



Milí študenti, učitelia a ostatní matematickí nadšenci!

Dostávate do rúk úvodný leták letnej časti 47. ročníka Korešpondenčného Matematického Seminára (KMS). Táto súťaž organizovaná občianskym združením Trojsten na pôde Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave (FMFI UK) je pre stredoškóľákov jedinečnou príležitosťou na zdokonalenie svojich matematických schopností a logického myslenia. Zručnosti a skúsenosti získané pri riešení tohto seminára, prípadne pri účasti na záverečnom sústreďení, sú veľmi cennou devízou aj pri riešení Matematickej olympiády (MO).

Mladším a začínajúcim študentom sú určené nižšie levely, pre starších a skúsenejších máme aj levely vyššie. Každý môže, samozrejme, v rámci svojich možností, riešiť viacero levelov. Podrobnejšie informácie o jednotlivých leveloch nájdete v pravidlách. Pre tých, ktorí majú vyššie ambície a chcú by uspieť na celoštátnom kole MO kategórie A, je určený seminár iKS (Medzinárodný korešpondenčný seminár), ktorý organizujú vedúci KMS v spolupráci s českými kolegami z Matematického korešpondenčného seminára. Tento seminár má veľmi špecifický cieľ, ktorým je príprava študentov na CK MO-A a aj na Medzinárodnú matematickú olympiádu. Bližšie informácie o ňom nájdete na stránke www.iksko.org.

Ak máte akékoľvek otázky alebo pripomienky, smelo nás kontaktujte e-mailom na adrese kms@kms.sk.

Veľa úspechov a radosti z riešenia vám želajú

vaši organizátori

Pravidlá

Všeobecné informácie o korešpondenčnom matematickom seminári

Súťaž sa skladá z dvoch nezávislých častí – zimnej a letnej. Každá z nich prebieha v rámci školského polroka. Na konci každej časti budú najúspešnejší riešitelia pozvaní na záverečné sústreďenie. Každá časť pozostáva z troch kôl úloh. Zadania jednotlivých kôl nájdete na stránke <https://kms.sk/ulohy/> vždy aspoň tri týždne pred termínom odovzdania daného kola. Úlohy 1 až 8 budú obodované počtom bodov od 0 po 7, úloha 9 počtom bodov od 0 po 8 a úloha 10 počtom bodov od 0 po 10. Body sa udeľujú aj za čiastkové či neúplné riešenia. Za každé kolo sa riešiteľovi do poradia započíta 5 úloh s najväčším bodovým ziskom.

Levely

Každý riešiteľ KMS má priradený level - číslo z rozmedzia 1 až 5. Tento level ovplyvňuje to, ktoré úlohy sa riešiteľovi započítavajú do výsledného poradia. Presnejšie, riešiteľovi sa do výsledného poradia započítava 5 najlepšie vyriešených úloh jeho levelu. Najnižšia úloha, ktorá sa počíta do výsledkovej listiny levelu L , je úloha s číslom L . Do výsledkových listín prvých troch levelov sa započítavajú úlohy až po číslo 8, do výsledkových listín zvyšných dvoch levelov sa započítavajú aj úlohy 9 a 10. Okrem výsledkovej listiny svojho levelu budeš aj vo výsledkových listinách všetkých vyšších levelov, z ktorých si vyriešil aspoň jednu úlohu.

Každý žiak, ktorý začne riešiť KMS, začína na leveli 1. Riešiteľom, ktorí už KMS riešili pred zmenou pravidiel, sa koeficient, ktorý by im prislúchal tento semester, na level prepočíta podľa nasledovnej tabuľky:

Koeficient	0	1	2	3 až 4	5 a viac
Level	1	2	3	4	5

Level riešiteľa sa nikdy neznižuje, v priebehu jednej časti sa level nemení, a **na začiatku každej časti sa môže zvýšiť** dvoma spôsobmi:

- Ak sa riešiteľ počas predošlej časti **zúčastnil sústredenia**, na ktoré bol pozvaný ako riešiteľ s levelom L , zvýši sa mu level na $L + 1$.
- Ak riešiteľ v predošlej časti **získal** vo výsledkovej listine levelu L **aspoň 80% maximálneho počtu bodov** (t. j. 84 bodov pre levely 1 až 3 a 93 bodov pre level 4), stúpne mu level na $L + 1$.

