ a^2+b^2+c^2 &\geq 1; \\ a^2+b^2+c^2 &\geq ab+ac+bc; \\ 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc &\geq 0; \\ a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ac+a^2 &\geq 0; \\ (a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Dostali jsme nerovnost, která evidentně platí (druhé mocniny reálných čísel jsou vždy nezáporné) a jelikož všechny úpravy, které jsme provedli, jsou ekvivalentní, můžeme nerovnost ze zadání považovat za dokázanou.

1.7 Koľko Máme Striebra?

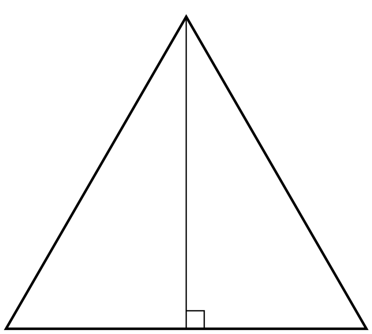
Zadanie.

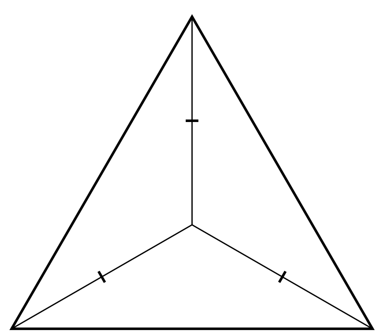
Keď Jurkovi druhovia našli svojho kapitána podriemkávať v kríčku, náramne sa potešili. Potrebovali si totiž rozdeliť lup, no nevedeli, ako to spraviť spravodlivo. Jurka teda zobudili a on prišiel s ideálnym plánom.

Lup si rozložili do trávy do tvaru rovnostranného trojuholníka. Majú ho rozdeliť na $n \geq 2$ menších navzájom zhodných trojuholníkov (t. j. majú zhodné uhly, dĺžky strán a obsah) tak, aby tieto trojuholníky neboli rovnostranné. Určte najmenšie n, pre ktoré sa to nedá.

Riešenie. opravuje **Iľo** (michal.ilkovic@trojsten.sk)

Najprv ukážeme konštrukciu pre $n = 2$ a $n = 3$:

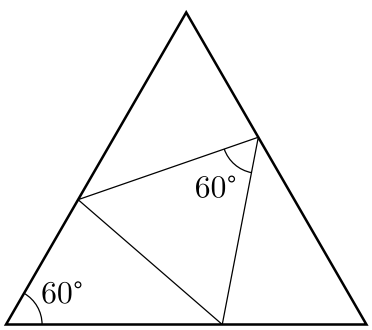


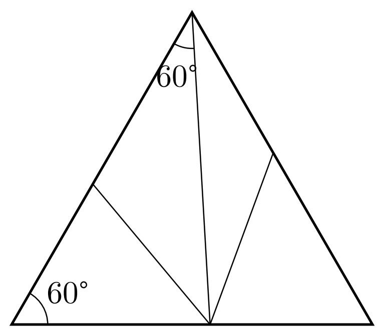


Teraz dokážeme, že nevieme rozdeliť rovnostranný trojuholník na štyri zhodné nerovnostranné trojuholníky. Rovnostranný trojuholník budeme značiť $\triangle$ a dĺžku jeho strany označme a. Všimnime si, že vnútri každej strany $\triangle$ (bez koncových bodov) sa musí nachádzať aspoň jeden vrchol nejakého zo štyroch zhodných trojuholníkov.

Inak by celá strana $\triangle$ musela byť totožná so stranou jedného zo zhodných trojuholníkov a teda by každý zo štyroch zhodných trojuholníkov musel mať jednu stranu dĺžky a. Existujú len tri spojnice dvoch bodov v $\triangle$ dĺžky a a to jeho tri strany, pričom tieto strany nemôžu byť stranami dvoch zhodných trojuholníkov naraz. Máme štyri zhodné trojuholníky, takže nemôžu mať dĺžku strany a.

