



Riešenia 2. kola letnej časti

2.1 Konáre Mocné Seká

Zadanie.

Drevorubač Papek je veľmi váženým a rešpektovaným občanom. Zabezpečuje totiž pre kmeň prísun všemožných konárov, palíc, drúkov a kmeňov – teda tých najpokročilejších materiálov. Sekanie papekov ale nie je tak jednoduché, ako by sa mohlo zdať. Každý papek je inak hrubý, takže aj papek, ktorým ho vieme rozdeliť, musí mať správnu hrúbku. S príliš malými papekmi je zase práca namáhavá a úporná, občas do papeku tlie aj celý deň. Teraz čelí ťažkému problému:

Papek má 9 rôznych papekov s hrúbkami postupne 1, 2, ..., 9 palcov. Potrebuje ich rozdeliť na dve kopy, v jednej bude 5 papekov, v druhej budú 4. V oboch kopách následne spočíta súčin hrúbok papekov (v každej kope zvlášť). Kolkými spôsobmi vie papeky rozdeliť tak, aby bol jeden zo súčinov násobkom zvyšného?

Riešenie.

opravuje **Maryna** (maryna.horodenchuk@trojsten.sk)

Snažíme sa z cifier 1, ..., 9 zostaviť 2 čísla tak, že jedno delí druhé. Keďže nemáme párný počet každého prvočísla v prvočíselných rozkladoch, tak tieto 2 čísla nebudú rovnaké a teda jedno bude väčšie. Najprv si uvedomme, že čísla 5 a 7 nutne budú v tom väčšom čísle, inak by ho to menšie nedelilo.

Ďalej si všimnime, že máme v prvočíselných rozkladoch ešte k dispozícii 4-krát cifru 3 a 7-krát cifru 2. V tom väčšom čísle bude aspoň 2-krát cifra 3 a aspoň 4-krát cifra 2. Ak by kopa papekov zodpovedajúca väčšiemu číslu mala veľkosť 4 papeky, tak žiaľ už nejde doplniť. Skutočne, ostávali by 2 papeky, spomeňme si, že prvé dva majú dĺžky 5 a 7 palcov. Aby sme mali vo väčšom čísle 4 dvojky tak v ňom musí byť osmička a ešte dáke párne číslo. To nám dá maximálne jednu cifru 3, ktorá sa schová do čísla 6. To nestačí.

Väčšiemu číslu prislúcha teda kopa na ktorej je 5 papekov. Rýchlo si uvedomme, že číslo 1 musí byť na kope s 4 papekmi, inak sa dostávame do situácie ako v minulom odseku. Ďalej, ak by číslo 8, ktoré obsahuje 3 dvojky, bolo na kope s menším počtom papekov, tak už všetky ostatné párne čísla musia byť na tej väčšej kope, keďže na väčšej kope potrebujeme aspoň 4 dvojky. Problém je, že sa v prvočíselnom rozklade ostatných párných čísel nachádza iba jedna trojka, to nie je dosť. Aktuálne sme v stave

$$c \cdot 1 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 7 \cdot 5 \cdot 8 \cdot b_1 \cdot b_2,$$

kde c je vhodné prirodzené číslo. Pozrime sa na číslo 9. Ak je vľavo, tak vľavo sú už dve trojky. Všetky ostatné čísla ktoré majú v prvočíselnom rozklade trojku musia byť vpravo. To nás privádza k platnému riešeniu $1 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 4 \mid 7 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 6$.

Ostáva konfigurácia

$$c \cdot 1 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 7 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot b_1.$$

Vpravo máme iba 3 dvojky potrebujeme tam teda pridať ľubovoľné párne číslo, Tie ostávajú 3, pričom každé vedie k platnému riešeniu. Dokopy máme 4 spôsoby ako podľa zadania rozdeliť palice.

2.2 Každého Mamuta Strieskajú

Zadanie.

Náčelník Trieska pripravuje svoj kmeň na veľký lov na mamuty. Vymyslel na to novú stratégiu: každý člen kmeňa si zoberie palicu a trieska mamuta, až kým ho neuloží. Predčeserom vyslal štyroch prieskumníkov, aby zistili, koľko mamutov sa po okolí potuluje – prieskumníci sa ale rozdelili a je možné, že niektorých mamutov videli viacerí.

Množinu mamutov, ktorých videl prvý prieskumník, označme M_1 a ich počet bol m_1 . Podobne videl druhý prieskumník množinu mamutov M_2 s počtom mamutov m_2 , tretí prieskumník videl M_3 s počtom m_3 a štvrtý videl M_4 s počtom m_4 . Zároveň vieme, že prvý a tretí prieskumník nevideli žiadneho rovnakého mamuta. Rovnako ani druhý a štvrtý prieskumník nevideli žiadneho rovnakého mamuta. To vieme napísať aj symbolicky nasledovne

$$M_1 \cap M_3 = M_2 \cap M_4 = \emptyset.$$

Počet všetkých mamutov, ktoré boli videné, si označme s . Alternatívne $s = |M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4|$. Dokážte, že potom platí

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 \leq 2s.$$

V akých prípadoch môže nastať rovnosť?

Riešenie. opravujú **Noro** (norbert.bielik@trojsten.sk) a **Kubko** (jakub.poljovka@trojsten.sk)

Úlohu vyriešime tak, že spočítame, koľko zhliadnutí nejakého mamuta nejakým prieskumníkom nastalo, resp. mohlo nastať. Presnejšie, spočítame počet dvojíc (pieskumník, mamut) takých, že daný prieskumník videl daného mamuta. Uvidíme, že presne tento počet vyjadruje ľavá strana nerovnosti v zadaní. Urobíme to dvomi spôsobmi – z toho pochádza aj názov metódy – počítanie dvoma spôsobmi.

Najprv spočítame počet zhliadnutí tak, že vezmeme počty zhliadnutí jednotlivými prieskumníkmi. Prvý ich videl m_1 , druhý m_2 atď. Dostaneme teda počet zhliadnutí $z = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$.

Teraz sa na to pozrime cez mamuty. Vezmime si konkrétneho mamuta, ktorý bol videný. Koľko prieskumníkov ho mohlo vidieť? Spomedzi prieskumníkov 1 a 3 ho mohol vidieť najviac jeden (buď jeden, alebo žiadny). Nemohli ho vidieť obidvaja, pretože vieme, že prvý a tretí prieskumník nevideli žiadneho rovnakého mamuta. Podobne spomedzi prieskumníkov 2 a 4 ho mohol vidieť najviac jeden. Dokopy teda tohto mamuta mohli vidieť najviac dvaja prieskumníci (najviac jeden spomedzi 1 a 3, najviac jeden spomedzi 2 a 4).

Každého spomedzi s mamutov teda videli najviac dvaja prieskumníci, čiže počet zhliadnutí je dokopy najviac $2s$, t. j. $z \leq 2s$.

Už nám stačí iba porovnať získané poznatky o počte zhliadnutí mamutov prieskumníkmi:

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = z \leq 2s$$

a sme hotoví.

