



Riešenia 2. kola zimnej časti

2.1 Kolekcia Mystických Skvostov

Zadanie.

„Vážení návštevníci, vitajte v Múzeu Legendárnych Objektov! Čaká na Vás expozícia toho najvzrušujúcejšieho, čo sa našim bádateľom podarilo vo svete objaviť. Ale dajte pozor! Mnohé objekty v našej zbierke obsahujú prastaré mýtické kúzla, ktoré môžu byť nebezpečné. Preto si, prosím, odložte svoje kabáty a batožinu do skriniek, aby Vám počas prehliadky nezavadzali.“

Skrinky v Múzeu Legendárnych Objektov sú číslované postupne, počnúc skrinkou číslo 1. Plastové číslice použité na očísľovanie skriniek stoja 2 centy za kus. Takže napríklad označenie skrinky číslo 9 stojí dva centy a označenie skrinky číslo 10 stojí 4 centy. Ak celkové náklady na očísľovanie všetkých skriniek sú 137 eur a 94 centov, koľko skriniek je v múzeu?

Riešenie.

opravuje **Matka** (martina.ganova@trojsten.sk)

Ako prvé skúsime zistiť, koľko číslic použili na očísľovanie všetkých skriniek. Celkovú sumu 137,94€ si premeníme na 13794 centov. Každá číslica stála 2 centy, takže číslic bolo $13794/2 = 6897$.

Teraz postupne vypočítame, koľko čísel vieme vyskladať z 6897 číslic.

- Na všetky jednociferné čísla, t. j. 1 až 9, potrebujeme 9 číslic, zostáva nám teda ešte $6897 - 9 = 6888$ číslic.
- Na všetky dvojciferné čísla, t. j. 10 až 99, potrebujeme $2 \cdot 90 = 180$ číslic a zostane nám ešte $6888 - 180 = 6708$ číslic.
- Na všetky trojciferné čísla, t. j. 100 až 999, potrebujeme $3 \cdot 900 = 2700$ číslic a zostane nám ešte $6708 - 2700 = 4008$ číslic.
- Na všetky štvorciferné čísla, t. j. 1000 až 9999 by sme potrebovali $4 \cdot 9000 = 36000$ číslic, čo je ale viac ako počet číslic, ktorý nám zostal. Zo 4008 číslic vieme vyrobiť $4008/4 = 1002$ štvorciferných čísel, čo budú čísla 1000 až 2001.

V Múzeu Legendárnych Objektov bolo 2001 skriniek.

2.2 Kosteja Malinká Slabosť

Zadanie.

„Na úvod tu máme pravdepodobne najkomplikovanejší nález zo všetkých – ihlu obsahujúcu dušu hrozného Kosteja. Toho môže zabiť len ten, kto má túto ihlu vo svojom držaní,¹ preto bola ukrytá vo vajci, ktoré v sebe niesla kačica ukrytá v zajacovi, ktorý žil v železnej truhlici skrytej v dube na ostrove Bujan uprostred oceána. Naším bádateľom

¹Takže v súčasnosti len Múzeum Legendárnych Objektov.

trvalo roky nájsť tento bájný ostrov, na ňom prehľadať všetky stromy, kým neobjavili ten so železnou truhlicou. Z tej následne ušiel zajac, ktorého museli chytiť. Následný lov vypustenej kačice aj rozbitie jej vajca boli už malinou...”

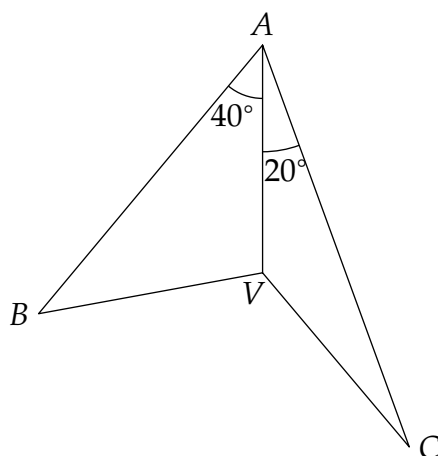
Kostejova duša, ktorej jedna časť je ukrytá v tu prítomnej ihle, pozostáva z dvoch rovnoramenných trojuholníkov VAB a VAC so základňami AB a AC . Trojuholníky zdieľajú rameno VA . Vieme, že $|\angle VAB| = 40^\circ$ a $|\angle VAC| = 20^\circ$.

- Vypočítajte veľkosť uhla BVC .
- Bod D zvolíme tak, aby platilo $|DV| = |BV|$, $|\angle VBD| = 10^\circ$ a aby sa úsečky BD a AV preťali. Vypočítajte veľkosť uhla BDC .

Riešenie.

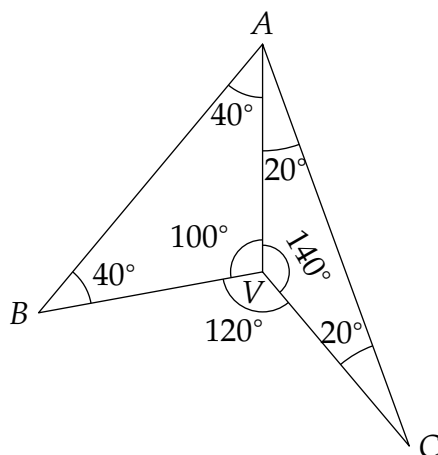
opravujú **Noro** (norbert.bielik@trojsten.sk) a **Jožtek** (jozef.rajnik@trojsten.sk)

Na začiatok si nakreslíme obrázok a vyznačíme si v ňom, čo máme zadané.