Teraz spočítame uhly trojuholníkov dvomi rôznymi spôsobmi. Keďže máme štyri zhodné trojuholníky, súčet všetkých ich uhlov bude $4 \cdot 180°$. Zároveň ale vieme spočítať všetky uhly, ktoré sú pri vrcholoch $\triangle$, čo je $3 \cdot 60°$ a vrcholoch na stranách $\triangle$, čo je väčšie rovné $3 \cdot 180°$, pretože vieme, že na každej strane máme aspoň jeden vrchol a každý vrchol prispieva práve $180°$. To je dokopy väčšie rovné $4 \cdot 180°$. Takže vieme, že na každej strane $\triangle$ je práve jeden vrchol a vnútri $\triangle$ nie je žiaden vrchol zhodných trojuholníkov, lebo by bol súčet uhlov spočítaný druhým spôsobom viac než $4 \cdot 180$. Teraz si uvedomíme, že každý vrchol $\triangle$ je vrcholom aspoň jedného zo zhodných trojuholníkov a každý zo zhodných trojuholníkov má vrchol v najviac jednom z vrcholov $\triangle$ (lebo nemôže mať stranu dĺžky a). Z toho vyplýva, že máme iba dve možnosti, ako rozdeliť $\triangle$. V prvej možnosti každý vrchol $\triangle$ je vrcholom práve jedného zhodného trojuholníka a v druhej možnosti je jeden vrchol $\triangle$ vrcholom práve dvoch trojuholníkov:





V prvom prípade platí, že stredný trojuholník musí byť rovnostranný, lebo pri zhodných trojuholníkoch je oproti zhodnej strane zhodný uhol. Takisto v druhom prípade, ale uhol pri vrchole $\triangle$ s dvomi trojuholníkmi je menší ako $60°$, takže pre $n = 4$ konštrukcia neexistuje, ako sme chceli ukázať.

1.8 Kňaz Márne Súperí

Zadanie.

O kňazoch sa hovorí, že žijú bohatý *duchovný život. Preto sa Jurko so svojou družinou rozhodli, že jedného olúpia. Ten sa však nechcel nechať olúpiť a bránil sa silou mocou. Keďže Jurko nerád ľuďom ubližoval, rozhodol sa, že ho priviažu k neďalekému betónovému pražcu, kým budú v jeho kapse hľadať nejaké vzácnosti.*

Nech $\sigma(n)$ označuje súčet deliteľov čísla n (vrátane n) a $d(n)$ označuje počet deliteľov čísla n. Nájdite všetky vzácnosti, teda kladné celé čísla n spĺňajúce $\sigma(d(n)) = n$.

Riešenie. opravuje **Krivoš** (jakub.krivosik@trojsten.sk)

Takýto typ úloh sa často rieši tak, že ukážeme, že niektorá zo strán bude väčšia ako druhá od nejakého n a všetky hodnoty menšie ako n skontrolujeme ručne. Takže riešenie začneme tým, že si odhadneme funkcie $\sigma(n)$ a $d(n)$.

Začneme odhadom $\sigma(n)$, v ktorom bude kľúčovou myšlienkou fakt, že delitele n "chodia v pároch", teda že ak d je deliteľom n, potom aj $\frac{n}{d}$ je deliteľom n. Delitele veľkosti nanajvýš $\sqrt{n}$ sa nám budú párovať s deliteľmi veľkosti aspoň $\sqrt{n}$. Teda môžeme odhadnúť $\sigma(n)$ zhora ako

$$\sigma(n) \le \sum_{i=1}^{\sqrt{n}} \left(i + \frac{n}{i}\right) = \sum_{i=1}^{\sqrt{n}} i + \sum_{i=1}^{\sqrt{n}} \frac{n}{i} \le \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}{2} + \sum_{i=1}^{\sqrt{n}} \frac{n}{i} = \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}{2} + n\sum_{i=1}^{\sqrt{n}} \frac{1}{i} \le \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}{2} + \frac{n\lceil \log_2(n)\rceil}{2},$$

pričom $\lceil \log_2 \sqrt{n}\rceil$ sme dostali tak, že sme členy poskupinkovali do skupiniek veľkostí $1, 2, 4, 8, \dots$ a každú skupinku sme odhadli zhora jedničkou. Skupinky boli $1; \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \le 2 \cdot \frac{1}{2} = 1; \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \le 4 \cdot \frac{1}{4} = 1, \dots$. Počet skupiniek je $\left\lceil \log_2\left(\sqrt{n}\right)\right\rceil = \left\lceil \frac{\log_2(n)}{2} \right\rceil$.