Výnimkou je level 5, z ktorého sa už vyššie postúpiť nedá.

Príklady výpočtu levelov

Pre lepšie pochopenie fungovania levelov uvádzame nasledovné dva príklady.

Gabriela je šikovná prváčka. Keďže KMS predtým neriešila, začala s levelom 1 a hneď v zimnej časti sa jej podarilo v leveli 1 získať viac ako 84 bodov. Keď teda začala letná časť, Gabriela mala už level 2. Gabriela išla dokonca aj na zimné sústredenie. Na sústredenie bola ale pozvaná z časti, v ktorej mala ešte len level 1, a preto sa jej level už viac nezvýšil.

V letnej časti sa jej darilo trochu menej. Získala viac ako 36 bodov – teda dosť na to, aby mohla byť pozvaná na sústredenie (viac nižšie), no na 84 to už nedotiahla. Zúčastnila sa tiež letného sústredenia (na ktoré bola pozvaná z letnej časti, ktorú riešila s levelom 2). To znamená, že jej level sa zvýšil na 3, a teda zimnú časť mohla riešiť úlohy číslo 3 až 8.

Riško začal riešiť zimnú časť KMS ako tretiak s levelom 1. Získal síce aspoň 36 bodov, no tiež to na 84 nestačilo. Následne bol pozvaný na zimné sústredenie, no nemohol sa ho zúčastniť.

Pred nasledujúcou letnou časťou sa mu preto level nezvýšil, a teda počas letnej časti bol Riško stále na leveli 1. V tejto časti sa mu darilo viac, vyhral level 1 (s 90 bodmi), bol na treťom mieste levelu 2 (s 86 bodmi) a v leveli 3 skončil na 15. mieste (so 75 bodmi). V lete sa mu opäť nepodarilo zúčastniť sústredenia. Keď sa ako štvrták pustil do zimnej časti, s prekvapením zistil, že je na leveli 3. Level mu stúpol vďaka tomu, že v predchádzajúcej časti získal aspoň 84 bodov v leveli 2.

Pozývanie na sústredenia

Po každej časti, zimnej aj letnej, sa uskutoční aspoň jedno sústredenie pre najúspešnejších riešiteľov všetkých levelov. Z každého z levelov bude aspoň 10 najlepších riešiteľov pozvaných na niektoré z nich, následne budú riešitelia pozývaní proporčne podľa počtu riešiteľov v jednotlivých leveloch. V rámci jednej časti je možné zúčastniť sa najviac jedného sústredenia. V prípade, že sa v niektorej z častí uskutoční viacero sústredení, vyhradzuje si právo s prihliadnutím hlavne na ročník úspešného riešiteľa pozvať ho na sústredenie iných levelov.

Na sústredenie môže byť pozvaný len riešiteľ, ktorý vo výsledkovej listine niektorého z levelov získal aspoň 36 bodov – čiže aspoň 34% plného počtu bodov v najnižšom z levelov. Vyhradzuje si právo v prípade opodstatnených okolností od tejto podmienky upustiť pri prvoriešiteľoch.