2.3 Krajinu Moju Spaľuje

Zadanie.

Briketa nemá dobrý týždeň. Už trikrát sa pokúsila nadizajnovať ohnisko, na ktorom by mohla opieť mamutie mäso pre celý kmeň, ale palice po jeho okraji jej vždy po chvíli začali horieť. Od nich sa samozrejme chytil celý les, a tak sa opäť museli (relatívne narýchlo) presťahovať. Keby len existoval nejaký iný materiál... Nuž, zbytočne snívať, radšej sa pustí do ďalšieho prototypu.

Nový dizajn ohniska pozostáva z kružnice so stredom S , na ktorej leží bod X . Tetiva AB tejto kružnice pretína polomer SX v bode $Y \neq S$. Dokážte, že $|AB| > 2|XY|$.

Riešenie.

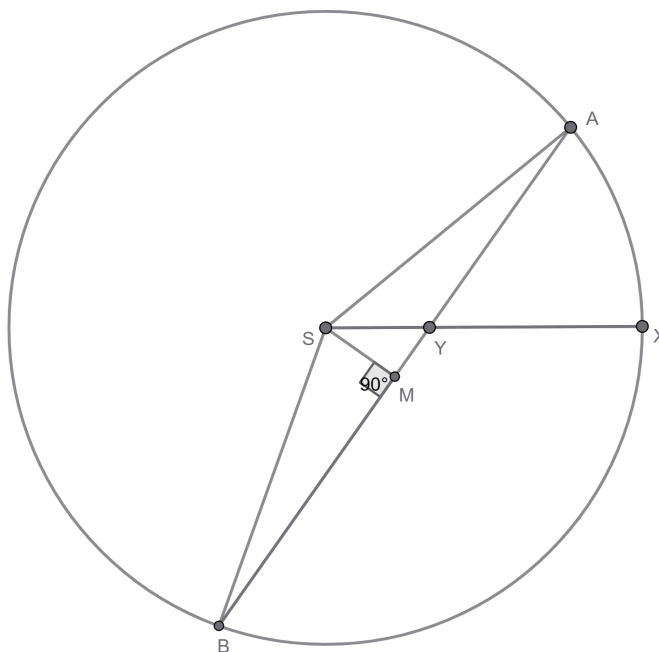
opravuje **Matka** (martina.ganova@trojsten.sk)

Táto úloha sa dala riešiť mnohými rôznymi spôsobmi od využitia stredových a obvodových uhlov cez trojuholníkovú nerovnosť až po využitie toho, že polomer je najkratšia vzdialenosť medzi stredom a bodom na obvode kruhu. V záujme udržania tohto vzoráku čitateľnej dĺžky, som vybrala dva z nich.

V prvom riešení skúsime dokázať nerovnosť pre najkratšiu možnú tetivu AB , čím nerovnosť musí platiť aj pre všetky dlhšie tetivy. Najskôr musíme zistiť, kedy je tetiva AB najkratšia za podmienky, že prechádza nejakým vybraným bodom Y . Stred tetivy AB si označíme M a dokreslíme si os tetivy, ktorá musí prechádzať stredom kružnice. Tým pádom úsečka MS je kolmá na AB .

Keďže M je stred AB , tak $|AB| = 2|MA|$. Preto ak bude MA mať najkratšiu možnú dĺžku, takisto AB bude mať najkratšiu možnú dĺžku. Dĺžka MA sa dá vypočítať pomocou Pytagorovej vety z trojuholníka MAS ako $|MA| = \sqrt{|AS|^2 - |SM|^2}$. Keďže AS je polomer, a teda nevie zmeniť dĺžku, MA bude najkratšie, keď SM bude najdlhšie.

Teraz ukážeme, že $|YS| \geq |SM|$. Z pravouhlého trojuholníku MYS , vidíme, že $|YS| > |SM|$. Tento trojuholník má ako preponu úsečku YS a ako odvesnu SM a prepona pravouhlého trojuholníka je vždy jeho najdlhšou stranou. Ešte môže nastať prípad, že MS bude ležať na XS a trojuholník MYS tým pádom nebude existovať. V takom prípade $M = Y$, a teda aj $|YS| = |SM|$. SM je teda najdlhšia práve vtedy, keď $|YS| = |SM|$. Tetiva AB je preto najkratšia, práve keď XS je kolmé na AB .



Teraz sa pokúsime vyjadriť dĺžku AB a XY , aby sme ich mohli porovnať. Z pravouhlého trojuholníka YSB vieme pomocou Pytagorovej vety vyjadriť dĺžku BY . Polomer kružnice si označíme r , t.j. $|SB| = r$. Dĺžku úsečky YS si môžeme označiť d a dĺžku $|BY|$ si označíme x . Z Pytagorovej vety vieme x vyjadriť ako $x = \sqrt{r^2 - d^2}$. Úsečka AB má dĺžku $2x$, t.j. $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2}$. Teraz skúsime vypočítať dĺžku $2|XY|$, aby sme ich mohli porovnať. Vieme, že $|XY| = r - d$, a teda $2|XY| = 2(r - d)$. Teraz môžeme skúsiť dokázať nerovnosť zo zadania (v druhom riadku sú obe strany kladné, keďže ide o dĺžky strán, takže môžeme umocniť na druhú):