Teraz prišiel rad na odhad $d(n)$. Popárovaním ako vyššie vieme jednoducho dostať odhad $d(n) \le 2\sqrt{n}$.

Našli sme dva odhady pre naše funkcie, oba odhady sú rastúce funkcie, teda odhad veľkosti zloženej funkcie $\sigma(d(n))$ dostávame ako zloženie odhadov, teda:

$$\frac{1}{4}x^2 = \sigma(d(n)) \le \frac{x + \sqrt{x} + x\lceil \log_2(x)\rceil}{2}$$

pričom $x = 2\sqrt{n}$ a ľavá rovnosť je zo zadania. Po predelení x a prenásobení 2 dostávame

$$\frac{1}{2}x \le 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \lceil \log_2(x)\rceil < 1 + \frac{1}{3} + (\log_2 x + 1).$$

Všimnime si, že pre $x = 13$ je ľavá strana rovná $6 + 1/2$ a pravá $6 + 1/3$, čiže pravá strana je menšia. Zároveň, zväčšením x o 1 sa ľavá strana zväčší o $1/2$ a pravá strana o menej ako $1/2$. Totiž,

$$\log_2(x+1) - \log_2(x) = \log_2\left(\frac{x+1}{x}\right) = \log_2\left(1 + \frac{1}{x}\right),$$

čo je pre $1 + 1/x < \sqrt{2} \Rightarrow x > 3$ zrejme menšie ako $\log_2 \sqrt{2} = 1/2$. Vyhovovať teda môžu len $x < 13$. Keďže už vieme, že $13 > x = 2\sqrt{n} \ge d(n)$, ostáva nám prešetriť prípady $d(n) \le 12$. To urobíme tak, že pre stanovené $d(n)$ spočítame $\sigma(d(n))$. Ak by toto bolo rovné n, tak $d(\sigma(d(n))$ by malo byť rovnaké ako $d(n)$.

$d(n)$	**1**	**2**	**3**	4	5	**6**	7	8	9	10	11	12
$\sigma(d(n))$	**1**	**3**	**4**	7	6	**12**	8	15	13	18	12	28
$d(\sigma(d(n)))$	**1**	**2**	**3**	2	4	**6**	4	4	2	6	6	6

Finálne dostaneme, že jediné vyhovujúce n sú $n \in \{1, 3, 4, 12\}$.

Lepší odhad $d(n)$.

Nech $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ je prvočíselný rozklad n, potom $d(n) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)$, keďže pre každé prvočíslo p_i máme $\alpha_i + 1$ možností na exponent, v ktorom môže byť v deliteľovi n. Teraz dostávame:

$$\frac{d(n)^2}{n} = \prod_i^k \frac{(\alpha_i+1)^2}{p_i^{\alpha_i}} \le \frac{9}{4} \cdot \frac{4}{3} = 3,$$

kde sme odhad dosiahli z faktu, že $\frac{(x+1)^2}{p^x}$ pre $p \geq 5$ je vždy ako menšie 1 a pre $p = 2$ a $p = 3$ dosahujú maximum s exponentami 2 a 1. Upravením dostávame odhad $d(n) \leq \sqrt{3n}$. Pre takýto odhad by sme na konci museli ručne preskúšať len 7 možností namiesto 12.

1.9 Klofli Ma Strukovinami

Zadanie. *Jurkovo vyčíňanie už dlhšie ležalo v žalúdku mocnej ruke zákona, ktorá ho nie a nie uchopiť. Keď sa však k žandárom dostala historka o potknutí sa na valaške, zosnovali plán. Doviezli všetok hrach z Uhorska a rozsypali ho po celej Terchovej, dúfajúc, že sa zbojník na aspoň jednom zrnku potkne. A tak sa nakoniec aj stalo...*

Trojica žandárov rozostavená v rohoch trojuholníka ABC úplne obkľúčila Jurka J, ktorý ležal niekde vo vnútri tohto trojuholníka. Priamky AJ a BC, BJ a AC, CJ a AB sa pretínajú postupne v bodoch A', B', C'. Ak ABC má obsah 1, aký najväčší obsah môže mať trojuholník $A'B'C'$?

