



Riešenia 3. kola letnej časti

3.1 Kráľov Majestátny Šík

Zadanie.

Stojím. Stojím a po mojom boku sú moji bratia, pripravení položiť život proti cudzincom odetým v bielej zbroji, ja však pripravený nie som. Desivý zástup s vyťahnutými čepelami, múr, o ktorý sa rozbijú naše šíky. Nie, na to myslieť nesmiem. Stojím tak ako moji bratia aj nepriatelia. Až na jedného. Šialenec. Rúti sa priamo oproti mne a jeho krivý pohľad mi trasie kolenami, ale ja stále stojím.

Bojový šík číslo 916238457 dnes pociťoval svoju prítomnosťou aj kráľ s kráľovnou, ktorí stoja za naším hrdinom. Šík 916238457 si vybrali preto, lebo je príkladom 9-ciferného čísla, ktoré obsahuje každú cifru od 1 po 9 práve raz, a navyše má vlastnosť, že každá z cifier od 1 po 5 sa v ňom vyskytuje vo vzostupnom poradí, no cifry od 1 po 6 už vzostupne zoradené nie sú. Koľko takýchto čísel existuje?

Riešenie.

opravuje **Mišo M.** (michal.molnar@trojsten.sk)

Hľadané deväťciferné číslo môžeme poskladať tak, že začneme s číslom s menej ciframi, medzi ktoré budeme postupne pridávať chýbajúce cifry. Takéto riešenie sa môže riadne skomplikovať, ak rôzne umiestnenia jednej cifry dajú rôzne počty možností pri umiestnení ďalšieho. Napríklad vloženie 1 na začiatok 89 dá tri možnosti, kam vložiť cifru 2 (1289, 1829, 1892), ale vloženie na koniec dá len jednu (8912). Preto začneme s ciframi, na ktoré máme najviac podmienok.

Cifry 1, 2, 3, 4, 5 musia byť zoradené vzostupne, preto začneme s 5-ciferným číslom 12345. Tu máme len jednu možnosť. Cifru 6 teraz nemôžeme pridať na koniec čísla, lebo sme porušili druhú podmienku zo zadania. Máme tak 5 možných miest, kam ju dať. Pre zvyšné cifry (7, 8, 9) už žiadne obmedzenie nemáme. Takže 7 môžeme umiestniť pred ľubovoľnú zo 6 umiestnených cifier alebo úplne na koniec čísla, čo je 7 možností. Pre cifru 8 máme analogicky 8 možností a pre cifru 9 zas 9 možností. Dokopy tak môžeme získať jedno z $5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2520$ čísel.

Iné riešenie.

Úlohu vyriešime tak, že zistíme počet čísel, ktoré spĺňajú prvú podmienku (1 – 5 sú zoradené vzostupne), a od neho odčítame počet čísel, ktoré síce prvú podmienku spĺňajú, ale druhú (1 – 6 nie sú zoradené vzostupne) už nie. V tejto úlohe to bude jednoduché, lebo každé číslo, ktoré porušuje druhú podmienku, zároveň spĺňa tú prvú.

Začnime teda počítaním čísel, v ktorých sú cifry 1 – 5 zoradené vzostupne. Na deväť pozícií v našom čísle budeme ukladať postupne cifry od 9 nižšie. Ak by sme začínali od 1, rôzne umiestnenie by nám opäť dalo rôzne počty možností pre cifru 2.

Cifru 9 môžeme umiestniť na 9 miest, cifru 8 na 8 zvyšných, 7 na 7, a 6 na 6. Na zvyšných 5 miest musíme vložiť cifry 1 až 5. Pri nich však máme predpísané jediné možné poradie. Dokopy tak dostávame $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$ čísel, v ktorých sú cifry 1 až 5 zoradené správne.

Rovnakým postupom určíme počet čísel, v ktorých sú cifry 1 – 6 zoradené vzostupne, čo budú čísla, ktoré spĺňajú prvú ale nespĺňajú druhú podmienku. Tentoraz môžeme voľne umiestniť len cifry 9, 8, 7 a to $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ spôsobmi. Toto odčítame od všetkých čísel spĺňajúcich prvú podmienku a dostaneme $3024 - 504 = 2520$ čísel, ktoré spĺňajú obe podmienky zadania.

3.2 Kráča Muž Sám

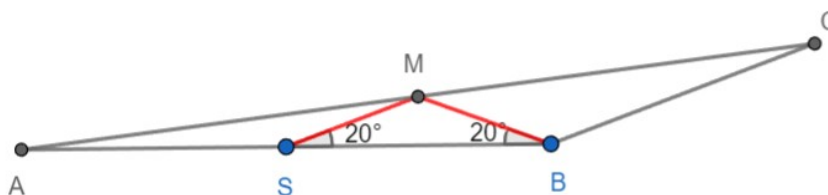
Zadanie.

„Vpred!“ ozval sa kráľov rozkaz. Obzriem sa so strachom v očiach, kráľovi však hľadím priamo do prísnej tváre. Nedá sa inak. Rozbehnem sa, priamo do náruče tomu šialencovi. On tam však stojí a čaká. Je to pasca? Spomalím, zastavím, nespúšťam ho z očí. Štít zdvihnem medzi nás.

Štít nášho hrdinu má tvar trojuholníka ABC , v ktorom je ťažnica BM dvakrát kratšia než strana BC . Vieme, že $|\sphericalangle ABM| = 20^\circ$. Určte veľkosť uhla $\sphericalangle ABC$.

Riešenie.

opravuje **Kubo Poljovka** (jakub.poljovka@trojsten.sk)



Nazvime stred strany AB ako S . Keďže MS je stredná priečka, tiež bude dvakrát kratšia než strana BC . Zo zadania vieme, že aj ťažnica BM je dvakrát kratšia ako BC . Preto strany BM a MS sú rovnako dlhé. Uhol BSM má preto veľkosť 20° . Zo súčtu uhlov v trojuholníku SBM je veľkosť uhla BMS rovná 140° . Nakoniec využijeme poznatok, že stredná priečka MS je rovnobežná so stranou BC , a preto sú uhly SMB a MBC striedavé. Uhol MBC má 140° , preto $|\sphericalangle ABC| = 160^\circ$.

