



Milí študenti, učitelia a ostatní matematickí nadšenci!

Dostávate do rúk úvodný leták letnej časti 47. ročníka Korešpondenčného Matematického Seminára (KMS). Táto súťaž organizovaná občianskym združením Trojsten na pôde Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave (FMFI UK) je pre stredoškóľákov jedinečnou príležitosťou na zdokonalenie svojich matematických schopností a logického myslenia. Zručnosti a skúsenosti získané pri riešení tohto seminára, prípadne pri účasti na záverečnom sústreďení, sú veľmi cennou devízou aj pri riešení Matematickej olympiády (MO).

Mladším a začínajúcim študentom sú určené nižšie levely, pre starších a skúsenejších máme aj levely vyššie. Každý môže, samozrejme, v rámci svojich možností, riešiť viacero levelov. Podrobnejšie informácie o jednotlivých leveloch nájdete v pravidlách. Pre tých, ktorí majú vyššie ambície a chcú by uspieť na celoštátnom kole MO kategórie A, je určený seminár iKS (Medzinárodný korešpondenčný seminár), ktorý organizujú vedúci KMS v spolupráci s českými kolegami z Matematického korešpondenčného seminára. Tento seminár má veľmi špecifický cieľ, ktorým je príprava študentov na CK MO-A a aj na Medzinárodnú matematickú olympiádu. Bližšie informácie o ňom nájdete na stránke www.iksko.org.

Ak máte akékoľvek otázky alebo pripomienky, smelo nás kontaktujte e-mailom na adrese kms@kms.sk.

Veľa úspechov a radosti z riešenia vám želajú

vaši organizátori

Pravidlá

Všeobecné informácie o korešpondenčnom matematickom seminári

Súťaž sa skladá z dvoch nezávislých častí – zimnej a letnej. Každá z nich prebieha v rámci školského polroka. Na konci každej časti budú najúspešnejší riešitelia pozvaní na záverečné sústreďenie. Každá časť pozostáva z troch kôl úloh. Zadania jednotlivých kôl nájdete na stránke <https://kms.sk/ulohy/> vždy aspoň tri týždne pred termínom odovzdania daného kola. Úlohy 1 až 8 budú obodované počtom bodov od 0 po 7, úloha 9 počtom bodov od 0 po 8 a úloha 10 počtom bodov od 0 po 10. Body sa udeľujú aj za čiastkové či neúplné riešenia. Za každé kolo sa riešiteľovi do poradia započíta 5 úloh s najväčším bodovým ziskom.

Levely

Každý riešiteľ KMS má priradený level - číslo z rozmedzia 1 až 5. Tento level ovplyvňuje to, ktoré úlohy sa riešiteľovi započítavajú do výsledného poradia. Presnejšie, riešiteľovi sa do výsledného poradia započítava 5 najlepšie vyriešených úloh jeho levelu. Najnižšia úloha, ktorá sa počíta do výsledkovej listiny levelu L , je úloha s číslom L . Do výsledkových listín prvých troch levelov sa započítavajú úlohy až po číslo 8, do výsledkových listín zvyšných dvoch levelov sa započítavajú aj úlohy 9 a 10. Okrem výsledkovej listiny svojho levelu budeš aj vo výsledkových listinách všetkých vyšších levelov, z ktorých si vyriešil aspoň jednu úlohu.

Každý žiak, ktorý začne riešiť KMS, začína na leveli 1. Riešiteľom, ktorí už KMS riešili pred zmenou pravidiel, sa koeficient, ktorý by im prislúchal tento semester, na level prepočíta podľa nasledovnej tabuľky:

Koeficient	0	1	2	3 až 4	5 a viac
Level	1	2	3	4	5

Level riešiteľa sa nikdy neznižuje, v priebehu jednej časti sa level nemení, a **na začiatku každej časti sa môže zvýšiť** dvoma spôsobmi:

- Ak sa riešiteľ počas predošlej časti **zúčastnil sústredenia**, na ktoré bol pozvaný ako riešiteľ s levelom L , zvýši sa mu level na $L + 1$.
- Ak riešiteľ v predošlej časti **získal** vo výsledkovej listine levelu L **aspoň 80% maximálneho počtu bodov** (t. j. 84 bodov pre levely 1 až 3 a 93 bodov pre level 4), stúpne mu level na $L + 1$.