Riešenie. opravuje **Mati** (matus.zelko@trojsten.sk)

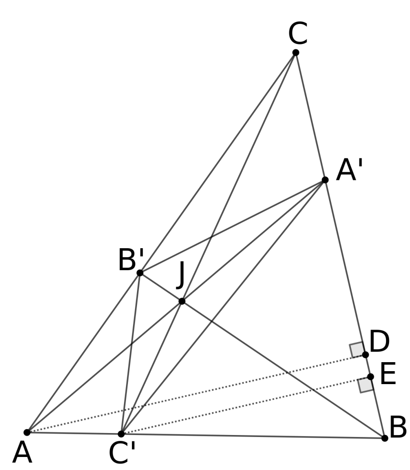
Možných prístupov je viacero, vzorové riešenie vychádza z riešenia od Alexa Markusa. Ak si zvolíme J ako ťažisko, tak je ľahké ukázať, že obsah $S_{A'B'C'} = 1/4$.

Teraz ukážeme, že ide o najväčší možný obsah. Označme dĺžky strán $BA', CB', AC', A'C, B'A$ a $C'B$ postupne ako a, b, c, x, y a z. Potom z Cevovej vety[1] plynie, že $\frac{a}{x} \cdot \frac{b}{y} \cdot \frac{c}{z} = 1$. Označme $K = xyz = abc$. Napríklad nasledovne ABC je tvorený stredmi strán. Jeho strany sú strednými priečkami, takže to je podobný trojuholník s koeficientom podobnosti $\frac{1}{2}$, takže jeho obsah je $\frac{1}{4}$.

Chceme dokázať, že $\frac{S_{C'BA'}}{S_{ABC}} = \frac{az}{(a+x)(c+z)}$.

Rátajme

$$\frac{S_{ABA'}}{S_{ABC}} = \frac{a \cdot v_a/2}{(a+x) \cdot v_a/2} = \frac{a}{(a+x)}.$$



[1] https://prase.cz/library/CevovaAMenealovaVetaAZ/CevovaAMenealovaVetaAZ.pdf

Označme postupne D a E päty výšok z bodov A a C' na stranu BC. Trojuholníky $C'BE$ a ABD sú podobné, preto $\frac{|C'E|}{|AD|} = \frac{z}{c+z}$, avšak

$$\frac{S_{C'BA'}}{S_{ABA'}} = \frac{|C'E|}{|AD|} = \frac{z}{(c+z)}.$$

Vynásobením dvoch získaných rovností dostávame hľadaný výraz. Pre ostatné strany dostávame

$$S_{C'BA'} = \frac{S_{C'BA'}}{S_{ABC}} = \frac{az}{(a+x)(c+z)},$$

$$S_{A'CB'} = \frac{S_{A'CB'}}{S_{ABC}} = \frac{bx}{(b+y)(a+x)},$$

$$S_{B'AC'} = \frac{S_{B'AC'}}{S_{ABC}} = \frac{cy}{(c+z)(b+y)}.$$

Keďže platí $S_{ABC} = 1 - S_{B'AC'} - S_{C'BA'} - S_{A'CB'}$, tak nám stačí ukázať, že $S_{B'AC'} + S_{C'BA'} + S_{A'CB'} \geq \frac{3}{4}$. Po dosadení chceme aby platilo

$$\frac{cy}{(c+z)(b+y)} + \frac{az}{(a+x)(c+z)} + \frac{bx}{(b+y)(a+x)} \geq \frac{3}{4}$$

Prenásobením a ekvivalentnými úpravami postupne dostávame

$$4abz + 4ayz + 4bcx + 4bxz + 4acy + 4cxy \geq 3(a+x)(b+y)(c+z),$$

$$abz + ayz + bcx + bxz + acy + cxy \geq 3abc + 3xyz = 6K.$$

Avšak pre ľavú stranu z AG-nerovnosti plynie

$$abz + ayz + bcx + bxz + acy + cxy \geq 6\sqrt[6]{a^3b^3c^3x^3y^3z^3} = 6\sqrt[6]{K^3K^3} = 6K.$$

Tým sme dokázali, že $S_{ABC} \leq 1/4$.

1.10 Krutý Mestský Súd

Zadanie.