$$2\sqrt{r^2 - d^2} > 2(r - d)$$

$$\sqrt{r^2 - d^2} > (r - d)$$

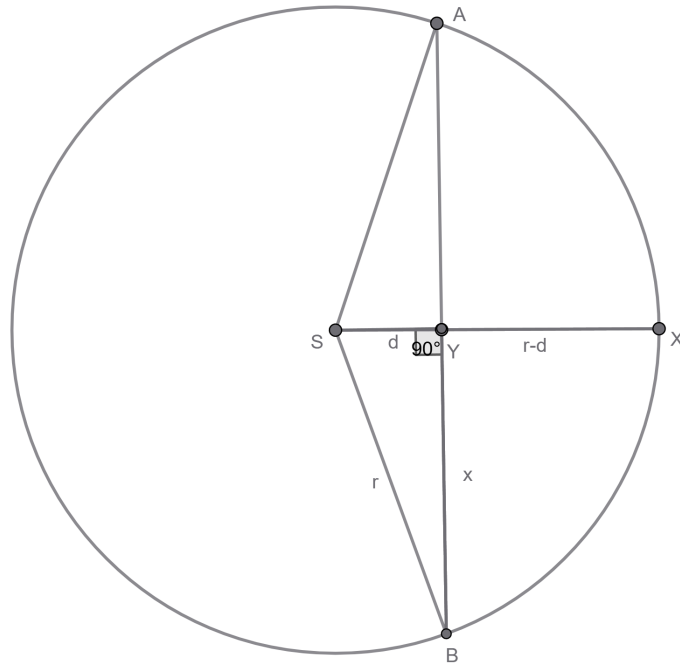
$$r^2 - d^2 > (r - d)^2$$

$$r^2 - d^2 > r^2 - 2rd + d^2$$

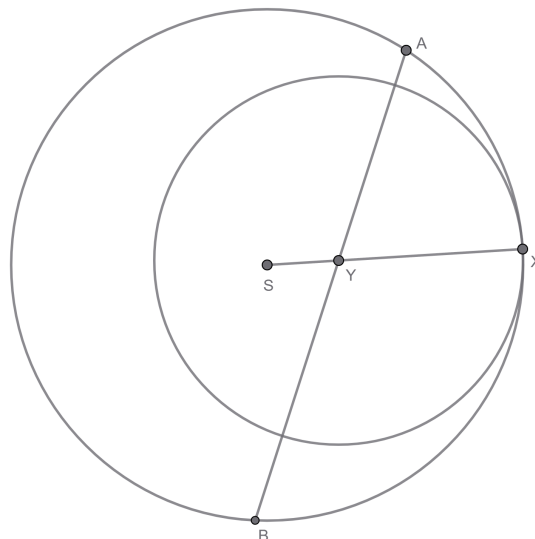
$$0 > 2d^2 - 2rd$$

$$0 < d(r - d)$$

Teraz sa pozrieme na to, či posledná nerovnosť naozaj platí. Ak by $d = 0$, tak $Y = S$, čo je ale v spore so zadáním. A keďže d je dĺžka, nemôže byť záporná, a tak musí platiť $0 < d$. Zároveň keďže bod Y leží na polomere a $X \neq Y$, tak $r > d$, z čoho vyplýva, že $r - d > 0$. Pravá strana poslednej nerovnosti má teda kladnú hodnotu a my sme dokázali tvrdenie zo zadania.



Iné možné riešenie bolo dokresliť si kružnicu l so stredom v bode Y a polomerom $|XY|$. Keďže dĺžka $|XY|$ je kratšia než polomer pôvodnej kružnice, kružnica l sa dotýka pôvodnej kružnice len v bode X . Ďalej si môžeme všimnúť, že úsečka AB prechádza bodom Y , a teda leží na priemere kružnice l . Kružnica l má priemer $2|XY|$, a preto aj dĺžka úsečky AB musí byť aspoň $2|XY|$. Keďže kružnica l sa dotýka pôvodnej kružnice len v bode X , tak úsečka AB by mohla mať dĺžku presne $2|XY|$, len ak by A ležalo v bode X , ale to by znamenalo, že SX by bolo súčasťou AB , čiže by sa pretínali po celej dĺžke a bod Y by bol zhodný s S . Tým pádom musí mať úsečka AB väčšiu dĺžku než $2|XY|$ a tým sme dokázali tvrdenie zo zadania.



2.4 Kúzelný Materiál Skúmam

Zadanie.

Parketa uteká po ďalšom matkinom nevydarenom experimente lesom. V lese všetko horí – stromy, kríky, mamuty, Parketa, aj ostatní utekajúci členovia kmeňa (nebojte sa, už si na to zvykli). Zrazu zakopne o zvláštny predmet... ktorý nehorí! Od zvedavosti ho dvíha a uteká s ním ďalej.

V bezpečí sa potom rozhodne venovať tejto záhade všetok svoj vedecký um. Predmet má rozmery a, b, c , čo sú kladné reálne čísla, ktoré spĺňajú rovnosť

$$a + b + c = abc.$$

Parkete to so záhadou ohňovzdornosti síce nepomáha, no zisťuje, že aspoň jedno z čísel a, b, c musí byť väčšie ako $\frac{17}{10}$. Dokážte, že v tomto má pravdu.

Riešenie.

opravuje Michal Ilkovič (michal.ilkovic@trojsten.sk)

Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $a \geq b \geq c$ (môžeme čísla ľubovoľne preznačiť, aby to platilo). Potom vieme odhadnúť ich súčin $abc = a + b + c \geq c + c + c = 3c$. Teraz môžeme vydeliť kladným c . Z toho dostaneme, že $ab \geq 3$. Keďže $a \geq b$, tak potom $a^2 \geq ab \geq 3$. Keďže a je kladné, môžeme odmocniť a dostaneme, že $a \geq \sqrt{3}$.

Teraz už iba stačí ukázať $\sqrt{3} \geq \frac{17}{10}$. Môžeme umocniť a vynásobiť menovateľom a dostaneme $3 \cdot 10^2 = 300 \geq 289 = 17^2$, čo zrejme platí. Tým sme dokázali, že a , čo je najväčšie spomedzi troch čísel zo zadania, bude stále väčšie ako $\frac{17}{10}$, čo bolo treba dokázať.

Alternatívne riešenie. Keďže veľa z vás túto úlohu riešilo AG nerovnosťou¹, tak si ukážeme aj alternatívne riešenie. Pre kladné reálne a, b, c platí z AG nerovnosti:

$$\frac{abc}{3} = \frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}. \quad (4.1)$$

Algebraickými úpravami dostaneme:

$$(abc)^{\frac{2}{3}} \geq 3. \quad (4.2)$$

Teraz predpokladajme spor $a, b, c \leq \frac{17}{10}$. Potom vieme odhadnúť abc :

$$3 = \frac{300}{100} > \frac{289}{100} = \left(\frac{17}{10}\right)^2 = \left(\left(\frac{17}{10}\right)^3\right)^{\frac{2}{3}} \geq (abc)^{\frac{2}{3}} \geq 3. \quad (4.3)$$

Tým sme ukázali požadovaný spor, čím je dôkaz ukončený.

2.5 Kategórie Meriame Silou

Zadanie.

Novinka o špeciálnom ohňovzdornom materiáli sa medzi praludmi šíri rýchlosťou požiaru. Keďže tento materiál si udržuje stálu hmotnosť aj v extrémnych podmienkach, je možné ho používať na štandardizáciu všetkých aspektov modernej spoločnosti, vrátane presných fyzikálnych meraní. Princíp merania je jednoduchý: v jednej ruke držíme

¹AG nerovnosť, Natália Čigašová, Zimné sústredenie alfa 2026

predmet s neznámou hmotnosťou, v druhej nejaký počet kusov daného materiálu. Podľa počtu kusov potom predmet priradíme do hmotnostnej kategórie. Materiál teda pomenujú Kategorizačný Nemeň, skrátene Kameň.

Lenže čo ak sú dva moje Kamene rovnako ťažké ako jeden cudzí?

Máme 13 predmetov s celočíselnými kladnými hmotnosťami. Po odobratí ľubovoľného z nich vieme zvyšné rozdeliť na dve skupiny po šesť predmetov, pričom obe skupiny majú rovnakú celkovú hmotnosť. Dokážte, že potom všetky predmety musia mať rovnakú hmotnosť.

Riešenie. opravujú **Nata** (natalia.cigasova@trojsten.sk) a **Oski** (oskar.hritz@trojsten.sk)

Predmety očísľujeme 1 až 13 a ich hmotnosti si označíme m_1 až m_{13} , kde m_1 je hmotnosť predmetu 1 a tak ďalej. Súčet hmotností predmetov si označíme M . Pred riešením samotnej úlohy si dokážeme dve pomocné tvrdenia.