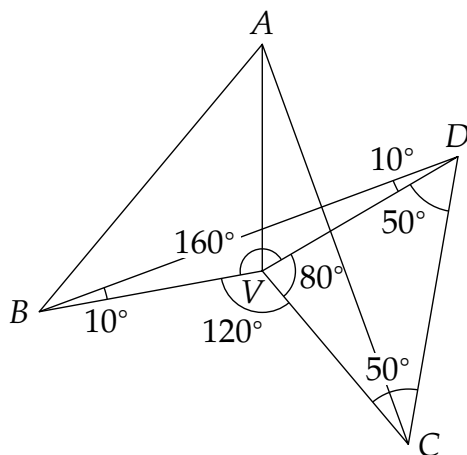
V rovnoramennom trojuholníku ABV sú uhly pri základni rovnaké. Preto $|\angle VBA| = |\angle VAB| = 40^\circ$. Dopočítaním uhlov do 180° potom dostaneme $|\angle AVB| = 100^\circ$. Rovnako pre rovnoramenný trojuholník ACV dopočítame $|\angle VCA| = 20^\circ$ a $|\angle AVC| = 140^\circ$. Na záver vieme veľkosť hľadaného uhla BVC zistiť odpočítaním z plného uhla:

$$|\angle BVC| = 360^\circ - |\angle AVB| - |\angle AVC| = 360^\circ - 100^\circ - 140^\circ = 120^\circ.$$



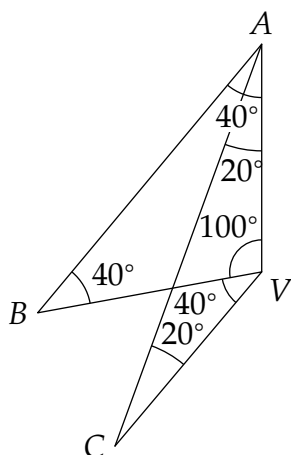
Teraz pristúpime k druhej časti. No je vhodné rozmyslieť si, ako do obrázku zaznačíme bod D . Trojuholník BDV je tiež rovnoramenný. Jeho základňa leží na polpriamke z bodu B , ktorá zvierá s úsečkou BV uhol 10° . Na našom obrázku sa táto polpriamka nachádza „nad“ úsečkou BV , aby nám prešla úsečkou BV . V rovnoramennom trojuholníku BDV máme druhý uhol pri základni s veľkosťou $|\angle VDB| = 10^\circ$, a teda oproti základni máme $|\angle BVD| = 160^\circ$. Ďalej si vieme dopočítať $|\angle AVC| = 360^\circ - |\angle BVD| - |\angle BVC| = 360^\circ - 160^\circ - 120^\circ = 80^\circ$. Potom v rovnoramennom trojuholníku CDV dopočítame zhodné uhly pri základni $|\angle VDC| = |\angle VCD| = (180^\circ - 80^\circ)/2 = 50^\circ$. Na záver veľkosť hľadaného uhla získame ako súčet

$$|\angle BDC| = |\angle VDB| + |\angle VDC| = 10^\circ + 50^\circ = 60^\circ.$$



Komentár 1

Väčšina z vás nám správne prečítala myšlienky, že sme v zadání mysleli, že sa trojuholníky VAB a VAC neprekývajú. Prísne vzaté sa však nič také v zadání nehovorí. Preto má úloha dve riešenia – druhým je $|\angle BVC| = 40^\circ$ a $|\angle BDC| = 20^\circ$. Oba uhly sa dajú vypočítať analogickým postupom, aký sme uviedli. Výpočet $|\angle BVC|$ naznačíme aj na obrázku.



Niektorí riešitelia uviedli práve túto možnosť ako (ich jediný) výsledok. Po správnosti by sme mali vyžadovať, aby ste v riešeniach uviedli obe možnosti. Nakoľko však išlo iba o úlohu 2 a aj nepozornosť na našej strane, tak nám stačilo jedno z týchto dvoch riešení. Treba si však na to dávať pozor. Pri vyšších úlohách je bežnou praxou, že treba rozlíšiť rôzne konfigurácie bodov, ktoré môžu vyžadovať mierne odlišné postupy riešenia (napr. uhly sa odčítavajú miesto sčítavania) a niekedy môžu viesť aj k odlišným výsledkom. Za ich ignorovanie môžete stratiť nejaké body.

Komentár 2

Čo by sa stalo, ak by sme miesto veľkostí uhlov VAB a VAC mali zadaný len ich súčet $|\sphericalangle BAC| = 60^\circ$? Úlohu by sme stále vedeli riešiť rovnakými myšlienkami. Stačí si označiť neznáme uhly ako $|\sphericalangle VAB| = \alpha$ a $|\sphericalangle VAC| = 60^\circ - \alpha$. Potom nám v stručnosti vyjde

$$|\sphericalangle BVC| = 360^\circ - (180^\circ - 2\alpha) - (60^\circ + 2\alpha) = 120^\circ.$$

Dokonca možno objaviť všeobecnejší záver, že uhol BVC má vždy dvojnásobnú veľkosť ako uhol BAC (kde by sme pri dôkaze potrebovali premennú navyše).