3.3 Klasická Moderná Stratégia

Zadanie.

Chvíľu len tak stojíme. Ja zazerám na neho, on na mňa. Zrazu na pravom okraji zorného poľa zaznamenám pohyb. Niečo biele sa blíži k nám. Podpora. Tretí muž do bitky. Podvedome sa mi roztriasli kolená. S námahou som ich ovládol, no môjmu sokovi sa už na tvár vkradol úškrn. Majú presilu.

Na bojisku je n vojakov, každý z nich má na uniforme iné prirodzené číslo od 1 po n . Nájdite všetky hodnoty n , pre ktoré možno vojakov rozdeliť do dvoch vojsk tak, že v každom vojsku bude rovnaký súčet čísel na ich uniformách.

Riešenie.

opravuje **Matka** (martina.ganova@trojsten.sk)

Aby sme čísla od 1 po n vedeli rozdeliť na dve skupiny s rovnakým súčtom čísel musí byť súčet čísel od 1 po n párny. Súčet čísel od 1 po n vieme zistiť ako $\frac{n(n+1)}{2}$. Takže vieme, že:

$$\frac{n(n+1)}{2} = 2k \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$$

$$n(n+1) = 4k$$

Keďže n a $n+1$ sú po sebe idúce čísla, jedno z nich je určite párne a jedno nepárne. Aby ich súčin bol deliteľný 4, jedno z nich musí byť deliteľné 4, čiže n bude tvaru buď $n = 4k$ alebo $n = 4k - 1$. Teraz potrebujeme zistiť, či pre všetky takéto čísla vždy existuje možnosť rozdeliť ich na dve skupiny s rovnakým súčtom.

Ak $n = 4k$, tak vieme z radu po sebe idúcich čísel vytvoriť dvojice s rovnakým súčtom $n+1$ tak, že spárujeme 1 a n , 2 a $n-1$, atď. Napr. pre $n = 4$ by sme dostali $1 + 4 = 5$ a $2 + 3 = 5$. Keďže čísel je dokopy n a n je deliteľné 4 vieme, že týchto dvojíc bude párny počet a polovicu z nich vieme teda umiestniť do jednej skupiny a polovicu do druhej. Pre všetky $n = 4k$ teda existuje možné rozdelenie.

Ak $n = 4k - 1$, tak si môžeme predstaviť, že sa snažíme do dvoch skupín rozdeliť čísla 0 až n . Opäť z nich vytvoríme dvojice s rovnakým súčtom n , t. j. spárujeme 0 a n , 1 a $n-1$, atď. Takýchto dvojíc bude párny počet, keďže čísel je dokopy $n+1$ a $n+1$ je deliteľné 4. Napr. pre $n = 3$ by sme dostali $0 + 3 = 3$ a $1 + 2 = 3$. Opäť vieme polovicu dvojíc dať do jednej skupiny a polovicu do druhej, 0 pritom môžeme odignorovať. Pre všetky $n = 4k - 1$ teda existuje možné rozdelenie.

Ak bude počet vojakov buď $n = 4k$ alebo $n = 4k - 1$, tak ich vieme rozdeliť na dve skupiny s rovnakým súčtom. Všetky možné hodnoty n teda sú: 3, 4, 7, 8, 11, 12, ...

3.4 Každého Mučí Strach

Zadanie.

Stoja tam dvaja. Prečo neútočia? Radia sa? Bol by som radšej, keby už bolo po všetkom, toto čakanie ma akurát mučí. Možno čakajú, že utečiem bez boja, no nohy ma neposlúchajú. Nedokážem spraviť krok ani vzad, ani vbok. Inštinkt mi radí vrhnúť sa vpred, no stále sú dvaja... Niečo čierne sa mihne na naleštenom nepriateľskom štíte. Risknem pohľad za seba. Podpora! Záchrana! Prečo však nejde bližšie? Nemôže sa báť viac ako ja.

Štyria vojaci stoja vo formácii, dvaja na dvoch, kto z koho. Na helmách sa im lesknú celé (nie nutne kladné) čísla a, b, c, d . Situácia je zatiaľ vyrovnaná: $a + b + c + d = 0$. Dokážte, že aspoň jedno z čísel $|ab - cd|, |ac - bd|, |ad - bc|$ nie je súčin práve troch prvočísel.

Riešenie. opravujú **Alic** (alica.cimrakova@trojsten.sk) a **Matúš** (matus.jonastik@trojsten.sk)

Na dokázanie toho, že aspoň jedno z čísel $|ab - cd|, |ac - bd|, |ad - bc|$ nie je súčin práve troch prvočísel použijeme dôkaz sporom. Pozrieme sa teda na situáciu, ak by všetky tri čísla boli súčinom práve troch prvočísel a následne dokážeme, že takáto situácia nemôže nastať.

V prvom rade využijeme rovnicu zo zadania $a + b + c + d = 0$, z ktorej si vyjadríme a , čo následne dosadíme do zápisov troch čísel.

$$a + b + c + d = 0$$

$$a = -(b + c + d)$$

$$|ab - cd| = |-b(b + c + d) - cd| = |-(b^2 + bc + bd + cd)| = |-(b + d)(b + c)|$$

Nakoľko pri absolútnej hodnote platí, že $|-x| = |x|$, vieme si náš výraz zapísať nasledovne:

$$|(b + d)(b + c)| \tag{4.1}$$

Analogicky si vieme upraviť aj $|ac - bd|$, $|ad - bc|$, z ktorých postupne dostaneme nasledovné výrazy:

$$|(c + b)(c + d)| \tag{4.2}$$

$$|(d + b)(d + c)| \tag{4.3}$$

Týmto sme si každé číslo napísali ako súčin dvoch zátvoriek. Nakoľko používame dôkaz sporom, poďme sa pozrieť na to, ako spraviť zo všetkých troch čísel súčiny troch prvočísel.