Najprv si dokážeme, že pre akúkoľvek trinásticu predmetov, ktorá spĺňa zadanie, musia mať všetky m -ká rovnakú paritu. Zo zadania vieme, že pre akékoľvek $1 \leq i \leq 13$ je možné rozdeliť všetky predmety okrem predmetu i do dvoch rovnako ťažkých skupín (celkovú hmotnosť jednej z týchto skupín pre nejaké i si označíme S_i):

$$M - m_i = 2 \cdot S_i. \quad (5.1)$$

Hodnota $M - m_i$ je teda párne číslo, čo znamená že m_i má rovnakú paritu ako M , a preto majú všetky m -ká rovnakú paritu.

Ďalej si dokážeme, že ak máme nejakú trinásticu predmetov splňujúcu zadanie, tak vieme dostať ďalšiu trinásticu n_1, \dots, n_{13} splňujúcu zadanie nasledujúcimi operáciami:

- pričítanie alebo odčítanie prirodzeného čísla k od hmotnosti každého predmetu, predpokladajúc že výsledné $n_1 > 0$ a
- predelenie hmotností prirodzeným číslom k , predpokladajúc že všetky hmotnosti sú deliteľné k .

Aby výsledná trinástica n_1, \dots, n_{13} so súčtom hmotností N splňovala zadanie, musia byť všetky jej hmotnosti kladné (čo obe operácie splňujú) a musia spĺňať podmienku rozdelenia na dve skupiny šiestich predmetov, teda pre každé $1 \leq i \leq 13$:

$$N - n_i = 2 \cdot T_i. \quad (5.2)$$

Pre operáciu pričítania dostávame $N = M + 13k$, $n_i = m_i + k$, $T_i = S_i + 6k$ a dosadením do (5.2):

$$M + 13k - (m_i + k) = 2 \cdot (S_i + 6k) \iff M - m_i = 2 \cdot S_i.$$

To nutne platí z (5.1). Odčítanie dokážeme analogicky ku pričítaniu. Pre predelenie dostávame $N = \frac{M}{k}$, $n_i = \frac{m_i}{k}$, $T_i = \frac{S_i}{k}$ a dosadením do (5.2):

$$\frac{M}{k} - \frac{m_i}{k} = 2 \cdot \frac{S_i}{k} \iff M - m_i = 2 \cdot S_i.$$

Teraz pokračujeme samotným riešením úlohy. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že:

$$m_1 \leq m_2 \leq m_3 \leq \dots \leq m_{11} \leq m_{12} \leq m_{13}.$$

Dokážeme, že $m_1 = m_{13}$, z čoho nutne vyplýva, že všetky predmety musia mať rovnakú hmotnosť. Dokazujeme sporom: predpokladajme, že existuje aspoň jedna trinásťica predmetov splňujúca zadanie, pre ktorú platí $m_1 < m_{13}$. Ďalej zo všetkých takýchto trinásťic predmetov si vyberieme takú, ktorá bude mať najmenšiu možnú hodnotu m_{13} .

Táto trinásťica má nutne $m_1 = 1$, ináč by sme na ňu mohli aplikovať operáciu odčítania s hodnotou $k = m_1 - 1$ a dostali by sme menšie m_{13} . Vieme, že všetky m -ká majú rovnakú paritu, a spolu s $m_1 = 1$ dostávame, že všetky m -ká sú nepárne. Vytvoríme si novú trinásťicu $n_1 \leq \dots \leq n_{13}$ operáciou pričítania 1. Potom $n_1 = 2$ a všetky n -ká sú párne. Nakoniec si vytvoríme poslednú trinásťicu $l_1 \leq \dots \leq l_{13}$ operáciou predelením 2 na párne n -ká.

Dostávame:

$$l_{13} = \frac{n_{13}}{2} = \frac{m_{13} + 1}{2}. \quad (5.3)$$

Trinásťicu sme ale vybrali tak, že m_{13} má najmenšiu možnú hodnotu, teda určite platí:

$$l_{13} \geq m_{13}. \quad (5.4)$$

Dosadením (5.4) do (5.3) dostávame:

$$\frac{m_{13} + 1}{2} \geq m_{13}$$

$$m_{13} + 1 \geq 2m_{13}$$

Dostávame $1 \geq m_{13}$, a keďže to musí byť kladné celé číslo, tak nutne $m_{13} = 1$. Potom ale $m_1 = m_{13} = 1$, čo je spor.

2.6 Kvalita Matracu Strašná

Zadanie.

Každý moderný pračlovek, ktorý nechce byť desať rokov za opicami, si okamžite zadováži svoj Kameň... a keby len jeden, každý ich chce čo najviac. S Kamennou revolúciou prichádza aj zmena životného štýlu, praludia začínajú používať Kamenné nástroje a sťahovať sa do priestraných Kamenných jaskýň. Konár sa nedávno do jaskyne presťahoval a nevie si ju vynachváliť. Len keby ho pri spánku stále niečo netlačilo do chrbta...

Plocha jaskyne je tvorená tabuľkou 2025×2025 . V každom riadku spí na práve jednom políčku pračlovek (spí, a teda sa nehýbe). Do jaskyne však treba uložiť aj ich Kamene na práve k políčok, kde $2 \leq k \leq 2025^2 - 2$. Z fyzikálnych vlastností Kameňov vyplýva, že ak je na nejakom políčku Kameň, tak nejaký musí byť aj na políčku naľavo od neho (ak políčko naľavo existuje). Pre konkrétne usporiadanie praludí sa pozrieme na všetky rozmiestnenia k kameňov. Pre každé rozmiestnenie sa pozrieme na počet praludí, ktorí spia na políčku s kameňom. Nech a je najmenší taký počet spomedzi rozmiestnení a b je najväčší. Dokážte, že ak $a = b$, tak v danom usporiadaní praludí v jaskyni buď každý spí s Kameňom, alebo nikto nespí s Kameňom, nezávisle od rozmiestnenia Kameňov.

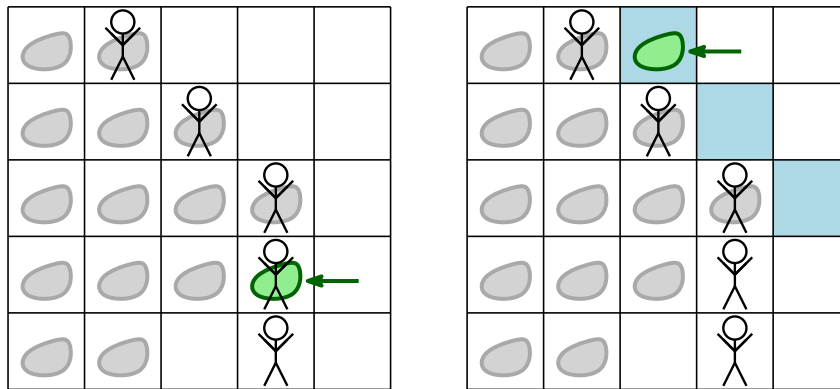
Riešenie.

opravuje **Petr Velyčko** (petr.velycko@trojsten.sk)

Označme p_i polohu pračloveka v i -tém rādke a n počet rādok (tedy $n = 2025$). Bez újmy na obecnosti môžeme predpokladať, že posloupnosť p_i je neklesajúca (tedy $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$).