Výnimkou je level 5, z ktorého sa už vyššie postúpiť nedá.

Príklady výpočtu levelov

Pre lepšie pochopenie fungovania levelov uvádzame nasledovné dva príklady.

Gabriela je šikovná prváčka. Keďže KMS predtým neriešila, začala s levelom 1 a hneď v zimnej časti sa jej podarilo v leveli 1 získať viac ako 84 bodov. Keď teda začala letná časť, Gabriela mala už level 2. Gabriela išla dokonca aj na zimné sústredenie. Na sústredenie bola ale pozvaná z časti, v ktorej mala ešte len level 1, a preto sa jej level už viac nezvýšil.

V letnej časti sa jej darilo trochu menej. Získala viac ako 36 bodov – teda dosť na to, aby mohla byť pozvaná na sústredenie (viac nižšie), no na 84 to už nedotiahla. Zúčastnila sa tiež letného sústredenia (na ktoré bola pozvaná z letnej časti, ktorú riešila s levelom 2). To znamená, že jej level sa zvýšil na 3, a teda zimnú časť mohla riešiť úlohy číslo 3 až 8.

Riško začal riešiť zimnú časť KMS ako tretiak s levelom 1. Získal síce aspoň 36 bodov, no tiež to na 84 nestačilo. Následne bol pozvaný na zimné sústredenie, no nemohol sa ho zúčastniť.

Pred nasledujúcou letnou časťou sa mu preto level nezvýšil, a teda počas letnej časti bol Riško stále na leveli 1. V tejto časti sa mu darilo viac, vyhral level 1 (s 90 bodmi), bol na treťom mieste levelu 2 (s 86 bodmi) a v leveli 3 skončil na 15. mieste (so 75 bodmi). V lete sa mu opäť nepodarilo zúčastniť sústredenia. Keď sa ako štvrták pustil do zimnej časti, s prekvapením zistil, že je na leveli 3. Level mu stúpol vďaka tomu, že v predchádzajúcej časti získal aspoň 84 bodov v leveli 2.

Pozývanie na sústredenia

Po každej časti, zimnej aj letnej, sa uskutoční aspoň jedno sústredenie pre najúspešnejších riešiteľov všetkých levelov. Z každého z levelov bude aspoň 10 najlepších riešiteľov pozvaných na niektoré z nich, následne budú riešitelia pozývaní proporčne podľa počtu riešiteľov v jednotlivých leveloch. V rámci jednej časti je možné zúčastniť sa najviac jedného sústredenia. V prípade, že sa v niektorej z častí uskutoční viacero sústredení, vyhradzuje si právo s prihliadnutím hlavne na ročník úspešného riešiteľa pozvať ho na sústredenie iných levelov.

Na sústredenie môže byť pozvaný len riešiteľ, ktorý vo výsledkovej listine niektorého z levelov získal aspoň 36 bodov – čiže aspoň 34% plného počtu bodov v najnižšom z levelov. Vyhradzuje si právo v prípade opodstatnených okolností od tejto podmienky upustiť pri prvoriešiteľoch.

