



Zadania 2. kola letnej časti

Termín odoslania

V prípade otázok k zadaniam nás neváhajte kontaktovať na kms@kms.sk.

2.1 Konáre Mocné Seká

level L1, max. 7 bodov

Drevorubač Papek je veľmi váženým a rešpektovaným občanom. Zabezpečuje totiž pre kmeň prísun všemožných konárov, palíc, drúkov a kmeňov – teda tých najpokročilejších materiálov. Sekanie papekov ale nie je tak jednoduché, ako by sa mohlo zdať. Každý papek je inak hrubý, takže aj papek, ktorým ho vieme rozdeliť, musí mať správnu hrúbku. S príliš malými papekmi je zase práca namáhavá a úporná, občas do papeku tlačie aj celý deň. Teraz čelí ťažkému problému:

Papek má 9 rôznych papekov s hrúbkami postupne 1, 2, ..., 9 palcov. Potrebuje ich rozdeliť na dve kopy, v jednej bude 5 papekov, v druhej budú 4. V oboch kopách následne spočíta súčin hrúbok papekov (v každej kope zvlášť). Koľkými spôsobmi vie papeky rozdeliť tak, aby bol jeden zo súčinov násobkom zvyšného?

2.2 Každého Mamuta Strieskajú

levely L1 až L2, max. 7 bodov

Náčelník Trieska pripravuje svoj kmeň na veľký lov na mamuty. Vymyslel na to novú stratégiu: každý člen kmeňa si zoberie palicu a trieska mamuta, až kým ho neuloví. Predvčerom vyslal štyroch prieskumníkov, aby zistili, koľko mamutov sa po okolí potuluje – prieskumníci sa ale rozdelili a je možné, že niektorých mamutov videli viacerí.

Množinu mamutov, ktorých videl prvý prieskumník, označme M_1 a ich počet bol m_1 . Podobne videl druhý prieskumník množinu mamutov M_2 s počtom mamutov m_2 , tretí prieskumník videl M_3 s počtom m_3 a štvrtý videl M_4 s počtom m_4 . Zároveň vieme, že prvý a tretí prieskumník nevideli žiadneho rovnakého mamuta. Rovnako ani druhý a štvrtý prieskumník nevideli žiadneho rovnakého mamuta. To vieme napísať aj symbolicky nasledovne

$$M_1 \cap M_3 = M_2 \cap M_4 = \emptyset.$$

Počet všetkých mamutov, ktoré boli videné, si označme s . Alternatívne $s = |M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4|$. Dokážte, že potom platí

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 \leq 2s.$$

V akých prípadoch môže nastať rovnosť?

2.3 Krajinu Moju Spaľuje

levely L1 až L3, max. 7 bodov

Briketa nemá dobrý týždeň. Už trikrát sa pokúsila nadizajnovať ohnisko, na ktorom by mohla opieť mamutie mäso pre celý kmeň, ale palice po jeho okraji jej vždy po chvíli začali horieť. Od nich sa samozrejme chytil celý les, a tak sa opäť museli (relatívne narýchlo) presťahovať. Keby len existoval nejaký iný materiál... Nuž, zbytočne snívať, radšej sa pustí do ďalšieho prototypu.

Nový dizajn ohniska pozostáva z kružnice so stredom S , na ktorej leží bod X . Tetiva AB tejto kružnice pretína polomer SX v bode $Y \neq S$. Dokážte, že $|AB| > 2|XY|$.

2.4 Kúzelný Materiál Skúmam

levely L1 až L4, max. 7 bodov

Parketa uteká po ďalšom matkinom nevydarenom experimente lesom. V lese všetko horí – stromy, kríky, mamuty, Parketa, aj ostatní utekajúci členovia kmeňa (nebojte sa, už si na to zvykli). Zrazu zakopne o zvláštny predmet... ktorý nehorí! Od zvedavosti ho dvíha a uteká s ním ďalej.

V bezpečí sa potom rozhodne venovať tejto záhade všetok svoj vedecký um. Predmet má rozmery a, b, c , čo sú kladné reálne čísla, ktoré spĺňajú rovnosť

$$a + b + c = abc.$$

Parkete to so záhadou ohňovzdornosti síce nepomáha, no zisťuje, že aspoň jedno z čísel a, b, c musí byť väčšie ako $\frac{17}{10}$. Dokážte, že v tomto má pravdu.

2.5 Kategórie Meriame Silou

levely L1 až L5, max. 7 bodov

Novinka o špeciálnom ohňovzdornom materiáli sa medzi praľudmi šíri rýchlosťou požiaru. Keďže tento materiál si udržuje stálu hmotnosť aj v extrémnych podmienkach, je možné ho používať na štandardizáciu všetkých aspektov modernej spoločnosti, vrátane presných fyzikálnych meraní. Princíp merania je jednoduchý: v jednej ruke držíme predmet s neznámou hmotnosťou, v druhej nejaký počet kusov daného materiálu. Podľa počtu kusov potom predmet priradíme do hmotnostnej kategórie. Materiál teda pomenujú Kategorizačný Nemeň, skrátene Kameň.

Lenže čo ak sú dva moje Kamene rovnako ťažké ako jeden cudzí?

Máme 13 predmetov s celočíselnými kladnými hmotnosťami. Po odobratí ľubovoľného z nich vieme zvyšné rozdeliť na dve skupiny po šesť predmetov, pričom obe skupiny majú rovnakú celkovú hmotnosť. Dokážte, že potom všetky predmety musia mať rovnakú hmotnosť.