Pro spor predpokládejme, že platí $a = b$ a máme aspoň jedného človeka, ktorý spí s kamenom a aspoň jedného, ktorý na svojom poličkách kámen nemá. Do tabuľky postupne budeme dávať len minimálny možný počet kamenů tak, aby som zvládli pokrýť čo najviac ľudí (tento počet je hodnota b), ale na $b+1$ by som se už s daným počtom nevystačili. Tuto konfiguráciu sestrojíme následovne: prvých b rādoků pokryjeme p_i kameny každý (tedy prestaneme hneď po tom, čo zakryjeme človeka) a zbyde nám menej než p_{b+1} kamenů, aby som nemohli pokrýť ďalšieho človeka. Ukážeme, jak tuto konfiguráciu upraviť tak, aby som zmenili počet pralidi spících s kameny, je-li to možné.

Uvažujme práve sestrojenou konfiguráciu a v ní posledný kámen (najviac vpravo, označený zelenou farbou) v poslednom vyplnenom rādke, na ktorom leží človek, jedná se tedy o rádek b . Kdyby som tento kámen mohli přesunout do jedného ze zatím neobsazených poliček výše (označených modře), máme vyhráno, snížili jsme počet pralidi s kameny o jedna, potom nutně platí $a < b$, což je spor s predpokladem rovnosti.



Pokud to nejde, pak buď $b = 1$ nebo $p_1 = 2025$ (a tedy i všechna ostatní $p_i = 2025$). Pokud $b = 1$, tedy všechny rādky kromě první dvou jsou volné, můžeme posledný kámen v prvním rādke přesunout do třetího rādke (zatím prázdného), jelikož víme, že $p_3 > 1$. To plyne z toho, že $p_1 > 1$, jinak bychom měli jen jeden kámen, a to zakazuje zadání. Tím jsme našli rozestavení kamenů s menším počtem kolizi, tedy $a < b$ a máme spor s predpokladem, že se tyto dvě hodnoty rovnají.

V případě $p_1 = 2025$, jelikož v zadání je podmínka $k \leq 2025^2 - 2$, máme ve 2025. rādke aspoň dvě volná místa, přičemž človek je nutně na tom vzdálenějším, tedy kámen můžeme přesunout tam. Opět jsme našli rozestavení s menším počtem kolizi, tedy máme spor.

Celkově jsme tedy ukázali, že pokud máme alespoň jedného človeka, který aktuálně spí s kamenem a aspoň jedného, který aktuálně s kamenem nespí, vždy můžeme změnit počet kolizi, a tedy nemůže platit $a = b$. Jediná možnost tedy zbývá, že buď s kameny spí všichni, nebo nikdo, a to je práve to, co jsme chtěli ukázat.

2.7 Kameň Mení Stratégu

Zadanie.

Starému Koreňovi sa celý ten hype okolo Kameňov nepáči. Mladí praludia nimi všetko merajú, namiesto toho, aby rozmýšľali, koľko to skutočne váži. Všade sa mu niekto pokúša nejaké Kamene predaf. Všetci ich chcú používať, aj

keď nevedia poriadne na čo... A čo je úplne najhoršie: začal prehrávať vo svojej oblúbenej hre Papier-Nožnice – to sa mu ešte nikdy nestalo!

Za starých čias bolo totiž zvoliť nožnice vždy aspoň tak výhodné ako čokoľvek iné. O tom sa koniec-koncov môžete presvedčiť aj sami. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b platí

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} + \frac{2ab}{a+b} \geq \frac{a+b}{2} + \sqrt{ab}.$$

V ktorých prípadoch nastáva rovnosť?

Riešenie.

opravuje **BaškaN** (barbora.novosadova@trojsten.sk)

Nerovnicu si upravíme na nejaký použiteľnejší tvar. Najskôr presunieme členy s odmocninami na jednu stranu a zvyšné na druhú stranu:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} - \sqrt{ab} \geq \frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b}.$$

Ľavú stranu rozšírime výrazom $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}$, čím odstránime odmocniny v čitateli. pravú stranu upravíme na spoločného menovateľa; následne na oboch stranách využijeme vzorec pre $(a-b)^2$:

$$\frac{\frac{a^2+b^2}{2} - ab}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}} \geq \frac{(a+b)^2 - 4ab}{2(a+b)}$$

$$\frac{\frac{(a-b)^2}{2}}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}} \geq \frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$$

Vidíme, že obe strany môžeme ľahko predeliť výrazom $\frac{(a-b)^2}{2}$, pravda, pokiaľ $a \neq b$ (na tento prípad sa pozrieme neskôr). Rovnako môžeme nerovnicu prenásovať výrazmi $(a+b)$ a $\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}\right)$, čím dostaneme

$$a+b \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}$$

Keďže obidve strany sú kladné, môžeme umocniť obe strany na druhú bez zmeny počtu riešení:

$$(a+b)^2 \geq \frac{a^2+b^2}{2} + ab + 2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\sqrt{ab}.$$

Úpravou prvých dvoch členov pravej strany na spoločný zlomok si všimneme vzorec pre $(a+b)^2$, takže odčítame $\frac{(a+b)^2}{2}$ z oboch strán a následne vynásobíme dvomi:

$$(a+b)^2 \geq 4\sqrt{\frac{ab(a^2+b^2)}{2}}.$$

Opäť umocníme na druhú, čím konečne odstránime odmocninu:

$$(a + b)^4 \geq 8ab(a^2 + b^2).$$

Roznásobíme všetky členy, presunieme ich na ľavú stranu a dostaneme

$$(a - b)^4 \geq 0,$$

čo platí pre všetky a, b . Keďže sme využívali iba ekvivalentné úpravy, dokázali sme aj pôvodnú nerovnicu.

Kedy nastáva rovnosť? V poslednom nastáva rovnosť ak $a = b$. Počet riešení rovnice sa môže meniť, ak sa násobí alebo delí potenciálne nulovým výrazom. To sa dialo, iba keď sme delili výrazom $\frac{(a-b)^2}{2}$, a ten je nulový rovnako v prípade $a = b$. Teda toto je jediný prípad, kedy nastáva rovnosť.

Alternatívne riešenie

Všimnime si, že jednotlivé členy nerovnosti sú postupne kvadratický, harmonický, aritmetický a geometrický priemer pre 2 premenné.