Pokyny pre riešiteľov

- Úlohy rieš **samostatne**.
- Riešenie každej úlohy riadne zdôvodni. V prípade, že v časti či celom riešení používaš odbornú literatúru, uveď jej názov, autora, vydavateľstvo, rok vydania a stranu, prípadne odkaz na internetovú stránku, ak si čerpal z internetu. Samozrejme, aj v tomto prípade zašli kompletné riešenie. Riešenie musí byť explicitné (pochopteľné samo o sebe bez ďalších zdrojov) a musí byť skontrolovateľné (v rozumnom čase) ručne opravovateľom (napríklad riešenia využívajúce výpočtovú techniku obvykle ručne skontrolovateľné nie sú).
- Odporúčame Ti pozrieť stránku Ako riešiť úlohy v KMS na adrese www.kms.sk/ako_riesit/, kde nájdeš niekoľko užitočných rád.
- Riešenia posielaj **elektronicky** do termínu odoslania kola. Riešenia odoslané po termíne odoslania spôsobujú značné organizačné problémy, vyhradzuje si preto právo udeliť za ne nula bodov.
- Riešenie každej úlohy píš na samostatný papier formátu A4. Ku každej úlohe uveď svoje meno, triedu, školu a adresu! Vítané sú okrem riešení v slovenčine aj riešenia v angličtine, češtine a riešenia písané v $\text{\TeX}$. Z organizačných dôvodov nebudú opravované riešenia písané v iných jazykoch.
- Na našej stránke www.kms.sk/template si môžeš stiahnuť a vytlačiť predlohy pre riešenia.
- Riešenia píš čitateľne. Ak nebudeme schopní prečítať časť tvojho riešenia, vyhradzuje si právo neudelit ti za tú časť body. Môžeš zvážiť písanie riešenia na počítači.
- Nedodržanie týchto pravidiel bude viesť k postihu.
- Opravené, obodované a okomentované riešenia nájdeš po prihlásení pod zadáním úlohy na našej stránke.
- Po termíne kola môžeš na našej stránke nájsť návody, príp. aj videonávody, ktoré ti pomôžu (nesúťažne) doriešiť úlohy, s ktorými si mal/-a problém. Následne tam zverejníme aj vzorové riešenia.
- Pokiaľ máš dojem, že tvoje riešenie bolo nesprávne obodované, pošli čo najskôr sťažnosť na e-mailovú adresu kms@kms.sk.
- Ak ti nie je v zadaniach čokoľvek jasné alebo máš akékoľvek pochybnosti, netreba sa báť spýtať sa nás. Ideálny spôsob je zaslanie e-mailu na kms@kms.sk.

Elektronické posielanie riešení

Odovzdávanie riešení prebieha v elektronickej podobe na našej stránke. Pre elektronické posielanie riešení platia nasledovné pravidlá:

- Pred prvým odovzdávaním je potrebné na našej stránke vyplniť všetky potrebné údaje (pozri si návod na <https://kms.sk/eriesenia>).

- Termín na odovzdanie je vždy v deň termínu odoslania kola o **23:59**. Po tomto čase už elektronické posielanie nie je možné.
- Akceptované sú **iba riešenia vo formáte PDF** písané na počítači, prípadne naskenované, **pre každú úlohu jeden súbor**. Pri ich tvorbe odporúčame použiť $\text{\LaTeX}$ alebo export do formátu PDF z iných aplikácií. Môžeš pritom využiť predlohy, ktoré nájdeš na našej stránke www.kms.sk/template. Ak posielaš oskenované riešenie, daj si pozor, či nie je príliš tmavé a či je čitateľné.
- Nezabudni v hlavičke riešenia uviesť svoje meno, triedu, školu a adresu!

Prijatie na FMFI UK bez prijímačiek

Ak účastník získa v niektorej časti (zimnej, letnej) a ľubovoľnej kategórii KMS aspoň 65% celkového počtu bodov, a hlási sa na študijný program, ktorého profilovým predmetom je matematika, bude prijatý.

Ba čo viac, ak dosiahne excelentné výsledky a dostane za to Dekanský list, v prípade, že príde študovať na FMFI UK, čaká naňho motivačné štipendium vo výške približne 300 eur.

Zadania 1. kola zimnej časti

Termín odoslania 29. september 2025

V prípade otázok k zadaniam nás neváhajte kontaktovať na kms@kms.sk.

1.1 Kúzlo Metrického Systému

level L1, max. 7 bodov

Pán kráľ sa práve vracal z poučnej prehliadky kráľovského hodinárstva, z ktorej si odniesol informáciu, koľko je hodín. Vraj 5 882 353 496 a stále pribúdajú ďalšie. Okrem toho si odniesol aj najnovší model využívajúci metrický systém.

Kráľ sa čudoval, ako fungujú tieto hodiny. Podľa nich má jeden solárny deň 10 hodín a každá hodina má 100 minút. Kráľove hodiny teda napríklad tesne pred polnocou ukazujú 9: 99, o polnoci ukazujú 0: 00 a o 3: 00 nášho štandardného času ukazujú 1: 25. Aký čas ukazujú kráľove hodiny o 6: 36 nášho času?