Tento všeobecný záver je známy z tvrdení o kružnici. Skutočne, vďaka zhodnosti dĺžok ramien $|VA| = |VB| = |VC|$ body A, B, C ležia na kružnici so stredom V . V takejto situácii sa uhol BVC nazýva *stredový uhol* a uhol BAC sa nazýva *obvodový uhol*. Stredový a obvodový uhol vždy prislúcha nejakému kružnicovému oblúku. V tomto prípade ide o oblúk BC , ktorý neobsahuje bod A . Veta o obvodovom a stredovom uhle vraví, že stredový uhol má dvojnásobnú veľkosť ako obvodový uhol prislúchajúci rovnakému oblúku. Dokazuje sa tak, ako sa rieši táto úloha, len všeobecnejšie so zopár premennými (a tiež rozlíšením viacerých prípadov, ako situácia môže vyzeráť).

Využite tejto vety je často kľúčové vo vyšších geometrických úlohách KMS. Samozrejme, aj v tejto úlohe ste ju mohli využiť (a to v oboch častiach) a napísať tak riešenie na pár riadkov.

2.3 Kuchíme Mýtické Stvorenie

Zadanie.

„Kotol, ktorý vidíte v tejto expozícii, je samotný Eldhrímnir. Ten používal slávny kuchár bohov, Andrímnir na prípravu Saehrímnira, mýtického stvorenia, ktoré každý deň znovu oživoval, aby ho mohol zabiť a pripraviť z neho boží pokrm aj nasledujúci deň. Okrem toho si tu môžete pozrieť aj krátky úryvok z jeho kuchárskej príručky.“

V Andhrímirovej kuchárskej príručke boli spomenuté dvojice celočíselných teplôt x, y . Prvá teplota x zodpovedá teplote varenia Saehrímnira a druhá teplota y zodpovedá teplote, akú musí mať pri oživovaní Saehrímnirove telo. Aby proces oživenia prebehol hladko, tak pre tieto teploty musí platiť:

$$3x^2y - 10xy - 8y - 17 = 0.$$

Andhrímirovi sa, samozrejme, nechce naveky pripravovať Saehrímnira rovnako. Nájdite preňho všetky možné dvojice príslušných teplôt. Na Asgarde existuje ľubovoľne nízka teplota, takže neuvažujte absolútnu nulu.

Riešenie.

opravujú Naťa (natalia.cigasova@trojsten.sk) a Oski (oskar.hritz@trojsten.sk)

Rovnicu si najprv upravíme na

$$\begin{aligned}3x^2y - 10xy - 8y - 17 &= 0, \\(3x^2 - 10x - 8)y &= 17.\end{aligned}$$

Všimneme si, že $3x^2 - 10x - 8$ vieme rozložiť na $3(x + \frac{2}{3})(x - 4)$, čo sme mohli zistiť zo vzorca pre korene kvadratickej rovnice, alebo z postupných úprav výrazu. Ďalej budeme používať tvar $(3x + 2)(x - 4)$. Dostávame tak

$$\begin{aligned}(3x^2 - 10x - 8)y &= 17, \\(3x + 2)(x - 4)y &= 17.\end{aligned}$$

Pamätajme ale, že x, y sú celočíselné. V celej úlohe budeme využívať, že násobenie, delenie, sčítanie a odčítanie medzi celými číslami nám dajú celé čísla.

Ľavá strana rovnice sa skladá zo súčinu troch výrazov, teda všetky tri tieto výrazy musia byť nejakým deliteľom 17. Číslo 17 je prvočíslo, teda má (celočíselných) deliteľov 1 a 17, pričom ale nemôžeme zabudnúť na -1 a -17 .

Všimnime si, že výraz $3x + 2$ nemôže byť 1 ani -17 , pretože potom by x nebolo celé. Zostávajú nám teda dva prípady:

- Výraz $3x + 2 = -1$, čiže $x = -1$. Potom však $x - 4 = -5$, čo nie je deliteľ -17 .
- Výraz $3x + 2 = 17$, čiže $x = 5$. Potom $x - 4 = 1$, čiže nám zostáva doplniť $y = 1$.

Dostali sme tak jediné riešenie, a to $x = 5, y = 1$.

2.4 Každého Moreplavca Svet

Zadanie.

„Teraz vstupujeme do najväčšej sály v múzeu. To, čo vidíte pred sebou, je Archa z vrchu Ararat. Na nej sa plavili slávny Utanapištim, Manu, Noe a Deukalión, keď zachraňovali ľudstvo a zverstvo pred veľkou potopou. Z daného obdobia sa nám zachovala aj istá dobová hra, ktorou si vyššie spomínané postavy mohli krátiť čas, kým sa spolu so zverincom plavili oceánom. Mohlo to vyzeráť napríklad takto.“

Kým sa Utanapištim prizeral, tak sa Deukalión, Noe a Manu hrali. Na začiatku má každý v ruke jednu zápalku a pred nimi je kôpka n zápaliiek. Vo svojom ťahu môže hráč vždy pridať 1 zápalku na strednú kopu (ak má nejakú v ruke) alebo si z kôpky vziať jednu zápalku do ruky. Hráč, ktorý už nevie spraviť ťah, prehrá. Začína Deukalión a potom sa striedajú do kruhu postupne s Noem a Manum. Navyše sa Manu a Noe spojili a dohodli sa, že budú hrať tak, aby určite prehral Deukalión. Dokáže vždy Deukalión donútiť Noeho alebo Manuma prehrať, bez ohľadu na to ako budú Noe a Manu hrať? Ak áno, ukážte ako má Deukalion postupovať. Ak nie, dokáže aspoň zabezpečiť, aby hra trvala donekonečna, alebo ho vedia Noe s Manum vždy poraziť? Aj v tomto prípade ukážte ako majú hráči v hre postupovať.

Riešenie.

opravujú Alic (alica.cimrakova@trojsten.sk) a Matúš (matus.jonastik@trojsten.sk)

Zo zadania vieme, že aby niekto prehral, musí mať na začiatku svojho ťahu nula zápalek v ruke a zároveň musí byť nula zápalek v strede na stole.

