



Riešenia 1. kola zimnej časti

1.1 Kúzlo Metrického Systému

Zadanie. *Pán kráľ sa práve vracal z poučnej prehliadky kráľovského hodinárstva, z ktorej si odniesol informáciu, koľko je hodín. Vraj 5 882 353 496 a stále pribúdajú ďalšie. Okrem toho si odniesol aj najnovší model využívajúci metrický systém.*

Kráľ sa čudoval, ako fungujú tieto hodiny. Podľa nich má jeden solárny deň 10 hodín a každá hodina má 100 minút. Kráľove hodiny teda napríklad tesne pred polnocou ukazujú 9: 99, o polnoci ukazujú 0: 00 a o 3: 00 nášho štandardného času ukazujú 1: 25. Aký čas ukazujú kráľove hodiny o 6: 36 nášho času?

Riešenie. opravujú **Naťa** (natalia.cigasova@trojsten.sk) a **Vilčo** (viliam.geffert@trojsten.sk)

Hodiny a minúty na kráľových hodinách budeme volať metrické. Označme si metrickú hodinu ako h_m a metrickú minútu ako min_m . Keďže deň má rovnakú dĺžku, skúsme si určiť, koľko „našich“ hodín má metrická hodina, resp. minúta. Jedna metrická hodina má 100 minút a jeden metrický deň má 10 hodín. Z toho vyplýva, že

$$1 \text{ deň} = 24 \text{ h} = 1440 \text{ min} = 10 h_m = 1000 min_m,$$

$$1,44 \text{ min} = 1 min_m,$$

$$1 \text{ min} = \frac{1}{1,44} min_m.$$

Môžeme si teda všimnúť, že jedna metrická minúta je 1,44 našich minút. Dodatočne si môžeme ešte overiť, že to skutočne platí. Keďže vieme, že o 3: 00 nášho času je 1: 25 metrického času, platí

$$3 \text{ h} = 180 \text{ min} = \frac{180}{1,44} min_m = 125 min_m = 1 h_m 25 min_m.$$

Náš prevod teda skutočne sedí. Vieme teda vypočítať, aký bude teda metrický čas, ak je 6: 36 nášho času:

$$6 \text{ h } 36 \text{ min} = 6 \cdot 60 \text{ min} + 36 \text{ min} = 396 \text{ min} = \frac{396}{1,44} min_m = 275 min_m = 2 h_m 75 min_m.$$

Kráľove hodinky budú ukazovať 2: 75.

1.2 Krajina Mizne Svižne

Zadanie. *Na hrade čakalo kráľa nemilé prekvapenie. Jeho dcéru práve priviedlo 9 odvážnych záchrancov, z ktorých každému mal dať podľa práva buď princeznú, alebo polovicu kráľovstva. Princezná sa však nechcela vydávať a tak*

hrozilo, že sa jeho kráľovstvo scvrkne na $\frac{1}{512}$. Rozhorčený kráľ sa teda spytoval svojej dcéry, ako mohla čosi také dopustiť. Tá odpovedala prasto: „Prepáčte, otecko, nechala som sa unieŕ.“

Kráľovi ostala nemilá povinnosť rozdeliť medzi 9 záchrancov svoje kráľovstvo. Traja záhrancovia chceli po jednej rieke, traja po jednej lúke a traja po jednej hore a kráľ skutočne rozdal tri rieky, tri lúky a tri hory, tak, že každý záhrancca dostal rieku, lúku alebo horu. Avšak kráľ bol mimoriadne nešťastný, takže iba presne jednému záhrancovi dal, čo chcel. Kolkými spôsobmi to mohol urobiť? Samotné rieky boli nerozlíšiteľné od seba, tak ako lúky a hory.

Riešenie. opravujú Maťa (martina.mlada@trojsten.sk) a Michal S. (michal.stanik@trojsten.sk)

Pri prvom pohľade na úlohu vidíme, že ide o kombinatoriku. Potrebujeme len vhodne spočítať všetky možnosti.

Keďže je úloha symetrická, môžeme uvažovať, že prvý záhrancca dostal to, čo chcel. Na konci musíme počet možností prenásobiť 9, aby sme započítali možnosti, kde uspokojený záhrancca je iný. Označme záhrancov z_1 až z_9 tak, že prví traja ($z_1 - z_3$) chceli rieku, $z_4 - z_6$ lúku a $z_7 - z_9$ horu. Povedzme, že prvý dostal rieku, ako chcel, potom ostatní dostali jeden z dvoch typov územia, ktoré nechceli. Označme si rieku ako r , lúku ako l a horu ako h . Možnosti, čo mohli jednotliví záhrancovia dostať, môžeme poznačiť do nasledovnej tabuľky:

z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7	z_8	z_9
r	l/h	l/h	r/h	r/h	r/h	r/l	r/l	r/l

Záhrancovia 2 – 3 mohli dostať: lúku a lúku, horu a horu alebo lúku a horu (v nejakom poradí).

V prípade, že dostali lúku a lúku, záhrancovia 4 – 6 dostali 3 hory (pretože nikto iný už hory získať nemohol), záhrancovia 7 – 9 dostali 2 rieky a 1 lúku, ktoré mohli dostať 3 spôsobmi, podľa toho kto dostal lúku. Tieto možnosti vyzerajú teda nasledovne:

z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7	z_8	z_9
r	l	l	h	h	h	l	r	r
r	l	l	h	h	h	r	l	r
r	l	l	h	h	h	r	r	l

V prípade, že dostali horu a horu, záhrancovia 7 – 9 dostali 3 lúky (podobne ako vyššie), záhrancovia 4 – 6 dostali 2 rieky a 1 horu, ktoré mohli dostať znovu 3 spôsobmi (rovnako ako vyššie).

