



Zadania 3. kola letnej časti

Termín odoslania 20. apríl 2026

V prípade otázok k zadaniam nás neváhajte kontaktovať na kms@kms.sk.

3.1 Kráľov Majestátny Šík

level L1, max. 7 bodov

Stojím. Stojím a po mojom boku sú moji bratia, pripravení položiť život proti cudzincom odetým v bielej zbroji, ja však pripravený nie som. Desivý zástup s vytiahnutými čepeľami, múr, o ktorý sa rozbijú naše šíky. Nie, na to myslieť nesmiem. Stojím tak ako moji bratia aj nepriatelia. Až na jedného. Šialenec. Rúti sa priamo oproti mne a jeho krivý pohľad mi trasie kolenami, ale ja stále stojím.

Bojový šík číslo 916238457 dnes poctili svojou prítomnosťou aj kráľ s kráľovnou, ktorí stoja za naším hrdinom. Šík 916238457 si vybrali preto, lebo je príkladom 9-ciferného čísla, ktoré obsahuje každú cifru od 1 po 9 práve raz, a navyše má vlastnosť, že každá z cifier od 1 po 5 sa v ňom vyskytuje vo vzostupnom poradí, no cifry od 1 po 6 už vzostupne zoradené nie sú. Koľko takýchto čísel existuje?

3.2 Kráča Muž Sám

levely L1 až L2, max. 7 bodov

„Vpred!“ ozval sa kráľov rozkaz. Obzriem sa so strachom v očiach, kráľovi však hľadím priamo do prísnej tváre. Nedá sa inak. Rozbehnem sa, priamo do náruče tomu šialencovi. On tam však stojí a čaká. Je to pasca? Spomalím, zastavím, nespúšťam ho z očí. Štít zdvihnem medzi nás.

Štít nášho hrdinu má tvar trojuholníka ABC , v ktorom je ťažnica BM dvakrát kratšia než strana BC . Vieme, že $|\sphericalangle ABM| = 20^\circ$. Určte veľkosť uhla $\sphericalangle ABC$.

3.3 Klasická Moderná Stratégia

levely L1 až L3, max. 7 bodov

Chvíľu len tak stojíme. Ja zazerám na neho, on na mňa. Zrazu na pravom okraji zorného poľa zaznamenám pohyb. Niečo biele sa blíži k nám. Podpora. Tretí muž do bitky. Podvedome sa mi roztriasli kolená. S námahou som ich ovládol, no môjmu sokovi sa už na tvár vkradol úškrn. Majú presilu.

Na bojisku je n vojakov, každý z nich má na uniforme iné prirodzené číslo od 1 po n . Nájdite všetky hodnoty n , pre ktoré možno vojakov rozdeliť do dvoch vojsk tak, že v každom vojsku bude rovnaký súčet čísel na ich uniformách.

3.4 Každého Mučí Strach

levely L1 až L4, max. 7 bodov

Stoja tam dvaja. Prečo neútočia? Radia sa? Bol by som radšej, keby už bolo po všetkom, toto čakanie ma akurát mučí. Možno čakajú, že utečiem bez boja, no nohy ma neposlúchajú. Nedokážem spraviť krok ani vzad, ani vbok. Inštinkt mi radí vrhnúť sa vpred, no stále sú dvaja... Niečo čierne sa mihne na naleštenom nepriateľskom štíte. Risknem pohľad za seba. Podpora! Záchrana! Prečo však nejde bližšie? Nemôže sa báť viac ako ja.

Štyria vojaci stoja vo formácii, dvaja na dvoch, kto z koho. Na helmách sa im lesknú celé (nie nutne kladné) čísla a, b, c, d . Situácia je zatiaľ vyrovnaná: $a + b + c + d = 0$. Dokážte, že aspoň jedno z čísiel $|ab - cd|, |ac - bd|, |ad - bc|$ nie je súčin práve troch prvočísel.

3.5 Klusajú Mojím Smerom

levely L1 až L5, max. 7 bodov

S podporou za chrbtom po pravici sa necítim o nič istejšie, ale aspoň to odrádza súpera od útoku. Nepriateľ však neplánuje vyčkávať. Trúbky, po nich rachot. V diaľke pohyb mohutných tiel. Jazda. Zatiaľ sa len presúva a neútočí, no i tak mi je mdlo.

Medzi každými dvoma údermi kopýt ubehne nejaký časový úsek o dĺžke danej kladnými reálnymi číslami a_1, a_2, a_3, \dots . Tie tvoria postupnosť takú, že $a_1 = 1$ a $a_{n+1}^2 + a_{n+1} = a_n$. Ukážte, že potom pre každé kladné celé n platí

$$a_n \geq \frac{1}{n}.$$

3.6 Konečne Mašírujeme Spolu

levely L1 až L5, max. 7 bodov

Kopytá dunia. Už však nie som vo svojom strachu sám. Prišiel. Rovnako rozklepaný ako ja. Hodím na neho súcitný pohľad. Trasie sa, oči upreté na šík pred nami. Na moment sa naše pohľady stretnú. Jeho oči sú plné zúfaleho strachu. Tušíme, že sa blíži náš osud. Srdce mi búši, všetko vnímam spomalene, čas sa vlečie.