2.6 Kvalita Matracu Strašná

levely L1 až L5, max. 7 bodov

Každý moderný pračlovek, ktorý nechce byť desať rokov za opicami, si okamžite zadováži svoj Kameň... a keby len jeden, každý ich chce čo najviac. S Kamennou revolúciou prichádza aj zmena životného štýlu, praľudia začínajú používať Kamenné nástroje a sťahovať sa do priestranných Kamenných jaskýň. Konár sa nedávno do jaskyne presťahoval a nevie si ju vynachváliť. Len keby ho pri spánku stále niečo netlačilo do chrbta...

Plocha jaskyne je tvorená tabuľkou 2025×2025 . V každom riadku spí na práve jednom políčku pračlovek (spí, a teda sa nehýbe). Do jaskyne však treba uložiť aj ich Kamene na práve k políčok, kde $2 \leq k \leq 2025^2 - 2$. Z fyzikálnych vlastností Kameňov vyplýva, že ak je na nejakom políčku Kameň, tak nejaký musí byť aj na políčku naľavo od neho (ak políčko naľavo existuje). Pre konkrétne usporiadanie praľudí sa pozrieme na všetky rozmiestnenia k kameňov. Pre každé rozmiestnenie sa pozrieme na počet praľudí, ktorí spia na políčku s kameňom. Nech a je najmenší taký počet spomedzi rozmiestnení a b je najväčší. Dokážte, že ak $a = b$, tak v danom usporiadaní praľudí v jaskyni buď každý spí s Kameňom, alebo nikto nespí s Kameňom, nezávisle od rozmiestnenia Kameňov.

2.7 Kameň Mení Stratégiu

levely L1 až L5, max. 7 bodov

Starému Koreňovi sa celý ten hype okolo Kameňov nepáči. Mladí praľudia nimi všetko merajú, namiesto toho, aby rozmýšľali, koľko to skutočne váži. Všade sa mu niekto pokúša nejaké Kamene predať. Všetci ich chcú používať, aj keď nevedia poriadne na čo... A čo je úplne najhoršie: začal prehrávať vo svojej obľúbenej hre Papier–Nožnice – to sa mu ešte nikdy nestalo!

Za starých čias bolo totiž zvoliť nožnice vždy aspoň tak výhodné ako čokoľvek iné. O tom sa koniec-koncov môžete presvedčiť aj sami. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b platí

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} + \frac{2ab}{a + b} \geq \frac{a + b}{2} + \sqrt{ab}.$$

V ktorých prípadoch nastáva rovnosť?

2.8 Karikatúry Musia Skončiť

levely L1 až L5, max. 7 bodov

Náčelník Drúk je zlostou celý bez seba. Pred chvíľou našiel Kamennú dosku, na ktorej nejaký neprajník vynašiel karikatúru – vytesal náčelníkovu podobizeň s hanlivo disproporčnými časťami tela... čo ak to uvidí niekto z cudzieho kmeňa? Ako si potom nájde ďalšiu manželku? A čo je vytesané v Kameni, to už tam zostane navždy. Toto Kamenné šialenstvo musí skončiť... Vyhlasuje sa okamžitý zákaz!

Keďže praľudia zatiaľ písmo nevynašli, musia sa pri vytesávaní zákazu nejak vynájsť. Vytesajú teda trojuholník ABC , v ktorom platí $|AB| < |AC|$. Nech H je jeho ortocentrum a body P, Q sú priesečníky osi strany BC postupne s priamkami AB a AC . Nech M je stred BC a N je stred PQ . Dokážte, že priamky HM a AN sa pretínajú na kružnici opísanej trojuholníku ABC .

2.9 Khalkofóbní Majstri Súperia

levely L4 až L5, max. 8 bodov

Kmeňová rada sa uzniesla, že Kamene majú nepriaznivý vplyv na kognitívny vývoj mládeže – rodičia sa vraj majú vrátiť k tradičnej výchove a svoje deti biť po hlave opäť palicami. Kamene prinášajú moderným praľudom iba samé problémy, vravia ďalej, mali by sme sa ich zbaviť. Dvaja členovia rady, Palica a Bakuľa, vymysleli dva geniálne plány, ako Kamene nadobro odstrániť: Dali by sa všetky zahrabať do zeme alebo nahádzať do mora. Lenže ktorý z plánov je geniálnejší? Ten, ktorý má geniálnejšieho autora, samozrejme – a o tom sa dá rozhodnúť jedine súbojom (v logickej hre).

Súboj prebieha nasledovne: Máme graf s n vrcholmi, na začiatku bez hrán. Začína Palica a s Bakuľou sa striedajú v ťahoch, pričom hráč na ťahu spojí dva vrcholy, medzi ktorými doposiaľ nevedie hrana. Hráč, ktorého ťah vytvorí v grafe cyklus nepárnej dĺžky, prehráva. V závislosti od n určte, kto má víťaznú stratégiu.

2.10 Koniec Moderného Sveta

levely L4 až L5, max. 10 bodov

Nakoniec víťazí plán nahádzať Kamene do mora... lenže praľudia nie sú dostatočne zbehlí vo fyzike, aby poznali nebezpečenstvo, ktoré tento plán obnáša. Totiž, že Kamene majú okrem hmotnosti aj objem. Hladina mora stúpa a zaplavuje všetko, čo jej stojí v ceste. Uprostred katastrofy dostáva Plť spásonosný nápad – stavia z dreva loď a berie na ňu svoju manželku Plť a pár zvierat z každého druhu... a zvyšok poznáte.

Po potope bolo Plťovi s Plťou samým smutno, tak sa rozhodli hľadať ďalších preživších. Nájdite všetky polynómy f s celočíselnými koeficientami, ktoré pre každé nepárne prvočíslo p splňajú $f(p) \mid 2^p - 2$.