V prípade, že dostali lúku a horu, ostali 2 rieky, 2 lúky a 2 hory. Lúku a horu mohli záhrancovia 2 – 3 dostať dvoma spôsobmi. Všetky zvyšné hory dostali záhrancovia 4 – 6, pripadla im aj jedna rieka. Záhrancovia 7 – 9 dostali 2 lúky a 1 rieku. Záhrancovia 4 – 6 mohli dostať časti kráľovstva tromi spôsobmi, tak ako aj záhrancovia 7 – 9. Tieto možnosti sa dajú ľubovoľne kombinovať, čím získame $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ spôsobov.

Sčítaním počtov možností z jednotlivých prípadov dostaneme $3 + 3 + 18 = 24$ a na záver prenásobíme 9, aby sme zahrnuli možnosti, kde je uspokojený iný záhrancca: $24 \cdot 9 = 216$, čo je celkový počet možností.

1.3 Kráľ Musí Schudnúť

Zadanie. Pán kráľ sa pri tejto udalosti tak napajedil, až mu nezostalo nič iné ako ísť za kráľovským doktorom. Ten ho pozorne počúval a napokon povedal: „Vaša výsosť, Vy sa neustále sťažujete. Mali by ste sa viac starať o svoju váhu.“

Od návštevy lekára kráľovu váhu pravidelne čistí p sluhov a udržiava ju q údržbárov. Pritom p, q sú prvočísla také, že $2^2 + p^2 + q^2$ je tiež prvočíslo. Nájdite všetky dvojice prvočísel p, q .

Riešenie. opravujú **Denys** (denys.andrukhovskiy@trojsten.sk) a **Bohdan** (bohdan.bankov@trojsten.sk)

Zapíšme si výraz $2^2 + p^2 + q^2 = 4 + p^2 + q^2$. Úloha sa nás pýta, kedy je $4 + p^2 + q^2$ prvočíslo.

Prvé, čo si môžeme všimnúť, je, že naše prvočíslo nie je úplne malé. $4 + p^2 + q^2 > 4$, keďže p, q sú prvočísla, a teda kladné celé čísla. Z toho nám vyplýva napríklad, že $4 + p^2 + q^2$ nie je 2 alebo 3. Načo by nám to bolo?

Ak $4 + p^2 + q^2$ nie je 2, tak nemôže byť deliteľné číslom 2 — inak by to nebolo prvočíslo. Ale kedy môže byť $4 + p^2 + q^2$ nepárne? Spomenieme si, že

- súčet párneho a párneho čísla je párne číslo,
- súčet nepárneho a nepárneho čísla je párne číslo,
- súčet párneho a nepárneho čísla je nepárne číslo.

Potom si vieme všimnúť, že $4 + (p^2 + q^2)$ je nepárne práve vtedy keď $p^2 + q^2$ je nepárne. Jedinou možnosťou, aby $p^2 + q^2$ bolo nepárne, je, aby jedno z čísel p^2, q^2 bolo párne a jedno nepárne. Ale druhá mocnina celého čísla je párna práve vtedy, keď číslo je párne.

Čiže práve jedno z čísel p, q je párne. Ale zároveň si pamätáme, že p, q sú prvočísla a jediné párne prvočíslo je 2. Čiže práve jedno z čísel p, q je 2.

Všimnime si taktiež, že ak dvojica (p, q) je riešenie rovnice, tak aj dvojica (q, p) je riešenie. Takže teraz si zvolíme $p = 2$ — prípad $q = 2$ bude absolútne symetrický¹.

Čiže $2^2 + 2^2 + q^2 = 8 + q^2$ je prvočíslo. Vieme spraviť podobnú úvahu, ako deliteľnosť dvomi?

Skúsme to s trojkou. Pre q máme 3 možnosti:

- q má zvyšok 0 pri delení 3: Keďže q je prvočíslo, tak nutne $q = 3$, lebo iné prvočísla nemôžu byť deliteľné tromi. $8 + 3^2 = 17$, čo je prvočíslo. Čiže $(p, q) = (2, 3)$ je riešenie.
- q má zvyšok 1 pri delení 3: Potom vieme zapísať $q = 3k + 1$ pre nejaké celé k . Teraz $8 + q^2 = 8 + (3k + 1)^2 = 8 + 9k^2 + 6k + 1 = 9k^2 + 6k + 9 = 3(3k^2 + 2k + 3)$, čo je číslo určite väčšie ako 3, ale deliteľné tromi. Takže toto číslo nemôže byť prvočíslom.
- q má zvyšok 2 pri delení 3: Potom vieme zapísať $q = 3k + 2$ pre nejaké celé k . Teraz $8 + q^2 = 8 + (3k + 2)^2 = 8 + 9k^2 + 12k + 4 = 9k^2 + 12k + 12 = 3(3k^2 + 4k + 4)$, čo je číslo opäť väčšie ako 3, ale deliteľné tromi. Takže ani toto číslo nemôže byť prvočíslom.

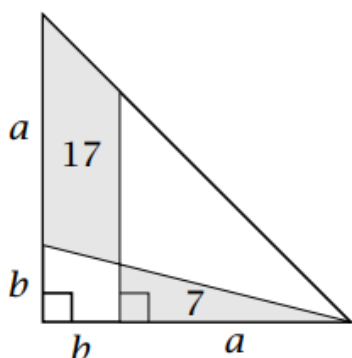
Čiže sme vyskúšali všetky možnosti a zistili, že jediné riešenia sú $(2, 3)$ a nezabudnime, aj $(3, 2)$, podľa toho, čo sme povedali vyššie.

1.4 Krásny Mocný Sluha

Zadanie. Na druhý deň kráľa opäť navštívila jeho dcéra. „Otecko, sluha ma zbalil. Môžem sa vydávať?“ Kráľa tento vývin udalostí znepokojil. Je správne vydať princeznú za obyčajného sluhu? Pravda, novomanžel by mohol vyplácať záchrancov miesto neho... V tom mu však spadli oči do kúta siene.

¹to isté vieme povedať, ako bez ujmy na všeobecnosti nech $p = 2$

V kúte sa nachádza princeznina batožina, ktorá má tvar pravouhlého trojuholníka. Sluha princeznú zbalil do dvoch vyznačených oblastí s obsahmi 17 a 7. Ďalej sú na obrázku vyznačené pravé uhly a úsečky dĺžok a a b na rôznych častiach trojuholníkov. Nájdite súčin $a \cdot b$.