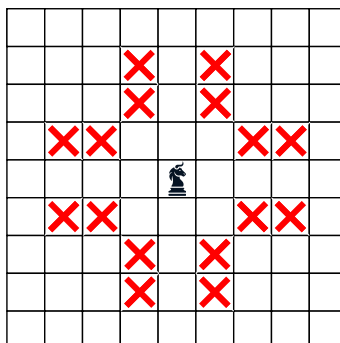
Aj hrdinov kolega má štít v tvare trojuholníka ABC , v ktorom $|AB| < |AC|$. V tomto je však vpísaná kružnica, ktorá sa dotýka strany AB a strany BC postupne v bodoch D a E . Nech I je stred vpísanej kružnice trojuholníka ABC a P je priesečník priamok AI a DE . Dokážte, že priamky AP a PC sú na seba kolmé.

3.7 Kolegu Môjho Smrť

levely L1 až L5, max. 7 bodov

Blíži sa k nám prvý jazdec. Zrazu je kôň vo vzduchu. Na ňom jazdec v mohutnom brnení zvierá kopiju. Nevie, kedy pristál, neviem, kedy bodol, no kopija zrazu prechádza mojím spolubojovníkom. Všade je krv. Ani nekričal...

Pokiaľ na človeka beží kôň alebo ľubovoľné iné štvornohé zviera, tak najlepšia stratégia je uhnúť sa mu. To vedia aj španielski toreadori. Vedia, že býk sa v jednom ťahu posunie v jednom smere (zvisle alebo vodorovne) o 1 políčko a v kolmom smere o 2 alebo 3 políčka. Ohrozuje teda políčka ako na obrázku. Najviac koľko býkov možno umiestniť na šachovnicu 8×8 tak, aby sa žiadne dva neohrozovali?



3.8 Kde Mám Skrýšu?

levely L1 až L5, max. 7 bodov

Chcem ujsť, túžim byť preč, no nemôžem, nohy mám ako prikované. Už ma takmer obklúčili... Utekať pred jazdcom na koni nemá zmysel, posily nedôjdu včas. Mám však čakať na nepriateľov úder?

Vhodné riešenie nemusí vždy existovať. Rozhodnite, či existuje nekonečne veľa nesúdeliteľných dvojíc kladných celých čísel m, n , pre ktoré má rovnica $(x + m)^3 = nx$ práve 3 rôzne celočíselné riešenia pre x .

3.9 Krvilačne Mečom Sekám

levely L4 až L5, max. 8 bodov

Nemám inú možnosť, len vrhnúť sa vpred. Šikmo medzi toho šialenca a jazdca, priamo na druhého prichádzieho. Nepozerám mu do tváre, len sa zažením mečom. Nemám inú možnosť. Buďto skoná on, alebo ja. Nádej mi vliala do žíl silu, prekvapenie oslabilo súpera. Potkýna sa a ja naposledy sekám.

Každý vojak si musí plniť svoju funkciu. Nájdite všetky funkcie $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ také, že pre všetky kladné celé čísla m, n platí $f^m(n) + f(mn) = f(m)f(n)$, kde $f^m(n)$ definujeme ako $f^m(n) = \underbrace{f(f(\dots f(n)\dots))}_{m\text{-krát}}$.

3.10 Kráľovná Ma Skolila

levely L4 až L5, max. 10 bodov

Práve som zabil človeka. Po prvý raz. Pomaly mi dochádza váha môjho činu, súperi zatiaľ prekvapene stoja. Prečo nič nerobia? Nezaslúži si môj čin nejaký trest? Nieкто sa ku mne spredu blíži, no než zdvihnem zrak, moju hrud' prekláje meč. Klesám na zem, môj zrak sa dvíha len sťažka. Predo mnou je majestátna žena v žiariacich šatách. Svetlo, ktoré ju obklopuje, zastiera postupne celé moje zorné pole. Jej štít je to posledné, čo v živote vidím.

Kráľovnin štít má tvar rovnoramenného trojuholníka ABC so základňou BC . Kružnicu opísanú trojuholníku ABC nazveme k . Nech bod D leží na výške na stranu BC a p je rovnobežka s BC prechádzajúca bodom A . Priamka BD sa pretína s p v bode E . Nech I je druhý priesečník priamky CE s k a J je druhý priesečník CD s k . Dokážte, že p , os AB a IJ sa pretínajú v jednom bode.