Pre tých, ktorí o týchto priemeroch ešte nepočuli, všeobecné definície sú takéto (pre n premenných):

$$A = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

$$G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i},$$

$$H = \frac{k}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}},$$

$$K = \sqrt{\frac{1}{n} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2}}.$$

Pre tieto priemery platí tvrdenie, známe ako *KAGH* nerovnosť:

$$K \geq A \geq G \geq H. \quad (7.1)$$

Rovnosť tu nastáva práve vtedy, keď $x_1 = x_2 = \dots = x_n$

Označme si teda, pre dve premenné v tejto úlohe,

$$K = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}, \quad H = \frac{2ab}{a + b}, \quad A = \frac{a + b}{2}, \quad G = \sqrt{ab}.$$

Všimnime si, že

$$H = \frac{G^2}{A}. \quad (7.2)$$

Ďalej, keďže nerovnosť (7.1) platí pre všetky reálne (v našom prípade stačí kladné) čísla, platí aj pre čísla K^2 , G^2 . Zapišme pre tieto čísla "strednú" časť nerovnice, teda $A \geq G$:

$$\frac{K^2 + G^2}{2} \geq \sqrt{K^2 G^2},$$

$$\frac{\frac{a^2+b^2}{2} + ab}{2} \geq KG,$$

$$\frac{(a+b)^2}{4} \geq KG,$$

čo nám vlastne dáva

$$A^2 \geq KG. \quad (7.3)$$

S využitím našich označení a dosadením (7.2) do nerovnice zo zadania dostávame

$$K + \frac{G^2}{A} \geq A + G.$$

Prenásobíme nerovnicu A a následne využijeme (7.3):

$$KA + G^2 \geq A^2 + AG. KA + G^2 \geq KG + AG.$$

Presunieme členy na ľavú stranu, postupne vyjmemme pred zátvorku $K - G$ a $(A - G)$, až dostávame

$$KA - KG + G^2 - AG \geq 0,$$

$$K(A - G) - G(A - G) \geq 0,$$

$$(K - G)(A - G) \geq 0.$$

Posledné platí vďaka tvrdeniu (7.1).

Kedy nastáva rovnosť? V poslednom máme rovnosť (podľa tvrdenia (7.1)), práve keď $a = b$. Posledná nerovnosť však nie je úplne ekvivalentná s pôvodnou, cestou sme využili (7.3), teda rovnosť musí platiť aj tu. Túto nerovnosť sme dostali z AG nerovnosti pre K^2 , G^2 , teda musí platiť $K^2 = G^2$. Z toho ale vyplýva $K = G$, a aj tu nám (7.1) dá $a = b$. Teda žiadne ďalšie podmienky nemáme.

2.8 Karikatúry Musia Skončiť

Zadanie.

Náčelník Drúk je zlostou celý bez seba. Pred chvíľou našiel Kamennú dosku, na ktorej nejaký neprajník vynašiel karikatúru – vytesal náčelníkovu podobizeň s hanlivo disproporčnými časťami tela... čo ak to uvidí niekto z cudzieho kmeňa? Ako si potom nájde ďalšiu manželku? A čo je vytesané v Kameni, to už tam zostane navždy. Toto Kamenné šialenstvo musí skončiť... Vyhlasuje sa okamžitý zákaz!

Keďže praludia zatiaľ písmo nevyňašli, musia sa pri vytesávaní zákazu nejak vynájsť. Vytesajú teda trojuholník ABC , v ktorom platí $|AB| < |AC|$. Nech H je jeho ortocentrum a body P , Q sú priesečníky osi strany BC postupne

s priamkami AB a AC . Nech M je stred BC a N je stred PQ . Dokážte, že priamky HM a AN sa pretínajú na kružnici opísanej trojuholníku ABC .

Riešenie.

opravuje **Michal Pecho** (michal.pecho@trojsten.sk)

Označme H' bod stredovo súmerný s bodom H podľa bodu M . Dokážeme známu vlastnosť, že bod H' leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC . Označme D a E postupne päty výšok vedených z vrcholov C a B . Platí

$$|\angle BH'C| = |\angle BHC| = |\angle EHD| = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - |\angle BAC| = 180^\circ - |\angle BAC|.$$

Platí tak $|\angle BH'C| + |\angle BAC| = 180^\circ$. Z toho vyplýva, že bod H' leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC .

Ukážeme, že trojuholníky $H'BC$ a APQ sú podobné. Platí

$$|\angle H'BC| = |\angle HCB| = |\angle DCB| = 90^\circ - |\angle DBC| = 90^\circ - |\angle PBM| = |\angle BPM| = |\angle APQ|.$$

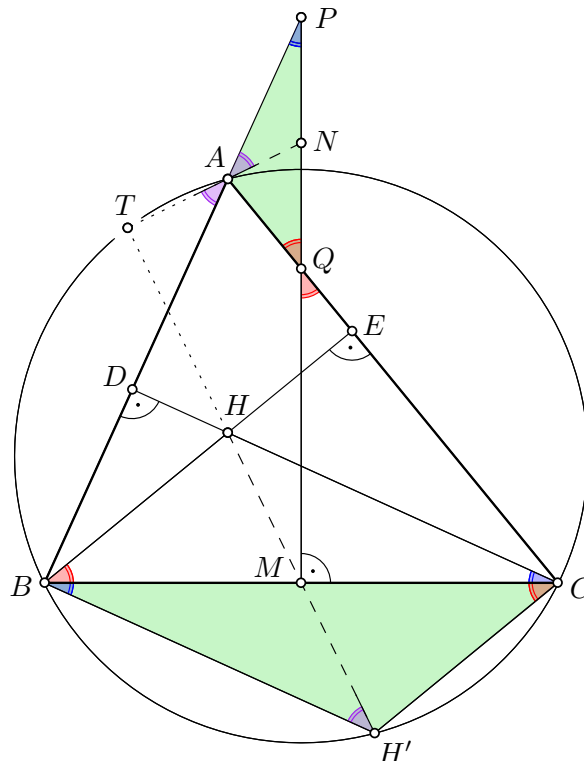
Podobne ukážeme, že platí $|\angle H'CB| = |\angle AQP|$. Trojuholníky $H'BC$ a APQ sú tak podobné podľa vety uu .

Všimnime si, že $H'M$ je ťažnicou v trojuholníku $H'BC$ a AN je ťažnicou v trojuholníku APQ . Z podobnosti týchto trojuholníkov vyplýva $|\angle MH'B| = |\angle NAP|$.

Označme T priesečník priamok $H'M$ a AM . Platí

$$|\angle TH'B| = |\angle MH'B| = |\angle NAP| = |\angle TAB|,$$

takže štvoruholník $TBH'A$ je tetivový. To spolu s tým, že B , H' a A ležia na kružnici opísanej trojuholníku ABC dáva, že aj bod T na tejto kružnici leží.



2.9 Khalkofóbní Majstri Súperia

Zadanie.

Kmeňová rada sa uzniesla, že Kamene majú nepriaznivý vplyv na kognitívny vývoj mládeže – rodičia sa vraj majú vrátiť k tradičnej výchove a svoje deti biť po hlave opäť palicami. Kamene prinášajú moderným praľuďom iba samé problémy, vravia ďalej, mali by sme sa ich zbaviť. Dvaja členovia rady, Palica a Bakuľa, vymysleli dva geniálne plány, ako Kamene nadobro odstrániť: Dali by sa všetky zahrabať do zeme alebo nahádzať do mora. Lenže ktorý z plánov je geniálnejší? Ten, ktorý má geniálnejšieho autora, samozrejme – a o tom sa dá rozhodnúť jedine súbojom (v logickej hre).