Našou prvou intuitívnou myšlienkou môže byť preto: Každý hráč sa snaží tento stav oddialiť čo najviac. A preto, pokiaľ má tú možnosť, vždy si vezme zápalku zo stredu stola — tým oddiali moment, keď sa sám ocitne bez zápalek a nemôže spraviť ťah. Pokiaľ by vždy len ťahal, nikdy by neprehral.

Avšak čo sa stane, pokiaľ by si náš hráč X zrazu nemohol potiahnuť? V tom prípade musí položiť zápalku zo svojej ruky do stredu. Môžeme si byť istí, že aspoň prvýkrát to bude môcť urobiť, keďže buď si v predošlom ťahu potiahol zápalku na ruku (tým pádom má na ruke aspoň jednu), alebo je začiatok hry (tým pádom tiež určite jednu má). Po tomto ťahu bude v strede jedna zápalka, ktorú tam hráč X položil.

Počas kola je parita počtu zápalek v strede po ťahu hráča X rovnaká, ako na začiatku jeho ďalšieho ťahu. Je to preto, lebo zvyšní dvaja hráči môžu spraviť len jednu z nasledovných kombinácií ťahov: $+1 +1$ (obaja pridávajú zápalku do stredu), $-1 -1$ (obaja odoberú zápalku zo stredu) a $+1 -1$ (jeden pridá a druhý odoberie, alebo naopak). Každá z týchto kombinácií zanecháva rovnakú paritu. Pred ďalším ťahom hráča X preto bude na stole buď znova 1 zápalka, alebo 3 (mínus jedna byť nemôže). Z toho vyplýva, že aspoň jedna tam určite je, a preto sa vraciame späť na začiatok, kedy si znova môže (a bude) brať na ruku.

Stratégia je preto nasledovná: *Ak môže – teda ak je v strede aspoň jedna zápalka – potiahne si zápalku zo stredu. Ak v strede žiadna zápalka nie je, jednu tam položí.* Týmto spôsobom teda hráč X určite nikdy neprehrá, a zároveň vie udržať hru donekonečna.

V zadaní sme sa pýtali na Deukalióna. Podľa tohto postupu by vedel držať hru donekonečna. Avšak pozor, treba zodpovedať všetky otázky zo zadania! Ešte preto treba zodpovedať otázku, či by vedel poraziť Noeho a Manua. To však nedokáže, keďže vyššie opísaná stratégia funguje bez ohľadu na to, či zvyšní dvaja hráči spolupracujú (postup sa týkal všeobecného hráča X , nie nutne Deukalióna). Tým pádom môže túto stratégiu použiť ktokoľvek, aj Noe a Manu, ktorí vďaka nej tiež nikdy neprehrajú.

2.5 Kreuje Maui Súostrovia

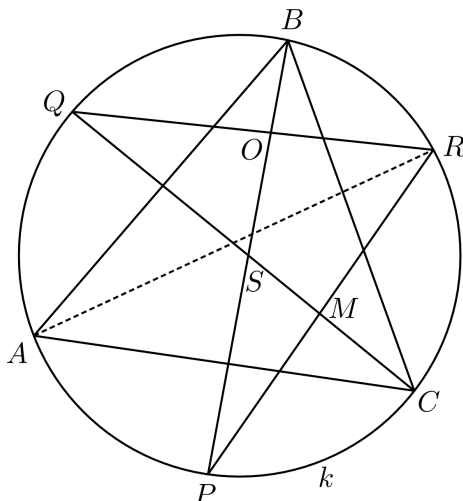
Zadanie.

„Ďalším vzácnym exponátom je Mauiho rybársky háčik. Ten si vytvoril sám, podľa niektorých z rybacej sánky, podľa iných z kostí svojich predkov. Faktom ostáva, že pomocou neho vylovil z hĺbok Pacifiku severný ostrov Nového Zélandu a dokonca aj Havajské súostrovie.“

Ostrov, ktorý Maui vylovil ako prvý, mal tvar rôznostranného ostrouhlého trojuholník ABC s opísanou kružnicou k . Osi vnútorných uhlov $\sphericalangle ABC$ a $\sphericalangle ACB$ pretnú kružnicu k postupne v bodoch P a Q . Nech R je ľubovoľný bod kratšieho oblúka BC rôzny od B, C a nech M, O sú po rade priesečníky PR s CQ a QR s BP . Dokážte, že stred **vpísanej** kružnice trojuholníka ABC leží na kružnici opísanej trojuholníku MOR .

Riešenie.

opravujú **Petr** (petr.velycko@trojsten.sk) a **Lukáš** (lukas.gaborik@trojsten.sk)



Začneme tým, že označíme ako S stred kružnice vpísanej trojuholníka ABC . Tento stred leží na priesečníku osí vnútorných uhlov trojuholníka ABC . Aby sme dokázali, že bod S leží na kružnici opísanej trojuholníku MOR , stačí ukázať, že štvoruholník $SORM$ je tetivový, teda že súčet veľkostí protilahlých uhlov je 180° .

Najprv určíme veľkosť uhla $\angle BSC \equiv \angle OSM$. Nech uhly trojuholníka ABC sú postupne α, β, γ . Potom uhol PBC má veľkosť $\beta/2$ a uhol QCB má veľkosť $\gamma/2$. Keďže súčet uhlov v trojuholníku je vždy 180° , vieme, že zostávajúci uhol má veľkosť presne $|\angle BSC| = |\angle OSM| = 180^\circ - \beta/2 - \gamma/2$.