Riešenie. opravujú **Matúš Zelko** (matus.zelko@trojsten.sk) a **Petr Velyčko** (petr.velycko@trojsten.sk)

Označme si obsah štvoruholníka $AEHF$ ako S . Potom si uvedomme, že S môžeme spočítať dvoma rôznymi spôsobmi:

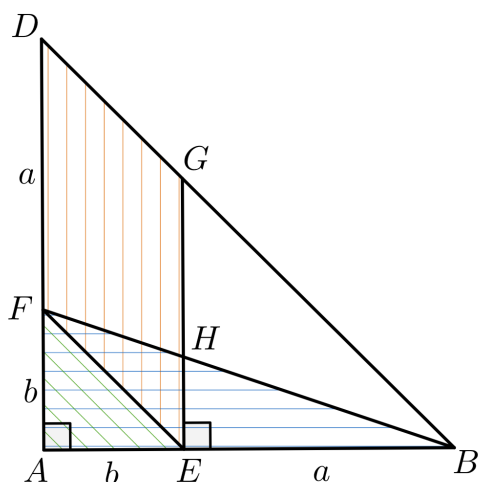
- Pomocou obsahu trojuholníka ABF , od ktorého odčítame obsah trojuholníka EBH :

$$S = \frac{1}{2} (a + b) \cdot b - 7;$$

- Pomocou súčtu obsahov kosodĺžnika $FEGD$, s výškou o veľkosti b a stranou o veľkosti a , a pravouhlého rovnostranného trojuholníka AEF , od ktorých odčítame obsah štvoruholníka $FHGD$:

$$S = \frac{b^2}{2} + ab - 17.$$

Pre úplnosť ukážme, že útvar $FEGD$ je skutočne kosodĺžnik. Vďaka pravým uhlom pri bodoch A a E sú strany FD a EG rovnobežné. Keďže trojuholníky AEF a ABD sú podobné (sú to rovnoramenné pravouhlé trojuholníky), tak aj strany DG a FE sú rovnobežné.



Tieto dve hodnoty sa rovnajú, a preto môžeme zapísať vzťah pre pravé strany oboch rovníc:

$$\frac{1}{2}(a+b) \cdot b - 7 = \frac{b^2}{2} + ab - 17.$$

Z tejto rovnosti následne ekvivalentnými úpravami dostaneme

$$\frac{ab}{2} = 10,$$

odkiaľ vynásobením dvojkou už dostávame požadovanú hodnotu

$$ab = 20.$$

1.5 Kopú Mriežku Stráže

Zadanie. Hneď ako kráľ pozbieral z kúta svoje oči, vzbĺkol hnevom. „Na žiadnu cestu sa vydávať nebudeš. Stráže! Okamžite dajte princeznú pod zámok!“ „Ako to myslíte, pod zámok?“ opýtal sa jeden strážnik. „Som váš punovník, moje príkazy máte splniť presne do slova a do písmena.“ A tak sa stráže vybrali kopať.

Stráže si zámok rozdelili na mriežku 8×8 . V každom políčku vykopali jamu, do ktorej vložili jedno z čísel $1, 2, \dots, 64$ tak, že v prvom riadku boli čísla po poradi $1, 2, \dots, 8$, v druhom riadku zaradom $9, 10, \dots, 16$ a tak ďalej. Teraz do každého políčka ku číslu pripísali $+$ alebo $-$ tak, aby v každom riadku a každom stĺpci boli z každého znamienka práve 4 kusy. Dokážte, že súčet všetkých čísel v mriežke je 0.

Riešenie. opravujú **Lukáš** (lukas.gaborik@trojsten.sk) a **Noro** (norbert.bielik@trojsten.sk)

Pri podobných úlohách sa často oplatí pozrieť sa na menšie prípady a z nich sa snažiť pochopiť, ako úloha funguje. Samozrejme, len to nestačí a musíme poriadne odôvodniť, že aj pri tých väčších sa to bude správať tak, ako tvrdíme, ale častokrát tak vieme pochopiť, čo sa deje.

Keby sme mali tabuľku 2×2 , v nej vieme znamienka priradiť len dvoma vyhovujúcimi spôsobmi – a to buď $+1 - 2 - 3 + 4 = 0$, alebo $-1 + 2 + 3 - 4 = 0$. V tomto prípade to teda celé funguje na tom, že $1 + 4 = 2 + 3$ a veľa nám to nepovedalo.

Skúsme sa ale pozrieť na tabuľku 4×4 . Tam už počet možností, ako priradiť znamienka, je oveľa väčší. Pozrime sa na niektoré z nich.

+1	+2	-3	-4	-4
+5	+6	-7	-8	-4
-9	-10	+11	+12	4
-13	-14	+15	+16	4
-16	-16	16	16	0

+1	-2	+3	-4	-2
-5	+6	-7	+8	-2
+9	-10	-11	+12	0
-13	+14	+15	-16	0
-8	8	0	0	0

V týchto dvoch tabuľkách dostaneme v riadkoch vždy párne súčty a v stĺpcoch súčty deliteľné osmičkou. Ešte si overme, či sa niečo podobné deje aj pri tabuľke 6×6 .

+1	+2	+3	-4	-5	-6	-9
+7	-8	-9	+10	+11	-12	-1
-13	-14	+15	-16	+17	+18	7
+19	+20	-21	-22	-23	+24	-3
-25	-26	+27	+28	-29	+30	5
-31	+32	-33	+34	+35	-36	1
-42	6	-18	30	6	18	0

Tu sú zas vo všetkých riadkoch súčty nepárne a pomerne malé, zatiaľ čo vo všetkých stĺpcoch násobkami 6. Tie stĺpce vyzerajú pomerne podozrivo, tak sa poďme pozrieť na čísla v jednom stĺpci, teraz už však v zadanej tabuľke 8×8 .