Pokyny pre riešiteľov

- Úlohy rieš **samostatne**.
- Riešenie každej úlohy riadne zdôvodni. V prípade, že v časti či celom riešení používaš odbornú literatúru, uveď jej názov, autora, vydavateľstvo, rok vydania a stranu, prípadne odkaz na internetovú stránku, ak si čerpal z internetu. Samozrejme, aj v tomto prípade zašli kompletné riešenie. Riešenie musí byť explicitné (pochopteľné samo o sebe bez ďalších zdrojov) a musí byť skontrolovateľné (v rozumnom čase) ručne opravovateľom (napríklad riešenia využívajúce výpočtovú techniku obvykle ručne skontrolovateľné nie sú).
- Odporúčame Ti pozrieť stránku Ako riešiť úlohy v KMS na adrese www.kms.sk/ako_riesit/, kde nájdeš niekoľko užitočných rád.
- Riešenia posielaj **elektronicky** do termínu odoslania kola. Riešenia odoslané po termíne odoslania spôsobujú značné organizačné problémy, vyhradzuje si preto právo udeliť za ne nula bodov.
- Riešenie každej úlohy píš na samostatný papier formátu A4. Ku každej úlohe uveď svoje meno, triedu, školu a adresu! Vítané sú okrem riešení v slovenčine aj riešenia v angličtine, češtine a riešenia písané v $\text{\TeX}$. Z organizačných dôvodov nebudú opravované riešenia písané v iných jazykoch.
- Na našej stránke www.kms.sk/template si môžeš stiahnuť a vytlačiť predlohy pre riešenia.
- Riešenia píš čitateľne. Ak nebudeme schopní prečítať časť tvojho riešenia, vyhradzuje si právo neudelit ti za tú časť body. Môžeš zvážiť písanie riešenia na počítači.
- Nedodržanie týchto pravidiel bude viesť k postihu.
- Opravené, obodované a okomentované riešenia nájdeš po prihlásení pod zadaním úlohy na našej stránke.
- Po termíne kola môžeš na našej stránke nájsť návody, príp. aj videonávody, ktoré ti pomôžu (nesúťažne) doriešiť úlohy, s ktorými si mal/-a problém. Následne tam zverejníme aj vzorové riešenia.
- Pokiaľ máš dojem, že tvoje riešenie bolo nesprávne obodované, pošli čo najskôr sťažnosť na e-mailovú adresu kms@kms.sk.
- Ak ti nie je v zadaniach čokoľvek jasné alebo máš akékoľvek pochybnosti, netreba sa báť spýtať sa nás. Ideálny spôsob je zaslanie e-mailu na kms@kms.sk.

Elektronické posielanie riešení

Odovzdávanie riešení prebieha v elektronickej podobe na našej stránke. Pre elektronické posielanie riešení platia nasledovné pravidlá:

- Pred prvým odovzdávaním je potrebné na našej stránke vyplniť všetky potrebné údaje (pozri si návod na <https://kms.sk/eriesenia>).

- Termín na odovzdanie je vždy v deň termínu odoslania kola o **23:59**. Po tomto čase už elektronické posielanie nie je možné.
- Akceptované sú **iba riešenia vo formáte PDF** písané na počítači, prípadne naskenované, **pre každú úlohu jeden súbor**. Pri ich tvorbe odporúčame použiť $\text{\TeX}$ alebo export do formátu PDF z iných aplikácií. Môžeš pritom využiť predlohy, ktoré nájdeš na našej stránke www.kms.sk/template. Ak posielaš oskenované riešenie, daj si pozor, či nie je príliš tmavé a či je čitateľné.
- Nezabudni v hlavičke riešenia uviesť svoje meno, triedu, školu a adresu!

Prijatie na FMFI UK bez prijímačiek

Ak účastník získa v niektorej časti (zimnej, letnej) a ľubovoľnej kategórii KMS aspoň 65% celkového počtu bodov, a hlási sa na študijný program, ktorého profilovým predmetom je matematika, bude prijatý.

Ba čo viac, ak dosiahne excelentné výsledky a dostane za to Dekanský list, v prípade, že príde študovať na FMFI UK, čaká naňho motivačné štipendium vo výške približne 300 eur.

Zadania 1. kola letnej časti

Termín odoslania 23. február 2026 (pre zahraničie)

V prípade otázok k zadaniam nás neváhajte kontaktovať na kms@kms.sk.

1.1 Kocka Mojich Spolupovstalcov

level L1, max. 7 bodov

„Mamo, tato, ja už nechcem byť nevoľník!“ povedal Jurko odhodlane svojim rodičom. „OK,“ odpovedal jeho otec a odviezol ho do tábora povstaleckých vojsk Františka Rákociho, keďže vojenská služba bol jediný spôsob ako sa oslobodiť.

Jurkovi sa výcvik páčil, keďže počas neho mohol s ostatnými povstalcami hrať kocky. Presnejšie kocku, lebo mali len jednu. Na jej stenách je napísaných 6 *po sebe idúcich* prirodzených čísel. Na obrázku vidíme 3 z nich. Vieme, že súčty čísel na protiahlych stranách sú rovnaké. Čomu sa môže rovnať súčet všetkých čísel?