Ďalej určíme veľkosť uhla $\angle PRQ \equiv \angle MRO$ (ktorý je protilahlý k uhlu $\angle OSM$). Všimneme si, že uhol ARQ má rovnakú veľkosť ako uhol ACQ , ktorého veľkosť je $\gamma/2$, preto aj $|\angle ARQ| = \gamma/2$. Toto plynie priamo z vety o obvodových uhloch. Analogicky dostávame, že $|\angle ARP| = |\angle ABP| = \beta/2$, a teda ich súčet je $|\angle MRO| = |\angle PRQ| = |\angle PRA| + |\angle ARQ| = \beta/2 + \gamma/2$.

Nakoniec môžeme jednoducho spočítať, že $|\angle OSM| + |\angle MRO| = 180^\circ - \beta/2 - \gamma/2 + \beta/2 + \gamma/2 = 180^\circ$, a teda náš štvoruholník je tetivový, čo znamená, že mu môžeme opísať kružnicu. Na tejto kružnici ležia body M, R, O , preto táto kružnica je taktiež kružnicou opísanou trojuholníka MRO .

2.6 Kamenné Medúzine Sochy

Zadanie.

„Sochy, okolo ktorých prechádzame nie sú súčasťou expozície, ale slúžia na výstrahu pre návštevníkov. Týmto smerom sa totiž nachádza náš najnebezpečnejší artefakt, hlava Medúzy. Z právnych dôvodov nie je pohľad na ňu súčasťou prehliadky, ale ako vidíte, niektorých odvážlivcov to neodradilo, aby sa neskúsili pozrieť...“

Tí najodvážnejší z návštevníkov Múzea Legendárnych Objektov ako posledné v živote videli hlavu bájenej Medúzy s hadmi namiesto vlasov. Každý z 12 hadov má nejakú reálnu (nie nutne rôznu) dĺžku z uzavretého intervalu $\langle 1 \text{ dm}, 12 \text{ dm} \rangle$. Dokážte, že vieme vybrať troch z týchto hadov tak, že ich dĺžky tvoria strany ostrouhlého trojuholníka.

Riešenie.

opravujú Bebe (alzbeta.klimentova@trojsten.sk) a BaškaN (barbora.novosadova@trojsten.sk)

Najprv sa musíme zamyslieť, čo znamená pre dĺžky strán trojuholníka, že je ostrouhlý. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme $0 < a \leq b \leq c$. Označme si najväčší uhol (oproti strane c) γ . Aby bol trojuholník ostrouhlý, musí platiť $\gamma < 90^\circ$, z čoho vyplýva, že $\cos(\gamma) > 0$. Tieto fakty vieme dosadiť do kosínusovej vety, čím dostaneme

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma) < a^2 + b^2.$$

Takže pre ostrouhlé trojuholníky platí $c^2 < a^2 + b^2$.

Teraz podme dokázať našu úlohu sporom. Predpokladajme teda, že by existovalo 12 čísel $a_1, a_2, \dots, a_{12}$, z ktorých by sme nemohli vybrať 3 tak, aby tvorili strany ostrouhlého trojuholníka. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_{12}.$$

A teda, aby sa zo žiadnej trojice strán nedal vytvoriť ostrouhlý trojuholník, musí pre všetky $i = 1, \dots, 10$ platiť:

$$a_{i+2}^2 \geq a_{i+1}^2 + a_i^2.$$

Teraz podme všetky tieto nerovnosti prepojiť do jednej. Najprv sa ale pozrime, ako spojíme dve takéto nerovnosti s koeficientmi k a l , kde $j > i$:

$$a_j^2 \geq k \cdot a_i^2 + l \cdot a_{i-1}^2 \geq k \cdot (a_{i-1}^2 + a_{i-2}^2) + l \cdot a_{i-1}^2 = (k+l) \cdot a_{i-1}^2 + k \cdot a_{i-2}^2.$$

Tu si môžeme všimnúť, že v každom kroku nahrádzame koeficient pri a_{i-1}^2 súčtom dvoch predchádzajúcich koeficientov a a_{i-2}^2 preberie koeficient od a_i^2 . Teda koeficienty v ďalších nerovnostiach vznikajú presne tak, ako sa vytvárajú čísla Fibonacciho postupnosti.

Začnime pri nerovnosti s koeficientmi 1 a 1:

$$a_{12}^2 \geq a_{11}^2 + a_{10}^2,$$

postupným skladaním 11 nerovností s prvou dostaneme

$$a_{12}^2 \geq F_{11} \cdot a_2^2 + F_{10} \cdot a_1^2 = 89a_2^2 + 55a_1^2.$$

Vieme, že $a_1, a_2 > 1$, a teda aj $a_1^2, a_2^2 > 1$. Preto:

$$a_{12}^2 > 55 + 89 = 144 \Rightarrow a_{12} > 12,$$

čo je spor s tým, že $a_{12} \in (1, 12)$.

Tým sme dokázali, že aspoň jedna trojica čísel musí spĺňať

$$c^2 < a^2 + b^2,$$

a teda vie tvoriť strany ostrouhlého trojuholníka.

2.7 Kráľ Musí Svietiť

Zadanie.