V prvom stĺpci tabuľky 8×8 máme čísla 1, 9, 17, 25, 33, 41, 49, 57. Tieto čísla sa postupne zväčšujú o 8, pretože vždy ideme o celý riadok (a teda 8 políčok) ďalej. To ale znamená, že čísla v jednom stĺpci tabuľky dávajú rovnaký zvyšok po delení ôsmimi. Keďže však polovici čísel z každého stĺpca pridáme + a druhej polovici -, tieto rovnaké zvyšky sa navzájom odčítajú. Súčet v každom stĺpci teda bude násobkom 8.

Z toho však vidíme, že každé číslo v tabuľke môžeme nahradiť najbližším menším násobkom čísla 8. Tým zachováme súčty v stĺpcoch. Keďže súčet hodnôt v tabuľke je daný súčtom hodnôt v stĺpcoch, tak nám stačí ukázať, že na nulu sa nasčítajú tieto zmenené čísla.

Po zmene nám v prvom riadku zostane osem núl, v druhom riadku osem osmičiek, v treťom osem šestnástok, Tentokrát využijeme, že aj do riadkov dávame rovnako veľa + a -, čo znamená, že tieto čísla sa v každom z riadkov nasčítajú na nulu, čiže aj celkový súčet v tabuľke je nula.

Iné riešenie

Úloha sa dá riešiť aj algoritmicky, no stále tam nejaké veci treba dokázať. Pozrieme sa teda na to, ako malými úpravami vieme tabuľku upraviť do jednoduchého tvaru.

Začnime s takýmto rozložením znamienok.

+	+	+	+	-	-	-	-
+	+	+	+	-	-	-	-
+	+	+	+	-	-	-	-
+	+	+	+	-	-	-	-
-	-	-	-	+	+	+	+
-	-	-	-	+	+	+	+
-	-	-	-	+	+	+	+
-	-	-	-	+	+	+	+

Všimnime si, že v prvom riadku máme $+1 - 5 = -4$, $+2 - 6 = -4$, $+3 - 7 = -4$ a $+4 - 8 = -4$, teda súčet v ňom je -16 . Podobne ukážeme, že aj ďalších troch riadkoch je súčet -16 a v spodných štyroch zas $+16$, teda celkový súčet je nulový.

Túto tabuľku však vieme aj upravovať. Totiž, ak máme štyri políčka vo vrcholoch obdĺžnika, ktoré majú v susedných vrcholoch rozličné znamienka, súčet v nich je dokopy nula. Na to, aby sme sa presvedčili, že je to tak, pozrime sa na štyri čísla v nasledovnej tabuľke.

$+a$				$-b$			
$-c$				$+d$			

$-a$				$+b$			
$+c$				$-d$			

Vzhľadom na to, v akých stĺpcoch sú jednotlivé čísla, musí pre nejaké k platiť $b = a + k$ a $d = c + k$. Potom ale

$$a - b - c + d = a - (a + k) - c + (c + k) = 0,$$

čo sme chceli dokázať. To okrem iného znamená, že aj po výmene znamienok v týchto štyroch políčkach zostane súčet nulový.

No a tu mnohí z vás skončili, že už je to hotovo. Žiaľ, nie je. Napríklad ešte nie je jasné, prečo by sme sa takýmito úpravami mali vedieť dostať ku každej vyhovujúcej tabuľke 8×8 . My popíšeme opačný smer – a to, ako sa od ľubovoľnej tabuľky spĺňajúcej zadanie dostať k tej „štvorblokovej“ zo začiatku.

Naším prvým cieľom bude dostať do požadovaného tvaru prvý stĺpec. Predpokladajme teda, že ešte nie je v poriadku, čiže v jeho hornej polovici sa nachádza $-$. Potom sa v nej môžu nachádzať najviac tri $+$, a teda aspoň jedno $+$ bude v dolnej polovici. Tým sme našli dve zo štyroch požadovaných znamienok.

Ešte by sme potrebovali nájsť nejaký iný stĺpec, v ktorom budú v príslušných riadkoch opačné znamienka. Keď sa v riadku s mínusom pozrieme na štyri plusové stĺpce, v riadku s plusom musí aspoň jeden z nich mať mínus

(ostávajú nám už iba tri).

-		+			+	+	+
+		+			-	+	+

Túto štvoricu teda vieme prehodiť a dostať tak + do hornej polovice prvého stĺpca. Takto vieme docieľiť, že prvý stĺpec bude mať hore plusy a dole mínusy. Uvedomme si, že podobne vieme dosiahnuť, že v poslednom stĺpci budú hore mínusy a dole plusy. Zároveň tým ani nepokazíme prvý stĺpec, lebo do štvoric tenokrát hľadáme stĺpce, kde mínus je v hornej polovici a plus v dolnej polovici (čo prvý stĺpec už nespĺňa).

Podobnou úvahou vieme upraviť aj prvý a posledný riadok, čím tabuľku dostaneme do nasledovného tvaru.

+	+	+	+		-	-	-	-
+								-
+								-
+								-
-								+
-								+
-								+
-	-	-	-		+	+	+	+

Tým nám však zostane tabuľka rozmerov 6×6 , kde v každom riadku aj stĺpci majú byť tri + a tri -, čiže matematickou indukciou vieme nájsť postupnosť výmen aj pre ňu.