1.2 Koniec Masívneho Sprisahania

levely L1 až L2, max. 7 bodov

Jurkovi sa do bojov v skutočnosti vôbec nechcelo a pri pohľade na krv sa mu robilo mdlo. Takže, keď počas bitky pri Trenčíne povstalci využili svoju prevahu troch ku jednému na panický útek, s radosťou sa k svojim druhom pridali.

František sa po tomto neúspechu musel porátať s dezertérmi. Rátajte aj vy! Nájdite všetky trojice reálnych čísel (x, y, z) , spĺňajúcich nasledovné rovnice:

$$x + 2y = 4,$$

$$2xy - 3z^2 = 4.$$

1.3 Kadejakého Mafiána Strážim

levely L1 až L3, max. 7 bodov

Jurko sa bál odplaty Františka Rákociho, a tak sa po návrate domov nechal naverbovať do druhej armády, tentoraz cisárskej, ktorá ich pri Trenčíne tak ľahko rozohnala. Tí mu v boji až tak nedôverovali, a tak ho nechali strážiť väzňov na Bytčianskom zámku. S nimi Jurko vždy vychádzal zadobre a skamarátil sa aj s istým zbojníkom Uhorčíkom.

Na zemi je kriedou napísané číslo 2026. Jurko a Uhorčík sa hrajú hru. Postupne sa striedajú v ťahoch, pričom začína Jurko. Hráč, ktorý je na ťahu, vyberie taký kladný deliteľ d čísla N aktuálne zapísaného na zemi, aby bolo číslo $N - (2d - 1)$ kladné. Pôvodné číslo N následne zmaže a nahradí číslom $N - (2d - 1)$. Prehráva hráč, ktorý na zem napíše číslo 1. Kto vie zaručene vyhrať?

1.4 Kamarát Mi Sfúkol

levely L1 až L4, max. 7 bodov

Jurkovi sa jeho nového kamaráta zavše ulútostilo, a tak mu poradil ako z hradu utiecť. Pred nadriadenými sa následne pochtivo ponúkol, že pôjde väžňa naháňať do okolitých lesov. Odvtedy ho už viac nevideli.

V trojuholníku LES zvolíme bod X na strane LS tak, aby $|SX| = 2|XL|$. Podobne zvolíme bod Y na strane LE tak, aby $|EY| = 2|YL|$. Bod Z zvolíme tak, aby $LYZX$ bol rovnobežník a LZ tvorilo uhlopriečku tohto rovnobežníka.

- V akom pomere delí priamka EX úsečku LZ ?
- V akom pomere delí priamka SY úsečku LZ ?
- Dokážte, že priamky LZ , EX a SY sa pretínajú v jednom bode.

1.5 Kradnutie – Môj Svet

levely L1 až L5, max. 7 bodov

V lese Jurko ľahko našiel svojho kamaráta a ochotne sa stal členom jeho zbojníckej družiny. Spolu ozbíjali mnoho zámožných kupcov a šľachticov. Jedného dňa si Uhorčík uvedomil, že už má dosť našetrené vo svojom dôchodkovom sporení, a tak sa rozhodol, že ukončí svoju aktívnu kariéru. Zbojníci si tak museli spomedzi seba vybrať nového kapitána.

Kapitánom musí byť niekto, kto dokáže v každom ročnom období nájsť vhodný lup. Zbojníci si teda spomedzi seba zvolia toho, kto nájde všetky celé čísla m, n také, že $\frac{2m-1}{n}$ aj $\frac{2n-1}{m}$ sú celé čísla. Nájdite ich aj vy!