1.2 Krajina Mizne Svižne

levely L1 až L2, max. 7 bodov

Na hrade čakalo kráľa nemilé prekvapenie. Jeho dcéru práve priviedlo 9 odvážnych záchrancov, z ktorých každému mal dať podľa práva buď princeznú, alebo polovicu kráľovstva. Princezná sa však nechcela vydávať a tak hrozilo, že sa jeho kráľovstvo scvrkne na $\frac{1}{512}$. Rozhorčený kráľ sa teda spýtoval svojej dcéry, ako mohla čosi také dopustiť. Tá odpovedala prasto: „Prepáčte, otecko, nechala som sa uniešť.“

Kráľovi ostala nemilá povinnosť rozdeliť medzi 9 záchrancov svoje kráľovstvo. Traja záchrancovia chceli po jednej rieke, traja po jednej lúke a traja po jednej hore a kráľ skutočne rozdal tri rieky, tri lúky a tri hory, tak, že každý záchranca dostal rieku, lúku alebo horu. Avšak kráľ bol mimoriadne nešťastný, takže iba presne jednému záchrancovi dal, čo chcel. Koľkými spôsobmi to mohol urobiť? Samotné rieky boli nerozlíšiteľné od seba, tak ako lúky a hory.

1.3 Kráľ Musí Schudnúť

levely L1 až L3, max. 7 bodov

Pán kráľ sa pri tejto udalosti tak napajedil, až mu nezostalo nič iné ako ísť za kráľovským doktorom. Ten ho pozorne počúval a napokon povedal: „Vaša výsosť, Vy sa neustále sťažujete. Mali by ste sa viac starať o svoju váhu.“

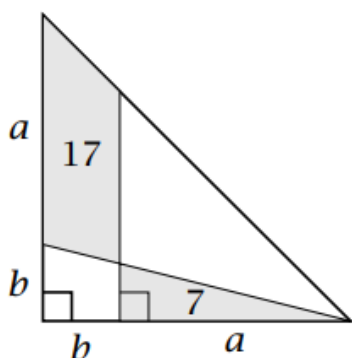
Od návštevy lekára kráľovu váhu pravidelne čistí p sluhov a udržiava ju q údržbárov. Pritom p, q sú prvočísla také, že $2^2 + p^2 + q^2$ je tiež prvočíslo. Nájdite všetky dvojice prvočísel p, q .

1.4 Krásny Mocný Sluha

levely L1 až L4, max. 7 bodov

Na druhý deň kráľa opäť navštívila jeho dcéra. „Otecko, sluha ma zbalil. Môžem sa vydávať?“ Kráľa tento vývin udalostí znepokojil. Je správne vydať princeznú za obyčajného sluhu? Pravda, novomanžel by mohol vyplácať záchrancov miesto neho... V tom mu však spadli oči do kúta siene.

V kúte sa nachádza princeznina batožina, ktorá má tvar pravouhlého trojuholníka. Sluha princeznú zbalil do dvoch vyznačených oblastí s obsahmi 17 a 7. Ďalej sú na obrázku vyznačené pravé uhly a úsečky dĺžok a a b na rôznych častiach trojuholníkov. Nájdite súčin $a \cdot b$.



1.5 Kopú Mriežku Stráže

levely L1 až L5, max. 7 bodov

Hneď ako kráľ pozbieral z kúta svoje oči, vzbĺkol hnevom. „Na žiadnu cestu sa vydávať nebudeš. Stráže! Okamžite dajte princeznú pod zámok!“ „Ako to myslíte, pod zámok?“ opýtal sa jeden strážnik. „Som váš punovník, moje príkazy máte splniť presne do slova a do písmena.“ A tak sa stráže vybrali kopať.

Stráže si zámok rozdelili na mriežku 8×8 . V každom políčku vykopalí jamu, do ktorej vložili jedno z čísel $1, 2, \dots, 64$ tak, že v prvom riadku boli čísla po poradí $1, 2, \dots, 8$, v druhom riadku zaradom $9, 10, \dots, 16$ a tak ďalej. Teraz do každého políčka ku číslu pripísali $+$ alebo $-$ tak, aby v každom riadku a každom stĺpci boli z každého znamienka práve 4 kusy. Dokážte, že súčet všetkých čísel v mriežke je 0.