1.6 Korunu Mučí Samota

Zadanie. *Uväznenie princeznej prinieslo kráľovi len ďalšie problémy. Potreboval totiž nástupcu. Bez princeznej sa nemal ani len s kým poradiť. A tak v záchvate zúfalstva zavolať najbližšieho sluhu, aby mu predal korunu a poslal ho s ňou na trhy. Na trhoch predávali všetko možné aj nemožné. Sluha hneď zbadal zaujímavý vzťah pre ceny anduliek, bavlny a cíceru.*

Dokážte, že pre kladné reálne čísla a, b, c platí:

$$\frac{b(2a-c)}{a} + \frac{c(2b-a)}{b} + \frac{a(2c-b)}{c} \leq \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a}.$$

Riešenie.

opravuje **Filip** (filip.kotoc@trojsten.sk)

Začnime tým, že si nerovnicu zo zadania upravíme na jednoduchší tvar:

$$\begin{aligned}\frac{b(2a-c)}{a} + \frac{c(2b-a)}{b} + \frac{a(2c-b)}{c} &\leq \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \\ \frac{(2ab-bc)}{a} + \frac{(2bc-ac)}{b} + \frac{(2ac-ab)}{c} &\leq \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \\ \frac{(2ab)}{a} + \frac{(2bc)}{b} + \frac{(2ac)}{c} - \frac{(bc)}{a} - \frac{(ac)}{b} - \frac{(ab)}{c} &\leq \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \\ 2b + 2c + 2a - \frac{(bc)}{a} - \frac{(ac)}{b} - \frac{(ab)}{c} &\leq \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \\ 2b + 2c + 2a &\leq \frac{2ac}{b} + \frac{2ab}{c} + \frac{2bc}{a}.\end{aligned}$$

Úlohu môžeme riešiť dvoma spôsobmi. Buď využijeme starú známu AG nerovnosť, alebo permutačné nerovnosti. Začnime s AG nerovnosťou:

Vieme, že pre akékoľvek prvky platí, že ich aritmetický priemer je väčší alebo rovný ich geometrickému priemeru. Všimnime si, že keď medzi sebou prenásobíme ľubovoľné dva členy z pravej strany nerovnice, tak sa vzájomne vykrátia. Dosaďme teda prvú dvojicu $(\frac{ac}{b}, \frac{ab}{c})$ do AG nerovnosti:

$$\begin{aligned}\frac{\frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}}{2} &\geq \sqrt{\frac{ac}{b} \cdot \frac{ab}{c}} \\ \frac{\frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}}{2} &\geq \sqrt{a \cdot a} \\ \frac{\frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}}{2} &\geq \sqrt{a^2} \\ \frac{\frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}}{2} &\geq a \\ \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} &\geq 2a.\end{aligned}$$

Takýmto spôsobom si vieme vziať ľubovoľné dva členy z pravej strany nerovnice. Ak by sme takto sčítali aritmetické priemery všetkých týchto dvojíc, dostaneme $\frac{2ac}{b} + \frac{2ab}{c} + \frac{2bc}{a}$, čo je pravá strana pôvodnej nerovnice. Ak by sme sčítali všetky geometrické priemery týchto dvojíc, tak dostaneme $2b + 2c + 2a$, čo je ľavá strana pôvodnej nerovnice. A keďže vieme, že aritmetický priemer je vždy väčší ako geometrický priemer, určite bude platiť, že:

$$2b + 2c + 2a \leq \frac{2ac}{b} + \frac{2ab}{c} + \frac{2bc}{a}.$$

Tým sme tvrdenie dokázali.

Iné riešenie

Ukážme si ešte, ako túto úlohu vyriešiť pomocou permutačných nerovností. Permutačné nerovnosti hovoria, že ak mám 2 rovnako veľké množiny čísel $x_i; y_i \in \mathbb{R}_0^+$, ktoré viem usporiadať od najväčšieho po najmenšie:

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots \geq x_n$$

$$y_1 \geq y_2 \geq y_3 \geq \dots \geq y_n$$

tak potom platí:

$$x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \dots + x_n y_1 \leq x_1 y_{i_1} + x_2 y_{i_2} + \dots + x_n y_{i_n} \leq x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

,

kde ľavá strana nerovnice predstavuje dvojice, kde vezmeme najmenší dostupný prvok z jednej množiny s najväčším dostupným z druhej množiny, stredná časť nerovnice predstavuje náhodne usporiadané dvojice a pravá strana nám predstavuje dvojice, kde vezmeme najmenší dostupný prvok z jednej množiny s najmenším dostupným z druhej množiny.

Vráťme sa späť k pôvodnej nerovnici:

$$2b + 2c + 2a \leq \frac{2ac}{b} + \frac{2ab}{c} + \frac{2bc}{a}.$$

Môžeme si všimnúť, že je vzhľadom na jednotlivé premenné symetrická. Preto bez ujmy na všeobecnosti môžeme premenné zoradiť:

$$a \geq b \geq c$$

Teraz si ako x_1, x_2, x_3 vezmeme $2ab, 2ac, 2bc$ a ako y_1, y_2, y_3 vezmeme prvky $\frac{1}{c}, \frac{1}{b}, \frac{1}{a}$. Vieme, že ak platí:

$$a \geq b \geq c$$

tak potom platí aj:

$$2ab \geq 2ac \geq 2bc$$

$$\frac{1}{c} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{a}$$

Potom podľa permutačných nerovností ale platí:

$$2ab \cdot \frac{1}{c} + 2ac \cdot \frac{1}{b} + 2bc \cdot \frac{1}{a} \geq 2ab \cdot \frac{1}{a} + 2ac \cdot \frac{1}{c} + 2bc \cdot \frac{1}{b}$$
$$\frac{2ab}{c} + \frac{2ac}{b} + \frac{2bc}{a} \geq 2b + 2a + 2c$$

Tým sme tvrdenie dokázali.

1.7 Kúp Mi Sučku!

Zadanie.

Sluha sa obzeral po zvieratách, ktoré by mohli kráľovi robiť spoločníka. V jednom koterci mu do oka padol pes. Vytiahol si ho z oka, aby si ho lepšie obzrel. „Nemá tvár,“ pomyslel si. Predavača sa spýtal: „Koľko stojí tento pes?“ „Už dobré tri hodiny.“

V koterci sa nachádza aj veľa iných psov. Aby bolo možné určiť, ktorého chce zákazník kúpiť, tak sú očíslované celými číslami tak, že v koterci sa nachádza aspoň jeden pes s kladným a aspoň jeden so záporným číslom. Zároveň ak majú nejaké **nie nutne rôzne** psy čísla a a b , tak existuje aj pes s číslom $a + b$. Dokážte, že potom ak majú nejaké **nie nutne rôzne** psy čísla a a b , tak existuje pes s číslom $a - b$.