Každé celé číslo (takže aj súčty v zátvorkách) má v prvočíselnom rozklade aspoň jedno prvočíslo, alebo je rovné ± 1 , alebo je rovné 0. Avšak ak by nejaká zo zátvoriek bola rovná nule, celé číslo by bolo rovné nule. V tomto prípade neplatí, že je súčinom práve troch prvočísel a máme spor. Preto máme iba dve možnosti, ako z našich čísel spraviť súčiny troch prvočísel. Prvý je, že jedna zátvorka bude súčinom práve dvoch prvočísel a druhá zátvorka bude rovná prvočíslu. Druhý je, že jedna zátvorka bude rovná ± 1 a druhá bude súčinom práve troch prvočísel. Najprv si rozoberme prvú možnosť.

Bez ujmy na všeobecnosti si vezmeme číslo (4.1): $(b + d)(b + c)$ a znova, bez ujmy na všeobecnosti bude $(b + d)$ súčinom dvoch prvočísel p a q , a $(b + c)$ bude rovné prvočíslu r . Toto nám ovplyvňuje číslo (4.3), keďže aj to je deliteľné $(b + d)$ a tým pádom má v prvočíselnom rozklade prvočísla p a q . Aby platilo, že aj číslo (4.3) je súčinom práve troch prvočísel, $(d + c)$ bude rovné prvočíslu s . Teraz si vieme prepísať číslo (4.2) ako súčin prvočísel $r * s$. Tu nám nastáva spor, nakoľko číslo (4.2) je súčinom len dvoch prvočísel.

Teraz si rozoberme druhú možnosť. Bez ujmy na všeobecnosti si znova vezmeme číslo (4.1): $(b + d)(b + c)$ a znova, bez ujmy na všeobecnosti bude $(b + d)$ súčinom troch prvočísel p , q a r a $(b + c)$ bude rovné číslu ± 1 . Toto nám znova ovplyvňuje číslo (4.3), keďže aj to je deliteľné $(b + d)$ a tým pádom má v prvočíselnom rozklade prvočísla p , q a r . Aby platilo, že aj číslo (4.3) je súčinom práve troch prvočísel, $(d + c)$ bude rovné číslu 1. Teraz si taktiež vieme prepísať číslo (4.2) ako súčin čísel $\pm 1 \cdot (\pm 1)$. Tu nám nastáva spor, nakoľko číslo (4.2) je rovné 1 a nie je súčinom troch prvočísel.

Nakoľko sme vo všetkých možnostiach prišli k sporu, dokázali sme, že aspoň jedno číslo vždy nebude súčinom práve troch prvočísel.

Iné riešenia: V tomto vzorovom riešení sme vám ukázali riešenie, ktoré je najmenej náročné, avšak aj najmenej elegantné. Úloha sa dala vyriešiť kratšie a možno aj krajšie a my Vám pár riešení chceme ukázať.

Jednou možnosťou bolo čísla (4.1), (4.2) a (4.3) navzájom vynásobiť a uvedomiť si, že ich súčin $((b + c)(b + d)(c + d))^2$ by mal byť súčinom 9 prvočísel, aby platil predpoklad, že každé z čísel (4.1), (4.2) a (4.3) je súčinom

3 prvočísel. Keďže tento súčin je ale aj druhou mocninou prirodzeného čísla, dostávame spor, nakoľko druhá mocnina prirodzeného čísla musí byť súčinom párneho počtu prvočísel.

Druhou možnosťou by bolo označiť si premennými x, y, z počty, koľkých prvočísel sú zátvorky $(b+c), (b+d), (c+d)$ súčinní. Potom musí platiť nasledovná sústava rovníc, aby platil predpoklad, že každé z čísel (4.1), (4.2) a (4.3) je súčinom 3 prvočísel:

$$x + y = 3$$

$$y + z = 3$$

$$x + z = 3$$

Pomerne jednoducho vieme prísť na to, že jediným riešením tejto sústavy rovníc, je ak $x = y = z = 1,5$. Nakoľko žiadne číslo nemôže byť súčinom 1,5 prvočísel, dostávame spor.

3.5 Klusajú Mojím Smerom

Zadanie.

S podporou za chrptom po pravici sa necítim o nič istejšie, ale aspoň to odrádza súpera od útoku. Nepriateľ však neplánuje vyčkávať. Trúbky, po nich rachot. V dialke pohyb mohutných tiel. Jazda. Zatiaľ sa len presúva a neútočí, no i tak mi je mdlo.

Medzi každými dvoma údermi kopýt ubehne nejaký časový úsek o dĺžke danej kladnými reálnymi číslami a_1, a_2, a_3, \dots . Tie tvoria postupnosť takú, že $a_1 = 1$ a $a_{n+1}^2 + a_{n+1} = a_n$. Ukážte, že potom pre každé kladné celé n platí

$$a_n \geq \frac{1}{n}.$$

Riešenie.

opravuje **Petr Velyčko** (petr.velycko@trojsten.sk)

Dokazovat budeme indukciou. V prípade $n = 1$ snadným výpočtom dostávame

$$a_1 = 1 \geq \frac{1}{1} = \frac{1}{n}.$$

Tím je báza indukcie hotova.

Dále předpokládejme, že pro $n = k \geq 1$ tvrzení platí. Odvodíme, že platí i pro $n = k + 1$. Pomocí rekurentního vztahu ze zadání můžeme psát

$$a_{k+1}^2 + a_{k+1} = a_k \stackrel{IP}{\geq} \frac{1}{k}.$$

Tuto nerovnosť se budeme ekvivalentnými úpravami snažiť dostať do tvaru, ktorý nám umožní niečo říct o a_{k+1} .

$$a_{k+1}(a_{k+1} + 1) \geq \frac{1}{k},$$

$$\frac{1}{a_{k+1}(a_{k+1} + 1)} \leq k,$$

$$\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_{k+1} + 1} \leq k,$$

$$\frac{1}{a_{k+1}} \leq k + \frac{1}{a_{k+1} + 1}.$$

Zde si musíme všimnúť toho, že $\frac{1}{a_{k+1}+1} < 1$ (jmenovateľ je alespoň jedna), proto pravou stranu môžeme shora odhadnúť výrazom

$$\frac{1}{a_{k+1}} \leq k + \frac{1}{a_{k+1} + 1} \leq k + 1.$$

Poslední krok je již čtenáři jistě povědomý, umocníme nerovnosť na -1 (všetchna čísla jsou kladná, tedy úprava je ekvivalentní), dostáváme kýženou nerovnosť

$$a_{k+1} \geq \frac{1}{k+1},$$

čož je přesně to, co jsme chtěli dokázat.