Keď žandári Jurka chytili, priviedli ho pred súd. Tam ho obvinili z výtržníctva, pašeráctva, zbojníčenia, vedenia zločineckej skupiny a navyše z pokusu o vraždu, kde obžaloba tvrdila, že zbojnícka družina pod Jurkovým vedením hodila kňaza do hlbokej studne.

Jurkove výpovede boli umiestnené do tabuľky $n \times n$. V každom políčku bola práve jedna výpoveď, pričom každá z nich je označená buď ako pravdivá, alebo ako nepravdivá. Nad mriežkou a naľavo od nej stoja Obhajca a Žalobca. Tí vykonávajú kontroly výpovede. Jedna kontrola začína tak, že Obhajca si vyberie ľubovoľný stĺpec a Žalobca ľubovoľný riadok tabuľky. Následne nimi súbežne políčko po políčku prejdú, Obhajca zhora dole a Žalobca zľava doprava. Keď obidvaja naraz skontrolujú celý riadok, resp. stĺpec, kontrola končí. Vieme, že bez ohľadu na to, aký riadok a stĺpec *by si na začiatku kontroly vybrali, naraz by na políčkach označených ako nepravdivé stáli v práve jednom momente. Pre aké n existuje také vyplnenie tabuľky?*

Riešenie. opravuje **Džavo** (adam.dzavoronok@trojsten.sk)

Podľa Riša Dudeka. Namiesto tabuľky s výpoveďami pracujme s maticou A, ktorá má ako prvky čísla 0 a 1. Nezvyčajne, 0 zodpovedá pravej výpovedi a 1 nepravdivej. Podmienku zo zadania teda môžeme vyjadriť ako

$$\sum_m A_{i,m}A_{m,j} = 1.$$

Iný spôsob, ako sa na toto môžeme pozrieť, je že A^2 musí byť matica, ktorá obsahuje iba jednotky (ale to nevyužijeme). Z predchádzajúcej rovnosti, vybratia konštanty pred súčet a výmeny súčtových premenných máme

$$\sum_b A_{b,j} = \sum_b A_{b,j} \sum_a A_{i,a}A_{a,b} = \sum_{a,b} A_{i,a}A_{a,b}A_{b,j} = \sum_a A_{i,a} \sum_b A_{a,b}A_{b,j} = \sum_a A_{i,a}.$$

Teda

$$\sum_b A_{b,j} = \sum_a A_{i,a}.$$

Všimnime si ale, že ľavá strana tejto rovnice je súčet j-teho stĺpca a pravá strana je súčet i-teho riadku. Hodnoty i, j môžu byť ľubovoľné, teda vidíme, že všetky riadky aj stĺpce musia mať rovnaký súčet. Nech je to x, teda súčet celej tabuľky je xn. Potom

$$x^2n = x\sum_{i,m} A_{i,m} = \sum_{i,m} A_{i,m} \sum_j A_{m,j} = \sum_{i,j,m} A_{i,m}A_{m,j} = \sum_{i,j} 1 = n^2.$$

Odtiaľ $x = \sqrt{n}$.

Avšak x musí byť celé číslo, takže n musí byť štvorec.

Teraz ukážeme konštrukciu pre prípad, keď n je dokonalý štvorec. Nech $n = w^2$. Tabuľku veľkosti $n \times n$ rozdelíme na w^2 menších štvorcov veľkosti $w \times w$. Môžeme si ju teda predstaviť ako $w \times w$ tabuľku, ktorej prvkami sú štvorce veľkosti $w \times w$.

Pre všetky štvorce nachádzajúce sa v i-tom stĺpci tejto veľkej tabuľky vyplníme ich i-ty riadok jednotkami a všetky ostatné políčka necháme nulové.

Ukážeme, že táto tabuľka spĺňa požadovanú vlastnosť. Ak vyberieme ľubovoľný riadok celej tabuľky, nachádza sa v ňom presne jeden súvislý úsek jednotiek dĺžky w. Na druhej strane, v každom stĺpci sa jednotky objavujú pravidelne každých w riadkov.

Preto pre ľubovoľne zvolený riadok a ľubovoľný stĺpec existuje práve jedna pozícia, kde sa jednotky „stretnú“. Z toho vyplýva, že súčet $\sum_m A_{i,m}A_{m,j}$ je vždy rovný 1, ako sme chceli.

Príklad konštrukcie pre $w = 3$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$