„Po svojej pravici teraz môžete vidieť trón perzského kráľa Džamšída. Tento trón si postavil sám panovník, aby ochránil svoj ľud pred ničivou zimou. Keď usadol na trón z pravých drahokamov, objavili sa démoni, ktorí ho podľa očitých svedkov vyniesli do výšok, odkiaľ žiaril ako slnko, čím odvrátil skazonosný mráz.“

Keď sa na trón poriadne zahľadíte, tak uvidíte rubíny a zafíry, z každého kameňa aspoň jeden kus. Pre ich počty r, z platí, že sú nesúdeliteľné a $r - z \mid r^2 - z$. Dokážte, že potom pre všetky kladné celé čísla a, b platí aj $r - z \mid r^a - z^b$.

Riešenie. opravujú **Brian** (brian.turza@trojsten.sk) a **Iľo** (michal.ilkovic@trojsten.sk)

Budeme využívať dve známe tvrdenia:

Tvrdenie 1. Nech a, b, c sú celé čísla také, že $a \neq 0$, $a \mid b$ a $a \mid c$. Potom $a \mid b - c$.²

Tvrdenie 2. Nech $q \neq 1$ je celé číslo a n je kladné celé číslo. Potom platí $q - 1 \mid q^n - 1$.³

Teraz už môžeme dokázať našu úlohu. Zo zadania platí, že $r - z \mid r - z$ a $r - z \mid r^2 - z$. Takže podľa tvrdenia 1 delí $r - z$ aj rozdiel:

$$r - z \mid (r^2 - z) - (r - z) = r^2 - r = r(r - 1). \quad (7.1)$$

Označme si najväčšieho spoločného deliteľa čísel r a $r - z$ ako d . Potom z tvrdenia 1 platí, že $d \mid r - (r - z) = z$. Takže d delí r aj z zároveň. Tie sú zo zadania nesúdeliteľné, takže $d = 1$ a tým sme dokázali, že aj r a $r - z$ sú nesúdeliteľné. Z toho už dostávame, že $r - z \mid r - 1$. Zároveň $r - z \mid (r - 1) - (r - z) = z - 1$. Z tvrdenia 2 platí, že $r - 1 \mid r^a - 1$ a $z - 1 \mid z^b - 1$ pre všetky kladné celé čísla a, b . Takže z tvrdenia 1: $r - z \mid (r^a - 1) - (z^b - 1) = r^a - z^b$. $\square$

2.8 Kanoe – Magická Stíhačka

Zadanie.

„Kanoe, na ktoré sa práve pozeráte, začaroval samotný diabol. Len na ňom mohli inak poctiví kanadskí drevorubači doletieť včas domov na silvestrovské oslavy.“

Drevorubači boli rozdelení na dve strany kanoe tak, že na pravej strane ich je menej ako na ľavej strane. Každý drevorubač má na chrbte vytetované jedno alebo viac rôznych čísel, pričom dvaja drevorubači môžu zdieľať spoločné číslo. Pre každé číslo zadefinujeme premiešanie tak, že všetci drevorubači, ktorí majú vytetované dané číslo sa presunú na opačnú stranu kanoe. Ukážte, že je vždy možné si vybrať postupnosť čísel tak, aby po všetkých premiešaniach týmito číslami skončilo na pravej strane viac drevorubačov ako na ľavej.“

Riešenie. opravujú **Dominik** (dominik.rigas@trojsten.sk) a **Krivoš** (jakub.krivosik@trojsten.sk)

Nech na začiatku je na pravej strane množina drevorubačov R , a na ľavej L , kde $|L| > |R|$. Označme C množinu všetkých čísel, ktoré majú drevorubači na chrbtoch. Všimnime si, že ak premiešame tým istým číslom dvakrát, nič sa nezmení. Preto nás pri každom čísle $z \in C$ zaujíma iba parita počtu premiešaní týmto číslom. Preto premiešanie môžeme vlastne chápať ako výber nejakej podmnožiny P z C , pri ktorom každý drevorubač ktorý má na chrbte nepárne veľa čísel z P zmení stranu, a drevorubač ktorý má na chrbte párne veľa čísel z P ostane na svojej strane (P sú vlastne iba všetky tie čísla z C ktorými sme premiešavali nepárne veľa krát). Množiny, ktoré vzniknú z R, L do premiešaní P označme R_P, L_P . Uvažujme teraz hodnotu

$$S = \sum_{P \subseteq C} (|R_P| - |L_P|)$$

² b, c sú násobky čísla a , takže aj ich rozdiel bude násobok a .

³pretože $(q - 1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1) = q^n - 1$.

(teda sumujeme cez všetky rôzne premiešania $P \subseteq C$ ako sme ich definovali vyššie). Pozrime sa na jedného konkrétného drevorubača d s číslami na chrpte C_d . Potom drevorubač d zmení pri premiešaní P stranu práve vtedy, ak sme do P vybrali nepárne veľa prvkov z C_d . Avšak nepárnych podmnožín C_d je rovnako veľa ako párnych podmnožín C_d ,⁴ a zvyšok čísel z $C \setminus C_d$ vieme do P doplniť rovnako veľa spôsobmi v oboch prípadoch. Teda existuje rovnako veľa premiešaní $P \subseteq C$ takých, že $|P \cap C_d|$ je párne (teda drevorubač d ostane na svojej strane), ako takých premiešaní $P \subseteq C$, že $|P \cap C_d|$ je nepárne (teda drevorubač d zmení stranu). Z toho vyplýva, že v sume S , započítame každého drevorubača rovnako veľa krát na pravej strane (v množine R_P), ako na ľavej strane (v množine L_P). Preto dostávame $S = 0$.

Všimnime si, že $|R_\emptyset| - |L_\emptyset| = |R| - |L| < 0$ zo zadania. Nakoľko $S = 0$ a suma S v sebe má záporný sčítanec, tak to znamená, že musí mať aj kladný sčítanec, teda existuje premiešanie P také, že $|R_P| - |L_P| > 0$, teda $|R_P| > |L_P|$.