3.6 Konečne Maširujeme Spolu

Zadanie.

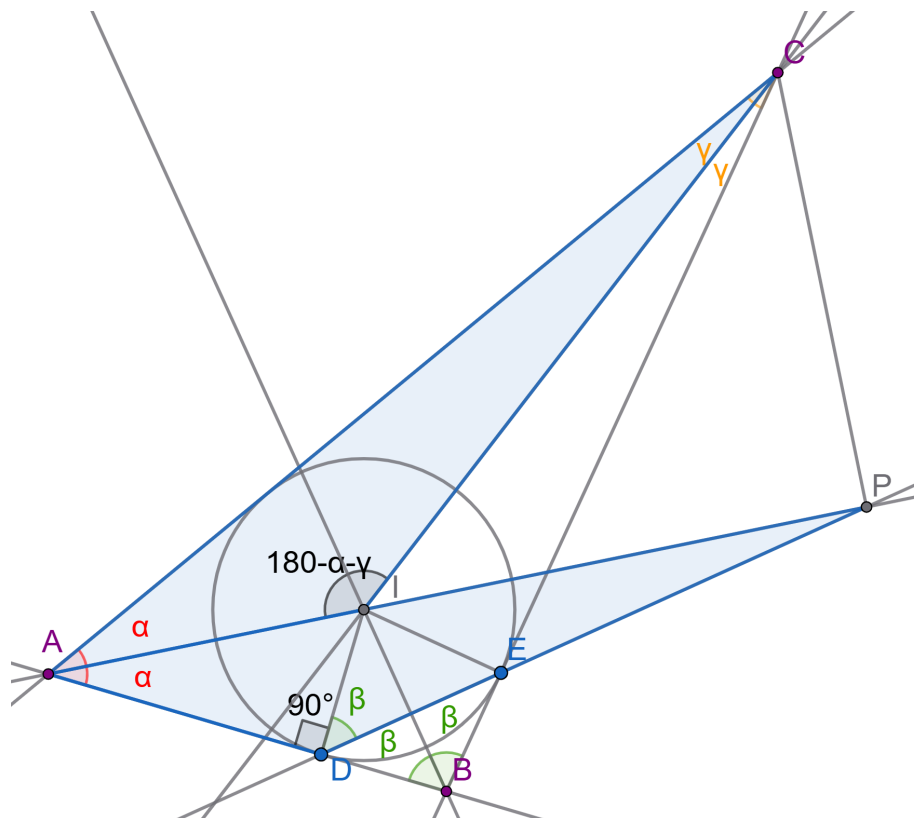
Kopytá dunia. Už však nie som vo svojom strachu sám. Prišiel. Rovnako rozklepaný ako ja. Hodím na neho súcitný pohľad. Trasia sa, oči upreté na šík pred nami. Na moment sa naše pohľady stretnú. Jeho oči sú plné zúfalého strachu. Tušíme, že sa blíži náš osud. Srdce mi búši, všetko vnímam spomalene, čas sa vlečie.

Aj hrdinov kolega má štít v tvare trojuholníka ABC, v ktorom $|AB| < |AC|$. V tomto je však vpísaná kružnica, ktorá sa dotýka strany AB a strany BC postupne v bodoch D a E. Nech I je stred vpísanej kružnice trojuholníka ABC a P je priesečník priamok AI a DE. Dokážte, že priamky AP a PC sú na seba kolmé.

Riešenie.

opravuje **Mati** (matus.zelko@trojsten.sk)

Stred vpísanej kružnice leží na osi uhlov. Tie si tiež zaznačme do obrázku. Najprv si uvedomme, že štvoruholník DBEI je tetivový, uhly $\sphericalangle IDB$ aj $\sphericalangle IEB$ sú oba pravé, keďže ide o body dotyku ku vpísanej kružnici. Označme si uhol pri vrchole B ako 2β . Z obvodových uhlov v štvoruholníku DBEI dostávame, že $|\sphericalangle IDE| = \beta$ a teda $|\sphericalangle ADE| = \beta + 90^\circ$.



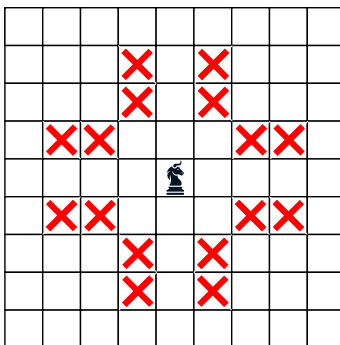
Označme si uhol pri strane A ako 2α a pri strane C ako 2γ . Potom zo súčtu uhlov v trojuholníku ABC vidíme, že $\alpha + \beta + \gamma = \frac{180^\circ}{2}$. Ďalej $|\sphericalangle APD| = 180^\circ - \alpha - \beta - 90^\circ = \gamma$. Vďaka vete uu teraz vidíme, že trojuholníky AIC a ADP sú podobné, takže pomer medzi prislúchajúcimi stranami je rovnaký a platí, že $\frac{|AC|}{|AP|} = \frac{|AI|}{|AD|}$. Na ten istý pomer sa dá pozrieť aj z pohľadu trojuholníkov ADI a APC . Pri nich vďaka vete sus vyplýva, že sú tiež podobné (občas sa hovorí, že podobnosť chodí po dvoch). Nakoniec uhol pri vrchole D je pravý, takže aj uhol pri vrchole P je pravý, čo sme chceli dokázať.

3.7 Kolegu Môjho Smrť

Zadanie.

Blíži sa k nám prvý jazdec. Zrazu je kôň vo vzduchu. Na ňom jazdec v mohutnom brnení zvierajú kopiju. Nevie, kedy pristál, nevie, kedy bodol, no kopija zrazu prechádza mojím spolubojovníkom. Všade je krv. Ani nekričal...