Riešenie. opravujú **Alic** (alica.cimrakova@trojsten.sk) a **Matúš** (matus.jonastik@trojsten.sk)

Prvým pozorovaním je, že ak máme v koterci psa s číslom x , tak opakovaným sčítaním $x + x + \dots + x$ vieme vytvoriť všetky kladné násobky kx (pre $k \in \mathbb{N}$). Teda vieme zostaviť ľubovoľné väčšie násobky daného čísla.

Taktiež, keď ľubovoľne sčítavame čísla a a b , výsledok $a + b$ je deliteľný najväčším spoločným deliteľom $\text{NSD}(a, b)$.

Dôležitá podmienka je, že v koterci je aspoň jedno kladné a aspoň jedno záporné číslo. Opakovaným sčítavaním rôznych kombinácií týchto čísel sa tak môžeme posúvať dopredu aj dozadu na číselnej osi.

Použitím opakovaného sčítania a kombinovaním kladných a záporných čísel sa preto dá približovať k nule, teda dostať číslo s čo najmenšou absolútnou hodnotou. Už vieme, že aj toto číslo je deliteľné $\text{NSD}(a, b)$. Keďže jeho absolútna hodnota je zároveň najmenšia, akú vieme dostať, toto číslo priamo je $\text{NSD}(a, b)$. O tom, že $\text{NSD}(a, b)$ vieme vytvoriť ako súčet (či už kladných alebo záporných) násobkov čísel a, b , hovorí aj Bezoutova veta.

Keď vieme vytvoriť $\text{NSD}(a, b)$, opakovaným sčítaním vieme vytvoriť aj všetky jeho násobky. Preto máme v koterci všetky celé čísla deliteľné $\text{NSD}(a, b)$. Inými slovami, každé číslo, ktoré je deliteľné $\text{NSD}(a, b)$, sa v koterci nachádza. Rozdiel $a - b$ je vždy deliteľný $\text{NSD}(a, b)$. Podľa predchádzajúcej vety je preto určite v koterci aj tento rozdiel. Týmto sme úlohu dokázali.

Poznámka: Mnohí z Vás riešili nesúdeliteľnosť čísel a, b ako samostatný prípad. Všimnime si, že takýto postup nie je nutný, nakoľko vyššie uvedené riešenie je aplikovateľné aj tu – len v tom prípade $\text{NSD}(a, b) = 1$.

1.8 Kde Máme Stanicu?

Zadanie. Medzitým sa v zemi prehrabával istý metrológ. Jeho životným cieľom bolo vymerať celé podzemie zámku a objaviť stratenú stanicu podzemnej dráhy. Miesto nej však našiel princeznú, a to na vcelku pozoruhodnom mieste.

Princezná sa nachádzala v strede vpísanej kružnice trojuholníka ABC označeného ako P . Nech X a Y sú postupne priesečníky kružníc opísaných trojuholníkom ABP a ACP s priamkami AC a AB rôzne od bodu A . Dokážte, že $|CX| = |BY|$.

Riešenie. opravujú **Mišo M.** (michal.molnar@trojsten.sk) a **Iľo** (michal.ilkovic@trojsten.sk)

Označme k kružnicu opísanú trojuholníku ABP a l kružnicu opísanú ACP . Ich priesečníky s priamkou BC , rôzne od bodov B, C označíme postupne D, E . Keďže pracujeme s dvoma kružnicami a snažíme sa vypátrať niečo o dĺžkach úsečiek, vhodným nástrojom by pre nás mohla byť mocnosť bodu ku kružnici.

Pre bod B a kružnicu l dostaneme vzťah

$$|BA| \cdot |BY| = |BE| \cdot |BC|.$$

Pre bod C a kružnicu k dostaneme

$$|CA| \cdot |CX| = |CD| \cdot |CB|.$$

Z prvej rovnosti vyjadríme $|BY|$, z druhej $|CX|$, čím dostaneme

$$|BY| = \frac{|BE|}{|BA|} \cdot |BC|,$$

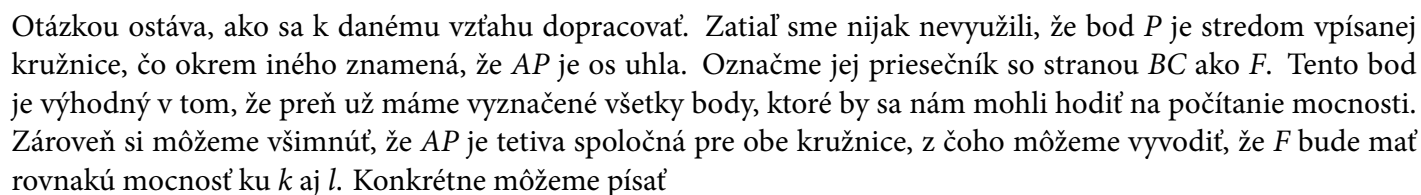
$$|CX| = \frac{|CD|}{|CA|} \cdot |BC|.$$

Takže na dôkaz, že $|BY| = |CX|$ nám teda stačí overiť, že

$$\frac{|BE|}{|BA|} = \frac{|CD|}{|CA|},$$

čo je ekvivalentné s

$$\frac{|BE|}{|CD|} = \frac{|BA|}{|CA|}.$$



Teraz využijeme fakt, že AP je os uhla. Pre tú platí, že rozdeľuje protiľahlú stranu v rovnakom pomere, ako je pomer zvyšných dvoch strán. V našom prípade

Môžeme si všimnúť, že pomer $|AB| : |AC|$ nás skutočne zaujíma. Ak by nám vyšiel rovnaký ako $|BE| : |CD|$, úlohu sme úspešne dokončili. Na to sa však potrebujeme zbaviť bodu F , pre ktorý síce poznáme pomery rovné $|AB| : |AC|$, no ktorý sa v cieľnom vzťahu nenachádza.

$$\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}.$$
$$\frac{|FB|}{|FC|} = \frac{|FB| + |FE|}{|FC| + |FD|}.$$

<https://www.kms.sk/>

Uvedomme si ešte, že bod F leží mimo úsečky AP a teda musí ležať aj vonku z kružníc k a l . Body B a D tak budú od neho na jednej strane priamky BC a body C, E na opačnej. Takže $|FB| + |FE| = |BE|$ a $|FC| + |FD| = |CD|$.