2.8 Iné riešenie (pravdepodobnostná formulácia)

Zostrojme bipartitný graf s partitami D a C . Vrcholy v D budú reprezentovať drevorubačov, vrcholy v C budú reprezentovať čísla. Hrana medzi vrcholmi $d \in D$ a $c \in C$ vedie práve vtedy keď drevorubač d má vytetované číslo c na chrpte. Každý vrchol $d \in D$ ofarbíme načierno, ak drevorubač d sa nachádza naľavo a nabiele, ak sa d nachádza napravo. Potom premiešanie zo zadania znamená, že si vyberieme vrchol $c \in C$ a každému jemu susednému vrcholu z D zmeníme farbu. Chceme ukázať, že ak začíname s viac čiernymi vrcholmi ako s bielymi, tak vieme po konečnom počte operácií skončiť s viac bielymi vrcholmi ako čiernymi.

Lemma 1. Nech je a čiernych vrcholov a b bielych vrcholov, pričom $a > b$. Potom vieme spraviť operácie tak, aby sme skončili s viac ako b bielymi vrcholmi.

Dôkaz. Každý vrchol z C vyberieme so šancou $p = \frac{1}{2}$. Ukážeme, že každý vrchol v D má šancu $\frac{1}{2}$ zmeniť svoju farbu. Zoberme si ľubovoľný vrchol $d \in D$ a nech susedí práve s vrcholmi $c_1, c_2, \dots, c_k \in C$. Farbu zmení, ak je počet aktivovaných c_i nepárny. Pozrime sa, aká je šanca, že aktivujeme nepárny počet vrcholov, keď postupne aktivujeme vrcholy $c_1, c_2, \dots, c_k$, každý so šancou $\frac{1}{2}$. Nech máme l aktivovaných vrcholov medzi vrcholmi $c_1, c_2, \dots, c_{k-1}$. Ak je l nepárne, tak je šanca $\frac{1}{2}$, že neaktivujeme vrchol c_k , teda že celkovo budeme mať nepárny počet aktivovaných vrcholov medzi $c_1, c_2, \dots, c_k$. Podobne ak je l párne, tak je šanca $\frac{1}{2}$, že aktivujeme vrchol c_k , teda že budeme mať nepárny počet aktivovaných vrcholov v medzi $c_1, c_2, \dots, c_k$. Celkovo teda máme šancu $\frac{1}{2}$, že bude počet aktivovaných vrcholov medzi $c_1, c_2, \dots, c_k$ nepárny. To znamená, že pre ľubovoľné $d \in D$ je šanca, že zmení farbu $\frac{1}{2}$. Z linearity strednej hodnoty potom plynie, že stredná hodnota počtu čiernych vrcholov, ktoré zmenia farbu je $\frac{a}{2}$ a stredná hodnota počtu bielych vrcholov, ktoré zmenia farbu $\frac{b}{2}$.⁵ Keďže $a > b$, tak $\frac{a}{2} > \frac{b}{2}$, teda v strednej hodnote sa nám zvýši počet bielych vrcholov, teda musí existovať spôsob, ako aktivovať niekoľko vrcholov z C tak, aby sa počet bielych vrcholov zväčšil. $\square$

Lemma 2. Nech je a čiernych a b bielych vrcholov, pričom $a = b$. potom vieme spraviť operácie tak, aby sme skončili s viac ako b bielymi vrcholmi.

Dôkaz. Opäť každý vrchol z C vyberieme so šancou $p = \frac{1}{2}$. Avšak tentokrát dostaneme, že stredná hodnota prírastku bielych vrcholov je 0. V zadaní sme začínali s viac čiernymi vrcholmi, preto musí existovať do našej terajšej situácie (kde je rovnaký počet bielych a čiernych vrcholov) postupnosť aktivácií vrcholov z C , ktorá zvyšuje

⁴Naozaj, jeden prvok si zvolíme za "špeciálny", a potom všetky podmnožiny môžeme popárovať do dvojíc s rôznou paritou veľkostí – konkrétne na také dvojice ktoré sa líšia iba v tom či tam náš špeciálny prvok je alebo nie je.

⁵Formálne, pre každý čierny vrchol definujeme náhodnú premennú X_i ($i = 1, 2, \dots, a$), takú, že $X_i = 1$ ak tento vrchol zmení farbu a $X_i = 0$ ak ostane čierny. Potom $\mathbb{E}[\sum X_i] = \sum \mathbb{E}[X_i] = \sum \frac{1}{2} = \frac{a}{2}$. Podobne pre biele vrcholy.

počet bielych vrcholov. Keď však túto istú postupnosť aktivácií aplikujeme na terajšie rozloženie s rovnakým počtom čiernych a bielych, dostaneme sa do počiatočného rozdelenia, a teda táto postupnosť zníži počet bielych vrcholov. Ale keďže v strednej hodnote nám náhodný výber dáva počet pridaných bielych vrcholov 0, tak musí existovať aj taká postupnosť aktivácií vrcholov z C , čo zvýši počet bielych vrcholov. $\square$

Opakovaným používaním Lemmy 1, prípadne jedným použitím Lemmy 2 dostávame, že existuje postupnosť premiešania taká, že po ich dokončení bude existovať viac bielych ako čiernych vrcholov.

2.9 Kliatba Mocná Strašná

Zadanie.