Pokiaľ na človeka beží kôň alebo ľubovoľné iné štvornohé zviera, tak najlepšia stratégia je uhnúť sa mu. To vedú aj španielski toreadori. Vedia, že býk sa v jednom ťahu posunie v jednom smere (zvisle alebo vodorovne) o 1 políčko a v kolmom smere o 2 alebo 3 políčka. Ohrozuje teda políčka ako na obrázku. Najviac koľko býkov možno umiestniť na šachovnicu 8×8 tak, aby sa žiadne dva neohrozovali?

**Riešenie.**opravuje **Mišo M.** (michal.molnar@trojsten.sk)

V úlohách s otázkou „najviac koľko“, potrebujeme vždy ukázať, že našu hodnotu vieme dosiahnuť, a zároveň vysvetliť, prečo sa nedá dosiahnuť viac. V riešení by nám teda stačili dva obrázky – rozostavenie býkov a rozdelenie šachovnice do zón, v ktorých v každej môže byť len nejaký obmedzený počet figúrok.¹ Keďže takéto riešenie spravidla vedie k otázkam typu „Ako som mal/-a na toto prísť?“ budeme vo vzoráku trochu obsérnejší. Stručné riešenie (ktoré samo o sebe postačuje na plný počet bodov) si môžete prečítať na konci.

Ako som mal/-a na toto prísť?

Začnime tým, že si všimneme, že figúrka býka je vlastne rozšírením figúrky jazdca z obyčajného šachu. Kým jazdec skáče o $1 + 2$ políčka, býk má navyše možnosť skočiť aj o $1 + 3$ políčka. O jazdcovi je známe, že pri skoku mení farbu políčka, na ktorom stojí. T. j. pri bežnom ofarbení šachovnice ho jeho ťah zavedie buď z čierneho políčka na biele, alebo z bieleho na čierne. Určite tak vieme umiestniť na šachovnicu 32 jazdcov, napr. na biele políčka. Ohrozovať sa nebudú, lebo každý z nich vie skočiť len na čierne políčko.

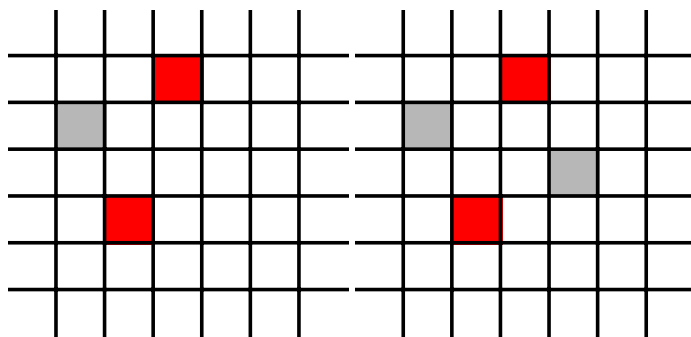
Pri býkovi však o túto možnosť prichádzame kvôli skoku o $1 + 3$ políčka. Oplatí sa nám teda viac zamyslieť nad tým, aké platia pre jazdca obmedzenia, a čo sa stane, keď k nim pridáme toto obmedzenie navyše.

Keďže jazdcov vieme umiestniť na všetky biele políčka, čím ohrozíme všetky čierne políčka, je pre nás výhodné vytvoriť dvojice, vždy biele a čierne políčko, ktoré sa navzájom jazdcom ohrozujú. Keďže každé políčko bude mať svoj „zakázaný pár“, máme istotu, že pri každom umiestnenom jazdcovi zároveň škrtne jedno prázdne políčko. Neumiestnime teda viac ako $64 : 2 = 32$ jazdcov. Samozrejme, jazdci ohrozujú aj políčka mimo danej dvojice, takže toto nám ešte nezaručuje, že tých 32 jazdcov umiestniť dokážeme – dostávame len hornú hranicu. Preto sa v takýchto úlohách zvykne vyhovujúce rozmiestnenie skonštruovať zvlášť.

1	5	2	6
2	6	1	5
4	7	3	8
3	8	4	7

¹A samozrejme nejaký krátky popis, ktorý nám povie, prečo je ten počet obmedzený zrovna takto.

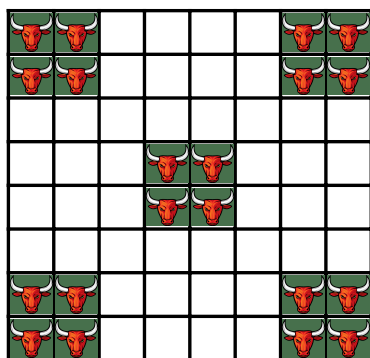
Ako nám to pomôže s býkmi? Keďže býci ohrozujú všetky políčka, čo aj jazdci (a nejaké navyše), tak tento odhad na 32 figúrok platí aj pre nich. Experimentálne však pridáme na to, že sa k tejto hranici dostať nevieme. Potrebujeme teda nejak využiť tie skoky o 1 + 3 políčka, ktoré býka od jazdca odlišujú, aby sme zväčšili čierno-biele dvojice na nejaké väčšie „zóny“ navzájom sa ohrozujúcich políček.



Dôvod, prečo jazdec nemôže mať takúto zónu väčšiu ako 2 políčka, spočíva v tom, že už v každej trojici políček musia mať (aspoň) dve z nich rovnakú farbu. Jazdec teda nedokáže z jedného takéhoto políčka ohroziť to druhé. Býkovým ťahom 1 + 3 to však ide. Stačí nám teda k tejto dvojici nájsť to tretie políčko opačnej farby (viď obrázok vľavo), z ktorého by ich jazdec dokázal ohroziť. Pri hľadaní si však všimneme, že takéto políčka sú hneď dve (viď obrázok vpravo), a navyše sú od seba navzájom vzdialené o 1 + 3 políčka, takže sa medzi nimi dokáže presunúť býk.

Našli sme teda 4-políčkovú zónu, do ktorej keď umiestnime býka na ľubovoľné políčko, máme istotu, že ohrozí celý zvyšok zóny. Takáto zóna má však pomerne nepraktický tvar. Do šachovnice sa ich nezmestí $64 : 4 = 16$, ale len 12, zvyšné políčka tak budeme musieť rozdeliť na 8 zakázaných dvojíc tak, ako sme to urobili u jazdca. Jedno takéto delenie je na obrázku nižšie, vpravo. Zároveň do každej z 20 zón vieme umiestniť býka tak, aby sa neohrozovali (obrázok nižšie, vľavo), takže hľadané maximum je skutočne 20.