1.6 Korunu Mučí Samota

levely L1 až L5, max. 7 bodov

Uväznenie princeznej prinieslo kráľovi len ďalšie problémy. Potreboval totiž nástupcu. Bez princeznej sa nemal ani len s kým poradiť. A tak v záchvate zúfalstva zavolať najbližšieho sluhu, aby mu predal korunu a poslal ho s ňou na trhy. Na trhoch predávali všetko možné aj nemožné. Sluha hneď zbadal zaujímavý vzťah pre ceny anduliek, bavlny a cíceru.

Dokážte, že pre kladné reálne čísla a, b, c platí:

$$\frac{b(2a-c)}{a} + \frac{c(2b-a)}{b} + \frac{a(2c-b)}{c} \leq \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a}.$$

1.7 Kúp Mi Sučku!

levely L1 až L5, max. 7 bodov

V zadaní bolo vyjasnené, že v oboch podmienkach sa pri výbere a a b môže jednať aj o toho istého psa.

Sluha sa obzeral po zvieratách, ktoré by mohli kráľovi robiť spoločníka. V jednom koterci mu do oka padol pes. Vytiahol si ho z oka, aby si ho lepšie obzrel. „Nemá tvár,“ pomyslel si. Predavača sa spýtal: „Koľko stojí tento pes?“ „Už dobré tri hodiny.“

V koterci sa nachádza aj veľa iných psov. Aby bolo možné určiť, ktorého chce zákazník kúpiť, tak sú očíslované celými číslami tak, že v koterci sa nachádza aspoň jeden pes s kladným a aspoň jeden so záporným číslom. Zároveň

ak majú nejaké **nie nutne rôzne** psy čísla a a b , tak existuje aj pes s číslom $a + b$. Dokážte, že potom ak majú nejaké **nie nutne rôzne** psy čísla a a b , tak existuje pes s číslom $a - b$.

1.8 Kde Máme Stanicu?

levely L1 až L5, max. 7 bodov

Medzitým sa v zemi prehrabával istý metrológ. Jeho životným cieľom bolo vymerať celé podzemie zámku a objaviť stratenú stanicu podzemnej dráhy. Miesto nej však našiel princeznú, a to na vcelku pozoruhodnom mieste.

Princezná sa nachádzala v strede vpísanej kružnice trojuholníka ABC označeného ako P . Nech X a Y sú postupne priesečníky kružníc opísaných trojuholníkom ABP a ACP s priamkami AC a AB rôzne od bodu A . Dokážte, že $|CX| = |BY|$.

1.9 Klobúk Môže Skladať

levely L4 až L5, max. 8 bodov

Metrológ sa rozhodol odniesť princeznú späť do zámku, veď ktovie, možno dostane nejakú odmenu. Ako každý správny chlap, pozná základy etikety a vie, že pri vstupe do trónnej sály musí zložiť čiapku. Vybral z vrečka teda jediný zdrap papiera, čo tam mal – malú nálepku – a pustil sa do toho.

Zložená čiapka mala tvar pyramídy zloženej zo štvorcových políčok. Jej základňa pozostávala z n políčok a každé vyššie poschodie malo o políčko menej ako predchádzajúce. V každom políčku základne bolo vpísané celé kladné číslo a zároveň každé políčko mimo základne malo vpísanú hodnotu, ktorá bola súčtom hodnôt 2 pod ním sa nachádzajúcich políčok. Vzhľadom na n určte, koľko najmenej hodnôt v pyramíde môže byť párnych.

1.10 Každú Menšinu Sčítame

levely L4 až L5, max. 10 bodov

Kráľa prepadlo čisté zúfalstvo, keď zbadal, že princezná má ďalšieho záchrancu. Zmohol sa tak len na jednoduchú otázku: „A vy chcete polku alebo princeznú?“ Metrológ sa na chvíľu zamyslel a potom položil vlastnú otázku: „A princezná je Slovenka?“

V kráľovstve sa nachádzalo n národnostných menšín, kde n je kladné celé číslo. Najpočetnejšou boli Jedniny, ale aj Poliek bolo dosť. Zapišeme číslo $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ ako zlomok $\frac{p_n}{q_n}$ v základnom tvare. Nájdite všetky n také, že q_n nie je deliteľné piatimi.