Súboj prebieha nasledovne: Máme graf s n vrcholmi, na začiatku bez hrán. Začína Palica a s Bakulou sa striedajú v ťahoch, pričom hráč na ťahu spojí dva vrcholy, medzi ktorými doposiaľ nevedie hrana. Hráč, ktorého ťah vytvorí v grafe cyklus nepárnej dĺžky, prehráva. V závislosti od n určte, kto má víťaznú stratégiu.

Riešenie.

opravuje **Dominik Rigasz** (dominik.rigas@trojsten.sk)

Podľa Riša Dudeka. Tvrdíme, že Bakuľa má výhernú stratégiu v prípade, že n je nepárne alebo je n deliteľné 4, v ostatných prípadoch (čiže pre $n \equiv 2 \pmod{4}$) má výhernú stratégiu Palica.

Uvedme najskôr trochu grafovej terminológie. Graf nazveme bipartitný, ak jeho vrcholy vieme rozdeliť do dvoch disjunktných množín (partícií) tak, že medzi žiadnymi dvoma vrcholmi z rovnakej partície nevedie hrana. Graf nazveme kompletný bipartitný, ak je bipartitný, a navyše medzi každými dvoma vrcholmi z rôznych partícií hrana vedie. Všimnime si teraz niekoľko "motivačných" pozorovaní:

1. Graf je bipartitný práve vtedy, ak neobsahuje nepárny cyklus.
2. Ak obaja hráči hrajú optimálne (čiže kým môžu urobiť neprehrávajúci ťah, tak ho urobia), hra skončí v stave, kde máme kompletný bipartitný graf. Vskutku, graf ostáva bipartitný po všetkých neprehrávajúcich ťahoch, a ak už hráč nevie pridať ďalšiu hranu bez toho aby vytvoril nepárny cyklus, znamená to, že graf je kompletný bipartitný. Všimnime si navyše, že ak partície výsledného grafu sú A, B , tak potom bolo urobených $|A| \cdot |B|$ ťahov (počet hrán výsledného grafu), a teda iba z výsledného stavu hry vieme učiť víťaza – konkrétne z parity súčtu $|A| \cdot |B|$ (pre párne hodnoty vyhráva Bakuľa, pre nepárne Palica).

Tvrdíme, že pre nepárne n platí, že vždy keď je Bakuľa na ťahu, tak vie urobiť taký ťah, aby nevytvorila nepárny cyklus. Ak by tomu tak nebolo, tak daný graf musí byť pred Bakuliným ťahom kompletný bipartitný, nech jeho partície sú A, B . Nakoľko súčet $|A| + |B| = n$ je nepárny, tak $|A|, |B|$ musia mať rôznu paritu, a teda počet doteraz urobených ťahov (počet hrán) $|A| \cdot |B|$ je párny. To je však spor s tým, že Bakuľa (druhý hráč) je na ťahu. Vidíme tak, že pokiaľ ešte hra neskončila, tak Bakuľa vie vždy urobiť neprehrávajúci ťah. Nakoľko hra niekedy skončí, plyní z toho, že Bakuľa má v tomto prípade výhernú stratégiu.

Zavedme teraz niekoľko nových pojmov (podotknime, že nejde o zaužívanú terminológiu). Súvislý bipartitný graf nazveme *vyváženým*, pokiaľ obe jeho partície majú rovnakú veľkosť. Všimnime si, že pojem je dobre definovaný, nakoľko súvislý bipartitný graf má jednoznačne určené partície. Komponent súvislosti nejakého grafu nazveme *triviálny*, pokiaľ ide o jeden samotný vrchol. Potom ľubovoľný bipartitný graf nazveme *vyváženým*, pokiaľ všetky jeho netriviálne komponenty sú vyvážené. Všimnime si dve pozorovania:

3. Vyvážený bipartitný graf na párnom počte vrcholov má párny počet triviálnych komponentov. Naozaj, plyní to z toho, že každý netriviálny komponent má párny počet vrcholov, lebo je vyvážený.

4. Spojenie ľubovoľných dvoch vrcholov z dvoch rôznych vyvážených komponentov vytvorí jeden nový vyvážený komponent.

Teraz popíšeme výhernú stratégiu pre Bakulu, ak $n \equiv 0 \pmod{4}$, ktorá spočíva v tom, že Bakula chce vždy po svojom ťahu udržať graf vyvážený, až pokým sa nedostane do stavu, že graf je po jej ťahu $K_{n/2, n/2}$ (kompletný bipartitný graf, kde partície majú veľkosti $n/2$), kedy Bakula vyhrá. Vskutku, indukciou ukážeme, že toto Bakula vždy vie urobiť. Na začiatku je graf vyvážený. Predpokladajme teraz, že máme ľubovoľný vyvážený graf na n vrcholoch iný ako $K_{n/2, n/2}$, a Palica urobí ťah.

Ak po Palicinom ťahu je graf stále vyvážený a nie je súvislý, tak má aspoň dva komponenty. Ak sú oba vyvážené, môže ich Bakula ľubovoľne spojiť, čím určite nevytvorí žiaden nový cyklus, a zároveň neporuší vyváženosť grafu. Ak je jeden z nich triviálny, tak potom určite existuje ešte aspoň jeden triviálny komponent, a teda Bakula môže spojiť tieto dva triviálne komponenty do jedného vyváženého komponentu. Ak po Palicinom ťahu je graf stále vyvážený a aj súvislý, potom partície musia mať veľkosti $n/2$ a $n/2$, a teda podobne ako v prípade nepárneho n Bakula musí vedieť urobiť neprehrávajúci ťah (v opačnom prípade by musel graf mať pred Bakuliným ťahom podobu $K_{n/2, n/2}$, a teda bolo doposiaľ vykonaných $n^2/4$ ťahov, čo je však párný počet).

Ostáva prípad, že Paliciným ťahom graf prestane byť vyvážený. To však znamená, že Palica musela spojiť nejaký vyvážený komponent s nejakým triviálnym komponentom – označme daný vrchol v_1 . Potom však musí existovať aspoň ešte jeden triviálny komponent – označme vrchol v ňom ako v_2 . Bakula teraz môže spojiť vrcholy v_1 a v_2 , čím napravi vyváženosť grafu, a navyše nevytvorí žiaden nový cyklus.

Vidíme tak, že Bakula naozaj vie vždy zabezpečiť aby graf ostal vyvážený, a teda niekedy prideme do stavu, že po Bakulinom ťahu graf bude $K_{n/2, n/2}$ (napríklad lebo počet hrán sa zväčšuje), kedy Palica už nevie urobiť ťah. Teda aj v tomto prípade Bakula má výhernú stratégiu.