Výsledné riešenie



13	2	1	14	17	8	7	18
1	14	13	2	7	18	17	8
2	4	3	1	8	10	9	7
3	1	2	4	9	7	8	10
4	6	5	3	10	12	11	9
5	3	4	6	11	9	10	12
6	16	15	5	12	20	19	11
15	5	6	16	19	11	12	20

Na obrázku vľavo vidíme 20 býkov na šachovnici 8×8 , ktorý sa navzájom neohrozujú. Na obrázku vpravo vidíme šachovnicu rozdelenú na 20 zón, políčka každej zóny sú označené jedným číslom od 1 po 20. Zároveň si môžeme

všimnúť, že každá zóna od 1 po 12 obsahuje po 4 políčka a má tvar buď ako zóna 1 (modrá) alebo preklopený (napr. zóna 2, červená).

Všimnime si, že keď umiestníme býka do jednej takejto zóny (1 – 12), bude ohrozovať všetky ostatné políčka v nej. Dve z nich budú od býka vzdialené 1 + 2 políčka, posledné políčko zóny bude vzdialené 1 + 3 políčka. Podobne je to aj so zónami 13 – 20. Tie obsahujú len dvojicu políčok, ktoré sú od seba vzdialené 1 + 2 políčka, takže ak býka umiestnime na jedno z nich, to druhé bude musieť zostať prázdne. Dokopy tak môže byť v každej z 20 zón najviac 1 býk, takže na šachovnicu sa zmestí spolu najviac 20 býkov.

3.8 Kde Mám Skrýšu?

Zadanie.

Chcem ujsť, túžim byť preč, no nemôžem, nohy mám ako prikované. Už ma takmer obklúčili... Utekať pred jazdcom na koni nemá zmysel, posily nedôjdu včas. Mám však čakať na nepriateľov úder?

Vhodné riešenie nemusí vždy existovať. Rozhodnite, či existuje nekonečne veľa nesúdeliteľných dvojíc kladných celých čísel m, n , pre ktoré má rovnica $(x + m)^3 = nx$ práve 3 rôzne celočíselné riešenia pre x .

Riešenie.

opravuje M&M (marek.murin@trojsten.sk)

Pri riešení je vhodné sa zamyslieť, či nevieme náhodou previesť kubickú rovnicu na inú kubickú rovnicu, ktorá má rovnaké vlastnosti, ale je o nejaký kúsok jednoduchšia na analyzovanie. Položme

$$y = x + m, \quad \text{teda} \quad x = y - m.$$

Rovnicu prepíšeme na

$$(y - m + m)^3 = n(y - m)$$

$$y^3 - ny + nm = 0.$$

Tá má naďalej tri rôzne celočíselné korene, nech sú to y_1, y_2, y_3 . Keďže pri y^2 je nulový koeficient, podľa Vietových vzťahov platí

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0, \quad \text{teda} \quad y_3 = -(y_1 + y_2).$$

Z Vietových vzťahov ďalej dostaneme

$$n = -(y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1) = y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2 \quad \text{a} \quad nm = -y_1 y_2 y_3 = y_1 y_2 (y_1 + y_2).$$

Teda

$$m = \frac{y_1 y_2 (y_1 + y_2)}{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}. \quad (8.1)$$

Pri analýze takýchto celočíselných výrazov je vhodné vyňať spoločného deliteľa. Teraz nech $d = \gcd(y_1, y_2)$, teda $y_1 = du$, $y_2 = dv$, kde $\gcd(u, v) = 1$. Potom sa z (8.1) stane

$$m = d \frac{uv(u + v)}{u^2 + uv + v^2}. \quad (8.2)$$

Ukážeme, že menovateľ (8.2) musí deliť d pretože $uv(u+v)$ je nesúdeliteľný.

Lemma 8.1. Nech u, v sú nesúdeliteľné čísla potom platí

$$\gcd(u^2 + uv + v^2, uv(u+v)) = 1.$$

Dôkaz: Keďže u a v sú nesúdeliteľné zjavne platí:

$$\gcd(u^2 + uv + v^2, u) = 1 \quad \text{a} \quad \gcd(u^2 + uv + v^2, v) = 1.$$

Preto stačí ukázať, že aj

$$\gcd(u^2 + uv + v^2, (u+v)) = 1.$$

Nech p je prvočíslo deliace $u+v$, potom $u \equiv -v \pmod{p}$. Potom

$$u^2 + uv + v^2 \equiv u^2 - u^2 + u^2 \equiv u^2 \pmod{p}.$$

Keďže $p \mid u^2$ tak aj $p \mid u$ a spolu s $p \mid u+v$ vyplýva, že $p \mid v$, čo je spor nesúdeliteľnosťou u, v . \square

Podľa Lemmy 8.1. je zlomok v (8.2) celé číslo prave vtedy keď, $u^2 + uv + v^2 \mid d$. Nech teda $d = k(u^2 + uv + v^2)$, potom

$$m = k uv(u+v), \quad n = d^2(u^2 + uv + v^2) = k^2(u^2 + uv + v^2)^3.$$

Keďže k delí aj m aj n ale tie sú nesúdeliteľné zo zadania tak musí $k = 1$. Dostávame teda

$$m = uv(u+v), \quad n = (u^2 + uv + v^2)^3.$$

Je potrebné ukázať, že m a n teraz tvoria nekonečne veľa rôznych dvojíc vzhľadom na nesúdeliteľné u a v . Stačí napríklad zafixovať $u = 1$ a dostaneme

$$m = v(1+v), \quad n = (1+v+v^2)^3.$$

Pričom obe čísla zjavne nadobúdajú nekonečne veľa hodnôt vzhľadom na v .

Nakoniec ešte priamym dosadením overíme, že čísla

$$x_1 = u^3, \quad x_2 = v^3, \quad x_3 = -(u+v)^3 \quad \text{resp.}$$

$$y_1 = u(u^2 + uv + v^2), \quad y_2 = v(u^2 + uv + v^2), \quad y_3 = -(u+v)(u^2 + uv + v^2)$$

sú riešeniami rovnice $(x+m)^3 = nx$, resp. $y^3 - ny + nm = 0$.