1.6 Kapitán Mocný Silný

levely L1 až L5, max. 7 bodov

Keďže sa Jurko ukázal ako najlepší pátrač, zverili práve jemu kapitánstvo aj s kapitánskou valaškou. Tá bola vskutku veľká a nepraktická, tak nečudo, že sa o ňu pri ceste lesom potkol a spadol tvárou priamo do trnia. V ňom videl úžasný zázrak – pôvabnú žiariacu dievčinu, ktorá mu ponúkla akýkoľvek dar, ktorý si zažela. Jurko vedel, ako si zbojníci ctia um a prefikanosť, a tak bez váhania odpovedal: „Silu!“

Presvedčte sa, že Jurkova sila nie je menšia ako doteraz. Nech a, b, c sú kladné reálne čísla také, že $ab + bc + ca = 1$. Dokážte, že platí

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \sqrt{3} + \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a}.$$

1.7 Koľko Máme Striebra?

levely L1 až L5, max. 7 bodov

Keď Jurkovi druhovia našli svojho kapitána podriemkávať v kríčku, náramne sa potešili. Potrebovali si totiž rozdeliť lup, no nevedeli, ako to spraviť spravodlivo. Jurka teda zobudili a on prišiel s ideálnym plánom.

Lup si rozložili do trávy do tvaru rovnostranného trojuholníka. Majú ho rozdeliť na $n \geq 2$ menších navzájom zhodných trojuholníkov (t. j. majú zhodné uhly, dĺžky strán a obsah) tak, aby tieto trojuholníky neboli rovnostranné. Určte najmenšie n , pre ktoré sa to nedá.

1.8 Kňaz Márne Súperí

levely L1 až L5, max. 7 bodov

O kňazoch sa hovorí, že žijú *bohatý* duchovný život. Preto sa Jurko so svojou družinou rozhodli, že jedného olúpia. Ten sa však nechcel nechať olúpiť a bránil sa silou mocou. Keďže Jurko nerád ľuďom ubližoval, rozhodol sa, že ho priviažu k neďalekému betónovému pražcu, kým budú v jeho kapse hľadať nejaké vzácnosti.

Nech $\sigma(n)$ označuje súčet deliteľov čísla n (vrátane n) a $d(n)$ označuje počet deliteľov čísla n . Nájdite všetky vzácnosti, teda kladné celé čísla n spĺňajúce $\sigma(d(n)) = n$.

1.9 Klofli Ma Strukovinami

levely L4 až L5, max. 8 bodov

Jurkovo vyčíňanie už dlhšie ležalo v žalúdku mocnej ruke zákona, ktorá ho nie a nie uchopiť. Keď sa však k žandárom dostala historka o potknutí sa na valaške, zosnovali plán. Doviezli všetok hrach z Uhorska a rozsypali ho po celej Terchovej, dúfajúc, že sa zbojník na aspoň jednom zrnku potkne. A tak sa nakoniec aj stalo...

Trojica žandárov rozostavená v rohoch trojuholníka ABC úplne obklúčila Jurka J , ktorý ležal niekde vo vnútri tohto trojuholníka. Priamky AJ a BC , BJ a AC , CJ a AB sa pretínajú postupne v bodoch A' , B' , C' . Ak ABC má obsah 1, aký najväčší obsah môže mať trojuholník $A'B'C'$?

1.10 Krutý Mestský Súd

levely L4 až L5, max. 10 bodov

Keď žandári Jurka chytili, priviedli ho pred súd. Tam ho obvinili z výtržníctva, pašeráctva, zbojníčenia, vedenia zločineckej skupiny a navyše z pokusu o vraždu, kde obžaloba tvrdila, že zbojnícka družina pod Jurkovým vedením hodila kňaza do hlbkej studne.

Jurkove výpovede boli umiestnené do tabuľky $n \times n$. V každom políčku bola práve jedna výpoveď, pričom každá z nich je označená buď ako pravdivá, alebo ako nepravdivá. Nad mriežkou a naľavo od nej stoja Obhajca a Žalobca. Tí vykonávajú kontroly výpovede. Jedna kontrola začína tak, že Obhajca si vyberie ľubovoľný stĺpec a Žalobca ľubovoľný riadok tabuľky. Následne nimi súbežne políčko po políčku prejdú, Obhajca zhora dole a Žalobca zľava doprava. Keď obidvaja naraz skontrolujú celý riadok, resp. stĺpec, kontrola končí. Vieme, že bez ohľadu na to, aký riadok a stĺpec by si na začiatku kontroly vybrali, naraz by na políčkach označených ako nepravdivé stáli v práve jednom momente. Pre aké n existuje také vyplnenie tabuľky?