Keď tieto výrazy dosadíme do už známeho vyjadrenia $|AB| : |AC|$, dostaneme

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|FB|}{|FC|} = \frac{|FB| + |FE|}{|FC| + |FD|} = \frac{|BE|}{|CD|},$$

čo sme skutočne chceli dokázať.

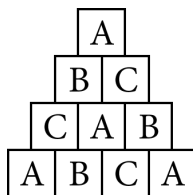
1.9 Klobúk Môže Skladať

Zadanie. Metrológ sa rozhodol odnieť princeznú späť do zámku, veď ktovie, možno dostane nejakú odmenu. Ako každý správny chlap, pozná základy etikety a vie, že pri vstupe do trónnej sály musí zložiť čiapku. Vybral z vrečka teda jediný zdrap papiera, čo tam mal – malú nálepku – a pustil sa do toho.

Zložená čiapka mala tvar pyramídy zlozenej zo štvorcových políčok. Jej základňa pozostávala z n políčok a každé vyššie poschodie malo o políčko menej ako predchádzajúce. V každom políčku základne bolo vpísané celé kladné číslo a zároveň každé políčko mimo základne malo vpísanú hodnotu, ktorá bola súčtom hodnôt 2 pod ním sa nachádzajúcich políčok. Vzhľadom na n určte, koľko najmenej hodnôt v pyramíde môže byť párnych.

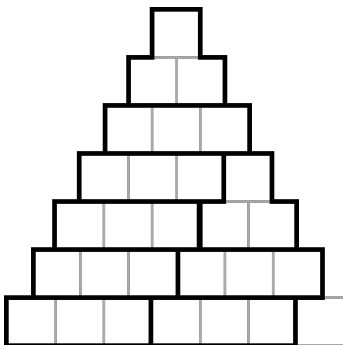
Riešenie. opravujú Štepi (martin.stepanek@trojsten.sk) a Krivoš (jakub.krivosik@trojsten.sk)

Zaujímá nás iba, ktoré políčka sú párne a nepárne. Nad dvomi rovnakými políčkami je párne, takže v pyramídke (dve políčka vedľa seba a jedno nad nimi) vieme mať najviac dve nepárne. Z toho sa zdá, že párnych by mala byť aspoň tretina pyramídy. A naozaj, takúto konštrukciu vieme spraviť: označíme políčka v riadkoch postupne $A, B, C, A, B, C, \dots$ a začneme tak, aby prvé dve políčka v každom riadku boli iné ako to nad nimi. Potom za párne zvolíme to písmeno, ktorého je najmenej. Nech má pyramída $k = \frac{n(n+1)}{2}$ políčok, potom takto dostaneme najviac $\lfloor k/3 \rfloor$ párnych (nemôže byť z každého čísla viac ako tretina). Toto rozdelenie parity vyhovuje, lebo v každej pyramídke bude práve jedno párne číslo, čo vždy sedí.



Ako dokážeme, že to nejde lepšie? Plán je taký, že si pyramídu rozdelíme na niekoľko disjunktných trojíc políčok a o každej trojici povieme, že v nej musí byť aspoň jedno párne políčko, takže dokopy párnych musí byť aspoň tretina. V trojici v tvare malej pyramídky naozaj musí byť aspoň jedno párne, ale nevieme celú pyramídu rozdeliť na takéto trojice.

Čo ale vieme, je rozdeliť pyramídu na trojice buď tvaru pyramídky, alebo tvaru troch políčok vedľa seba. Správime to tak, že každý riadok najprv vyplníme trojicami vedľa seba a potom zostávajúce miesta na koncoch riadkov vyplníme pyramídkami. Môže sa nám stať, že nám ostane jedno políčko neobsadené (ako na obrázku). Každopádne, máme takto presne $\lfloor n/3 \rfloor$ trojíc.



Nazvime trojicu *dobrá*, ak nemá žiadne párne políčko, a *zlá*, ak má viac ako jedno párne políčko. Aby sme dostali menej párných políčok než $\lfloor k/3 \rfloor$, muselo by byť viac dobrých trojíc než zlých. Ale každá dobrá trojica musí mať nad sebou dve párne políčka, ktoré patria do tej istej trojice. Takže každá dobrá trojica má nad sebou (inú) zlú trojicu a teda párných políčok je naozaj aspoň $\lfloor k/3 \rfloor$.

1.10 Každú Menšinu Sčítame

Zadanie. Kráľa prepadlo čisté zúfalstvo, keď zbadal, že princezná má ďalšieho záchrancu. Zmohol sa tak len na jednoduchú otázku: „A vy chcete polku alebo princeznú?“ Metrológ sa na chvíľu zamyslel a potom položil vlastnú otázku: „A princezná je Slovenka?“

V kráľovstve sa nachádzalo n národnostných menšín, kde n je kladné celé číslo. Najpočetnejšou boli Jedniny, ale aj Poliek bolo dosť. Zapišeme číslo $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ ako zlomok $\frac{p_n}{q_n}$ v základnom tvare. Nájdite všetky n také, že q_n nie je deliteľné piatimi.

Riešenie. opravujú **Alicka** (alica.domanyova@trojsten.sk) a **Dominik** (dominik.rigas@trojsten.sk)

Poznamenajme, že počas celého riešenia narábame so zlomkami ako s modulárnymi inverzami a naopak. Označme $H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ pre $n \in \mathbb{N}$. Ľahko spočítame, že $H_1 = \frac{1}{1} \equiv 1 \pmod{5}$, $H_2 = \frac{3}{2} \equiv 4 \pmod{5}$, $H_3 = \frac{11}{6} \equiv 1 \pmod{5}$, $H_4 = \frac{25}{12} \equiv 0 \pmod{5}$. Vidíme tak, že $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ vyhovujú zadaniu.