- pre koreň $x_1 = u^3$ platí $(u^3 + uv(u+v))^3 = (u^2 + uv + v^2)^3 u^3$,
- pre koreň $x_2 = v^3$ platí $(v^3 + uv(u+v))^3 = (u^2 + uv + v^2)^3 v^3$,
- pre koreň $x_3 = -(u+v)^3$ platí $(-(u+v)^3 + uv(u+v))^3 = (u^2 + uv + v^2)^3 \cdot -(u+v)^3$,
- pre koreň $y_1 = u(u^2 + uv + v^2)$ platí $(u(u^2 + uv + v^2))^3 - (u^2 + uv + v^2)^3 u(u^2 + uv + v^2) + (u^2 + uv + v^2)^3 uv(u+v) = u^3 - u(u^2 + uv + v^2) + uv(u+v) = 0$,
- pre koreň $y_2 = v(u^2 + uv + v^2)$ platí $(v(u^2 + uv + v^2))^3 - (u^2 + uv + v^2)^3 v(u^2 + uv + v^2) + (u^2 + uv + v^2)^3 uv(u+v) = v^3 - v(u^2 + uv + v^2) + uv(u+v) = 0$,

- pre koreň $y_3 = -(u + v)(u^2 + uv + v^2)$ platí
 $(-(u + v)(u^2 + uv + v^2))^3 - (u^2 + uv + v^2)^3 (-(u + v)(u^2 + uv + v^2)) + (u^2 + uv + v^2)^3 uv(u + v) = -(u + v)^2 + (u^2 + uv + v^2) + uv = 0.$

Korene sú navzájom rôzne, takže hotovo.

Bodovanie úlohy

- (B1) Za nájdenie nejakého správneho riešenia (1p)
- (B2) Za overenie, že nájdené n , m , x_1 , x_2 a x_3 v závislosti od čísel u a v sú riešením pôvodnej rovnice. Totiž je dôležité po sebe skontrolovať riešenie. (1p)
- (B3) Za overenie, že riešenia x_1 , x_2 a x_3 sú rôzne. (1p)
- (B4) Za zdôvodnenie, že existuje nekonečne veľa **rôznych** dvojíc m a n . Za zhodnotenie, že ich je nekonečno ale bez zmienky o rôznosti body neboli udelené. Je to preto, že m , n v závislosti od u a v by mohli byť cyklické alebo konštantné alebo inak ohraničené. (1p)
- (B5) Za ukázanie, že čísla m a n sú nesúdeliteľné. (3p)

3.9 Krvilačne Mečom Sekám

Zadanie.

Nemám inú možnosť, len vrhnúť sa vpred. Šikmo medzi toho šialenca a jazdca, priamo na druhého prichodzieho. Nepozerám mu do tváre, len sa zaženiem mečom. Nemám inú možnosť. Buďto skoná on, alebo ja. Nádej mi vliala do žíl silu, prekvapenie oslabilo súpera. Potkýna sa a ja naposledy sekám.

Každý vojak si musí plniť svoju funkciu. Nájdite všetky funkcie $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ také, že pre všetky kladné celé čísla m , n platí $f^m(n) + f(mn) = f(m)f(n)$, kde $f^m(n)$ definujeme ako $f^m(n) = \underbrace{f(f(\dots f(n)\dots))}_{m\text{-krát}}$.

Riešenie. opravujú **Denys** (denys.andrukhovskiy@trojsten.sk) a **Dominik** (dominik.rigas@trojsten.sk)

Ako každú funkcionálku, začneme dosadzovaním konkrétnych hodnôt. Za prvé skúsime za (m, n) dosadiť $(1, 1)$:

$$f(1) + f(1) = f(1)f(1).$$

Keďže f je všade nenulová, tak z predchádzajúcej rovnice $f(1) = 2$.

Teraz skúsime za (m, n) dosadiť $(m, 1)$:

$$f^m(1) + f(m) = f(m)f(1).$$

Keďže vieme, že $f(1) = 2$, prepíšeme to ako:

$$f^m(1) = f(m). \tag{9.1}$$

Ak by sme aplikovali f na predchádzajúcu rovnosť, dostaneme:

$$f^{m+1}(1) = f(f^m(1)) = f(f(m)).$$

Ale podľa 9.1 máme aj $f^{m+1}(1) = f(m+1)$. Spolu s predchádzajúcou rovnicou, dostaneme:

$$f(m+1) = f(f(m)). \quad (9.2)$$

Teraz prichádzajú do úvahy dve možnosti. Ak f je injektívna, tak z 9.2 máme $m+1 = f(m)$. Keďže úpravy neboli ekvivalentné, treba ešte overiť riešenie. Všimneme si, že v tomto prípade opakovaným použitím 9.1 dostaneme $f^n(n) = f^n(f^n(1)) = f^{m+n}(1) = m+n$, a dosadíme do zadania:

$$f^n(n) + f(mn) = f(m)f(n),$$

$$m+n + (mn+1) = (m+1)(n+1),$$

$$mn + m + n + 1 = mn + m + n + 1.$$

Sedí. Teraz nájdeme všetky neinjektívne riešenia. Ak f je neinjektívna, tak existujú také kladné celé a, b , že $a < b$, a $f(a) = f(b)$.

Potom $f(f(a)) = f(f(b))$. Spolu s 9.2 dostaneme $f(a+1) = f(b+1)$. Všeobecne, nech $k > 0$ je kladné celé, podľa 9.2 potom dostaneme:

$$f(a+k) = f^{a+k}(1) = f^k(f^a(1)) = f^k(f(a)) = f^k(f(b)) = f^k(f^b(1)) = f^{b+k}(1) = f(b+k).$$

Takže, funkcia f je od istého bodu periodická s periódou $b-a$. Konkrétne teda pre všetky $x \geq a$ platí $f(x) = f(x + (b-a))$. Všimneme si, že tento fakt nám umožní hovoriť o maximálnej hodnote funkcie f . To platí, keďže obor hodnôt funkcie f je množina $\{f(1), f(2), \dots, f(a), \dots, f(b)\}$, čo je konečná množina, a konečná podmnožina čísel má vždy maximum.