Ostáva prípad, kedy $n \equiv 2 \pmod{4}$. Tvrdíme, že v takom prípade má výhernú stratégiu Palica. Prvý ťah urobí Palica hocijaký, čím dostaneme opäť vyvážený graf na párnom počte vrcholov. Teraz Palica bude po každom svojom ťahu udržiavať graf vyváženým, presne tak isto ako to v predchádzajúcom prípade robila Bakula, až kým po Palicinom ťahu nedostaneme $K_{n/2, n/2}$, čím Bakula prehrá. Všimnime si, že v predchádzajúcej indukcii sme si všade vystačili iba s poznatkom, že n je párne, okrem prípadu, kedy nám nepriateľ vrátil súvislý vyvážený graf. Ak by sa toto stalo teraz Palici, tak tvrdíme, že opäť existuje ťah, ktorý vie Palica urobiť, z podobných paritných dôvodov ako predtým. Ak by tomu tak totiž nebolo, tak po Bakulinom ťahu musel byť graf $K_{n/2, n/2}$, a teda počet doposiaľ vykonaných ťahov je $n^2/4$, teda nepárne číslo, čo je spor s tým, že na ťahu je Palica (prvý hráč).

2.10 Koniec Moderného Sveta

Zadanie.

Nakoniec víťazí plán nahádzať Kamene do mora... lenže praludia nie sú dostatočne zbehlí vo fyzike, aby poznali nebezpečenstvo, ktoré tento plán obnáša. Totiž, že Kamene majú okrem hmotnosti aj objem. Hladina mora stúpa a zaplavuje všetko, čo jej stojí v ceste. Uprostred katastrofy dostáva Plť spásonosný nápad – stavia z dreva loď a berie na ňu svoju manželku Plť a pár zvierat z každého druhu... a zvyšok poznáte.

Po potope bolo Plťovi s Plťou samým smutno, tak sa rozhodli hľadať ďalších preživších. Nájdite všetky polynómy f s celočíselnými koeficientami, ktoré pre každé nepárne prvočíslo p spĺňajú $f(p) \mid 2^p - 2$.

Riešenie.

opravuje **Jakub Šošovička** (jakub.sosovicka@trojsten.sk)

Riešenia sú $f \in \{1, 2, 3, 6, n, 2n, -1, -2, -3, -6, -n, -2n\}$. Tieto riešenia overíme. Zrejme, ak vyhovuje f , tak vyhovuje aj $-f$, stačí teda overiť prvých 6 riešení. Podmienka, ktorú overujeme je, či platí $f(p) \mid 2(2^{p-1} - 1)$ pre všetky prvočísla $p > 2$. Výraz napravo je zrejme deliteľný dvomi. Modulo 3 je $2^{p-1} - 1 \equiv (-1)^{p-1} - 1 = 0$. Z Malej Fermatovej vety je tento výraz deliteľný p . Preto $2p \mid 2^p - 2$, aj $6 \mid 2^p - 2$, teda riešenia vyhovujú.

Po tom, čo sme tipli riešenia, všimneme si, že $f(p)$ bude asi deliteľné len prvočíslami $2, 3, p$. Preto, nech $q \mid f(p) \mid 2^p - 2$ pre nejaké nepárne prvočísla p, q . Z Malej Fermatovej vety je $2^p \equiv 2^{p+k(q-1)} \pmod{q}$. Zároveň, ak $q \mid f(p)$, tak aj $q \mid f(p + kq)$.

Plán útoku je teda takýto. Vieme, že $q \mid f(p) \mid 2^p - 2$, pričom deliteľnosť $q \mid f(r)$ závisí od zvyšku r modulo q a deliteľnosť $q \mid 2^r - 2$ závisí od zvyšku r modulo $q - 1$. Chceli by sme nejak dostať spor, respektíve, že $q \in \{2, 3, p\}$. Chceme preto nájsť nejaké prvočísla r , také, že $r \equiv p \pmod{q}$ (aby platilo $q \mid f(r) \mid 2^r - 2$) a zároveň, aby r malo nejaký blbý zvyšok modulo $q - 1$, teda by neplatilo $q \mid 2^r - 2$. Ako takéto prvočísla hľadať? Podľa Dirichletovej vety existuje pre každé nesúdeliteľné a, b nekonečne veľa prirodzených čísel n takých, že $ka + b$ je prvočísla. Stačí teda nejak múdro zobrať deliteľnostné podmienky pre r , ktoré nám dajú spor a Čínskou zvyškovou vetou z nich dostať požadované a, b .

Obe deliteľnosti sa menia s periódou $q(q - 1)$. Hľadáme teda r v tvare $p + mq + kq(q - 1)$. Potom $r \equiv p \pmod{q}$, teda $q \mid f(r)$ a $r \equiv p + m \pmod{q - 1}$. Potrebujeme dostať $q \nmid 2^r - 2$, teda $q \nmid 2^{p+mq+kq(q-1)} - 2$, čím dostaneme spor. Avšak m nemôžeme voliť úplne ľubovoľne. Potrebujeme nájsť také prvočísla $r = ka + b$ použitím Dirichletovej vety pre $a = q(q - 1)$, $b = p + mq$. Tieto čísla musia byť nesúdeliteľné. Na to musí platiť $p \neq q$. Potom $q \nmid b$ a stačí, aby $q - 1$ bolo nesúdeliteľné s $p + m$. Zvoľme preto nejaké pevné $m \equiv -1 - p \pmod{q - 1}$. Potom sú $a = q(q - 1)$, $b = p + mq$ nesúdeliteľné za predpokladu $p \neq q$. Zároveň, z podmienky $q \mid 2^b - 2$ máme $2^{-1} - 2 \equiv 0 \pmod{q}$, teda $1 \equiv 4$, z čoho $q = 3$. Teda pre $p \neq q > 3$ dostávame z Dirichletovej vety spor.

Preto je $f(p)$ deliteľné iba prvočíslami $2, 3, p$ pre $p > 2$. Zrejme $4 \nmid 2^p - 2$, teda ani $f(p)$ nie je deliteľné 4. Voľme p tvaru $6k - 1$ (takých prvočísel je z Dirichletovej vety nekonečne veľa). Potom modulo 9 máme $2^p \equiv 2^{-1} \equiv 5$, teda $9 \nmid 2^p - 2$. Potom pre prvočísla $p = 6k - 1$, pre ktoré $p \nmid f(p)$ máme $|f(p)| \leq 6$, teda takýchto prvočísel môže byť iba konečne veľa, pokiaľ je f nekonztantný (polynóm $f(n) - c$ má najviac $\deg f$ koreňov). Vtedy máme pre nekonečne veľa prvočísel $p \mid f(p)$, teda $p \mid f(0)$. Z toho $f(0) = 0$, teda $f(n) = ng(n)$ pre nejaký celočíselný polynóm g . O g platí tiež podmienka v zadaní, teda rovnakou úvahou je buď konštantný, alebo $g(0) = 0$. Preto buď $n^2 \mid f(n)$, alebo $f(n) = c_1 n$, alebo $f(n) = c_0$. Prvý prípad sporuje $p = 3$. Rovnako dosadením $p = 3$ máme v ostatných prípadoch $c_1 \mid 2$ a $c_0 \mid 6$. Všetky také polynómy vyhovujú (ukázali sme na začiatku).