Tvrdenie 1. Pre celé $n \geq 5$ platí $5 \nmid q_n$ práve vtedy, keď $5 \mid p_{\lfloor n/5 \rfloor}$.

Dôkaz. Nech $k \in \mathbb{N}$ je také, že $5^k \leq n < 5^{k+1}$. Ďalej označme $L = \text{nsn}(1, 2, \dots, n)$. Potom platí $v_5(L) = k$. Máme tak

$$H_n = \frac{\frac{L}{1} + \frac{L}{2} + \dots + \frac{L}{n}}{L}.$$

Všimnime si, že $5 \nmid q_n$ práve vtedy, keď $v_5(H_n) \geq 0$, teda práve vtedy, keď čitateľ má v svojom rozklade aspoň toľko pätiok ako menovateľ, teda $5^k \mid \frac{L}{1} + \frac{L}{2} + \dots + \frac{L}{n}$. Nakoľko $5^k \mid \frac{L}{i}$ pre $5 \nmid i$, je to to isté ako

$$5^k \mid \frac{L}{5} + \frac{L}{10} + \dots + \frac{L}{5 \lfloor n/5 \rfloor},$$

čo je ekvivalentné s $5^{k+1} \mid \frac{L}{1} + \frac{L}{2} + \dots + \frac{L}{\lfloor n/5 \rfloor}$. Toto je však to isté, ako keď povieme $5 \mid p_{\lfloor n/5 \rfloor}$, keďže

$$H_{\lfloor n/5 \rfloor} = \frac{\frac{L}{1} + \frac{L}{2} + \dots + \frac{L}{\lfloor n/5 \rfloor}}{L},$$

pričom stále $v_5(L) = k$. $\square$

Tvrdenie 2. Pre $a \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\frac{1}{5a+1} + \frac{1}{5a+2} + \frac{1}{5a+3} + \frac{1}{5a+4} \equiv 0 \pmod{25}.$$

Dôkaz.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{5a+1} + \frac{1}{5a+4} \right) + \left(\frac{1}{5a+2} + \frac{1}{5a+3} \right) = \frac{10a+5}{(5a+1)(5a+4)} + \frac{10a+5}{(5a+2)(5a+3)} = \\ & = (10a+5) \left(\frac{1}{25a^2+25a+4} + \frac{1}{25a^2+25a+6} \right) \equiv (10a+5) \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} \right) = (10a+5) \cdot \frac{5}{12} \equiv 0 \pmod{25}. \square \end{aligned}$$

Tvrdenie 3. Všetky $n \in \mathbb{N}$ také, že $5|p_n$, sú $n \in \{4, 20, 24\}$.

Dôkaz. Všimnime si, že ak $5|p_n$, tak potom $5 \nmid q_n$, a teda $5 \mid p_{\lfloor n/5 \rfloor}$. Preto n môžeme iteratívne deliť piatimi a aplikovať dolnú celú časť, až kým nedostaneme jedno z čísel $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ (ak by sme totiž dostali číslo väčšie ako 4, môžeme ho opäť vydeliť 5 a aplikovať dolnú celú časť). Všimnime si zároveň, že jediné z týchto štyroch čísel, pre ktoré platí $5|p_n$, je $n = 4$, ako vieme z úvodného odstavca.

Generujme teda hľadané n „odzadu“. Začíname s $n = 4$. Rovnica $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor = 4$ má riešenia $n \in \{20, 21, 22, 23, 24\}$. Všimnime si, že s využitím Tvrdenia 2

$$H_{20} = \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{20} \equiv \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20} = \frac{1}{5} \cdot H_4 = \frac{5}{12} \equiv 0 \pmod{5}.$$

Vidíme tak, že $5|p_{20}$. Všimnime si ďalej, že $H_1, H_2, H_3 \not\equiv 0 \pmod{5}$, preto $H_{20+i} \equiv H_{20} + H_i \equiv H_i \not\equiv 0 \pmod{5}$ pre $i \in \{1, 2, 3\}$. Avšak nakoľko $H_4 \equiv 0 \pmod{5}$, tak vidíme, že $H_{24} \equiv 0 \pmod{5}$, teda $5|p_{24}$. V tomto kroku tak vyhovujú $n = 20$ a $n = 24$.

V ďalšom kroku začíname s dvoma možnosťami, a to $n = 20$ a $n = 24$. Rovnica $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor = 20$ má päť riešení $n \in \{100, 101, 102, 103, 104\}$. Všimnime si, že

$$H_{100} = \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{100} \equiv \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{100} = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{20} \right) \equiv \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20} \right) = \frac{1}{25} \cdot H_4 = \frac{1}{12} \equiv 3 \pmod{5},$$

pričom tu na kongruencie opäť používame Tvrdenie 2. Navyše, $H_{100+i} \equiv H_{100} + H_i \equiv 3 + H_i \not\equiv 0 \pmod{5}$ pre $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, ako ľahko overíme z úvodného odstavca. Vidíme tak, že pre žiadne z týchto n neplatí $5|p_n$.

Podobne, rovnica $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor = 24$ platí pre $n \in \{120, 121, 122, 123, 124\}$. Všimnime si, že $H_{120} \equiv H_{100} + H_{20} \equiv 3 \pmod{5}$, a teda analogickým dokončením ako vyššie vidíme, že ani tu nie sú žiadne vyhovujúce n . Preto ďalšie n generovať nemôžeme, a teda $\{4, 20, 24\}$ sú naozaj jediné hľadané n z Tvrdenia 3. $\square$

Spojením úvodného pozorovania a Tvrdení 1 a 3 tak dostávame, že všetky $n \in \mathbb{N}$, pre ktoré $5 \nmid q_n$, sú práve

$$n \in \{1, 2, 3, 4, 20, 21, 22, 23, 24, 100, 101, 102, 103, 104, 120, 121, 122, 123, 124\}.$$