Takže, nech M je maximum funkcie f , ktorý funkcia nadobúda v r , teda $f(r) = M$. Dosadíme do zadania za (m, n) dvojicu (r, r) :

$$2M \geq f(r) + f(rr) = f(r)f(r) = M^2,$$

keďže $M \geq f(r)$, $M \geq f(rr)$, lebo M je maximum. S predchádzajúcej nerovnosti dostaneme $2 \geq M$ (keďže M je kladné).

Na dokončenie riešenia si treba rozmyslieť, či môže f nadobúdať hodnotu 1 (iné nemôže, lebo $M \leq 2$). Ak by existovalo s také, že $f(s) = 1$, tak dosadením (s, s) do zadania dostaneme $f^s(s) + f(s^2) = f(s)f(s) = 1$, čo je spor, keďže 1 nemôže byť súčtom dvoch kladných celých čísel.

Takže f nenadobúda hodnotu 1, ale zároveň maximálna hodnota f je nanajvyšš 2. Takže, $f(n) = 2$. Overíme toto riešenie:

$$f^n(n) + f(mn) = f(m)f(n),$$

$$2 + 2 = 2 \cdot 2,$$

$$4 = 4.$$

Takže sme našli všetky možné riešenia: $f(n) = n+1$ a $f(n) = 2$.

Nech priamka CD pretne priamku p v bode E' . Zo symetrie platí $|AE| = |AE'|$ a teda E, E' sú stredovo súmerné podľa A . Zobrazieme si v stredovej súmernosti J podľa A . Dokážeme, že tento bod J' leží na kružnici opísanej $\triangle EAI$. Keďže J' je obraz J a E je obraz E' v stredovej súmernosti podľa A , tak sú zhodné $\triangle E'JA \triangle E'JA$. Tým pádom pre uhly platí $|\sphericalangle E'JA| = |\sphericalangle E'JA|$. Keďže E', J, C ležia na jednej priamke, tak platí $|\sphericalangle E'JA| = 180^\circ - |\sphericalangle AJC|$. Ďalej z tetivovosti $AJCI$ platí $|\sphericalangle AJC| = 180^\circ - |\sphericalangle AIC| = |\sphericalangle AIE|$. Takže sme dokázali $|\sphericalangle AJ'E| = 180^\circ - |\sphericalangle AIE|$ a teda $AIEJ'$ je tetivový štvoruholník. Teraz ukážeme, že $\triangle JJ'I$ a $\triangle BAI$ sú špirálovito podobné. Z tetivovosti $AJBI$ platí $|\sphericalangle AJI| = |\sphericalangle ABI|$. Ďalej platí z rovnobežnosti $p \parallel BC$, že $|\sphericalangle AEI| = |\sphericalangle AEC| = 180^\circ - |\sphericalangle ECB| = 180^\circ - |\sphericalangle ICB|$. Pričom sme využívali fakt, že E, I, C leží na priamke. Ďalej iba znovu preniesieme po kružnici $|\sphericalangle BCI| = 180^\circ - |\sphericalangle BAI|$. Takže z toho vyplýva, že $|\sphericalangle BAI| = |\sphericalangle AEI| = |\sphericalangle AJ'I| = |\sphericalangle JJ'I|$. Pričom predposledná rovnosť plynie z tetivovosti $AIEJ'$ a posledná z kolinarity JAJ' . Takže podľa vety uu dostávame špirálovitú podobnosť $\triangle JJ'I \sim \triangle BAI$. Zo špirálovitej podobnosti pre stredy A (strany JJ') a M (strany AB) vyplýva $|\sphericalangle J'AI| = |\sphericalangle AMI|$.

Ďalej ukážeme $|\sphericalangle JMA| = |\sphericalangle J'AI|$. $|\sphericalangle JMA| = 180^\circ - |\sphericalangle JMB|$. Zo špirálovitej podobnosti zároveň vyplýva $|\sphericalangle BIM| = |\sphericalangle JIA| \implies |\sphericalangle BIJ| = |\sphericalangle MIA|$. Takže podľa vety uu sú podobné trojuholníky $\triangle BIJ \sim \triangle MIA$. Pre pomery ich strán platí:

$$\frac{|MA|}{|AI|} = \frac{|BJ|}{|JI|} \implies \frac{|BJ|}{|MA|} = \frac{|BJ|}{|BM|} = \frac{|JI|}{|AI|}. \quad (10.1)$$

Z tetivovosti $AJBI$ vyplýva $|\sphericalangle JBA| = |\sphericalangle JIA|$. Takže podľa vety sus sú podobné trojuholníky $\triangle JMB \sim \triangle JAI$. Takže pre uhly $|\sphericalangle JMA| = 180^\circ - |\sphericalangle JMB| = 180^\circ - |\sphericalangle JAI| = |\sphericalangle J'AI|$. Navyše platí aj $|\sphericalangle JMA| = |\sphericalangle J'AI| = |\sphericalangle JCI|$. Pripomeňme, že N je päta výšky z A a O je stred k . Teraz už vieme ľahko ukázať tetivosť $JMOI$. Všimnime si, že z vety o obvodovom a stredovom uhle platí $|\sphericalangle JOI| = 2|\sphericalangle JCI|$. Takže $|\sphericalangle JMI| = |\sphericalangle JMA| + |\sphericalangle AMI| = 2|\sphericalangle JCI| = |\sphericalangle JOI|$ a teda je $JMOI$ tetivový.

Teraz prejdeme do druhej časti riešenia. V rovnoľahlosti so stredom B a koeficientom $1/2$ je k zobrazené na kružnicu opísanú $BNOM$ (označme k'). Tieto dve kružnice zdieľajú dotyčnicu v bode B . Označme X priesečník dotyčníc v bode B a A (priamky p). Triviálne platí, že os BA prechádza X . Bod X má rovnakú mocnosť ku k a k' . Zároveň má rovnakú mocnosť ku kružnici k' a kružnici opísanej $MOIJ$, lebo leží na ich chordále MO . Takže X je potenčný stred (má rovnakú mocnosť ku všetkým trom kružniciam). A teda leží aj na chordále kružnice opísanej $MOIJ$ a k , čo je priamka IJ , čo sme mali dokázať.