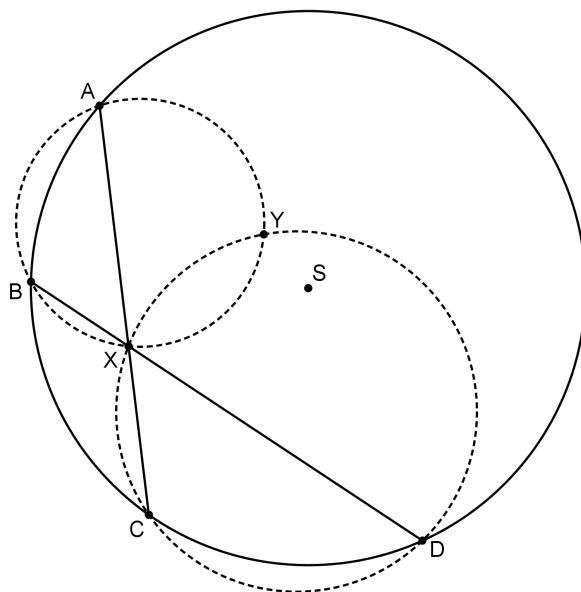
„Prsteň v tejto vitríne je slávny Andvaranaut, ktorý pomáhal trpaslíkovi Andvarimu hľadať zlato. Keď mu ho však boh Loki ukradol spolu s jeho pokladom, Andvari tento prsteň prekliat. Loki sa však kliatbe vyhol, keďže prsteň stihol darovať kráľovi trpaslíkov, Hreidmarovi, aby si ho udobril potom, ako nechtiac zabil jeho syna.“

Pečať na prstene má tvar kružnice k so stredom S , v ktorom sú vyznačené body A, B, C, D tak, aby sa úsečky AC a BD pretínali v bode $X \neq S$. Kružnice opísané ABX a CDX sa pretnú v bode $Y \neq X$ a kružnice BCX a DAX sa pretnú v bode $Z \neq X$. Dokážte, že body X, Y, Z, S ležia na kružnici.

Riešenie.

opravuje Mišo M. (michal.molnar@trojsten.sk)

Než sa pustíme do riešenia, uvedomme si, že ak sa majú úsečky AC a BD pretnúť, body A, B, C, D musia ležať na kružnici k v tomto poradí. Zároveň si môžeme všimnúť, že bod Y bude ležať buď medzi polpriamkami XA a XD alebo medzi XB a XC . Podobne bod Z môže ležať medzi XA a XB alebo medzi XC a XD .



Zamerajme sa teraz na bod Y . Keďže máme v zadaní viacero kružníc so spoločnými bodmi, môžeme skúsiť medzi nimi poprenášať nejaké uhly. Bod Y nemôže ležať aj na oblúku oproti bodu A aj oproti bodu B , tak bez újmy na všeobecnosti predpokladajme, že leží oproti bodu B . Na kružnici tak budú v poradí A, B, X, Y . Na druhej kružnici potom dostaneme už jednoznačne poradie C, D, Y, X .

Označme $\alpha = |\angle BAC|$. Vďaka obvodovým uhlom na kružnici k vieme tiež, že $|\angle BDC| = \alpha$. Teraz by sme sa radi pozreli na kružnice, ktoré nám definovali bod Y . Vďaka kružnici opísanej ABX dostaneme

$$|\angle BYX| = |\angle BAX| = \alpha,$$

a vďaka kružnici opísanej CDX zas

$$|\angle CYX| = |\angle CDX| = \alpha.$$

Dostávame $|\angle BYX| = |\angle CYX|$, takže bod X leží na osi uhla $\angle BYC$.

Druhá vec, ktorú z tohto môžeme vyvodíť je veľkosť uhla $\angle BYC$, ktorá je 2α . Bod S , ktorý sme zatiaľ nepoužili, tiež spĺňa, že $|\angle BSC| = 2\alpha$, keďže sa jedná o stredový uhol k uhlu $\angle BAC$ na kružnici k .

Ak by bod Y ležal v rovnakej polrovine danej priamkou BC ako bod S , tak by B, C, S, Y ležali na kružnici. To, že tieto štyri body ležia na kružnici, však vieme dokázať aj bez tohto faktu, s využitím *orientovaných uhlov*. Vďaka ich využitiu sa síce nedozvieme, či body Y a S ležia v rovnakej polrovine, no dozvieme sa, či sú spolu s B a C na jednej kružnici.⁶

Postup bude vlastne rovnaký, ako v prvej časti riešenia. Keďže A, B, C, D ležia na kružnici, platí $\angle BAC = \angle BDC$. Keďže bod X leží na priamkach AC a BD , môžeme písať $\angle BAX = \angle XDC$. Spolu s kružnicami opísanými $ABXY$ a $CDXY$ dostaneme zas

$$\angle BYX = \angle BAX = \angle XDC = \angle XYC.$$

Opäť tak dostaneme

$$\angle BYC = \angle BYX + \angle XYC = 2\angle BYX = 2\angle BAC = \angle BSC.$$

Keďže sa tieto orientované uhly rovnajú, body B, C, Y, S ležia na kružnici.

Spolu s informáciou, že $|\angle BYC| = |\angle BSC|$ to znamená, že bod Y leží v rovnakej polrovine danej BC ako bod S . Ten však zároveň leží na osi úsečky BC , keďže je to stred kružnice na ktorej ležia body B a C . Skúsený riešiteľ si hneď všimne, že sa jedná o tzv. anti-Švrčkov bod. V obyčajnom Švrčkovom bode (značíme $\check{S}$) sa pretína os uhla, os protiláhlej strany a opísaná kružnica. Anti-Švrčkov bod leží presne oproti nemu, takže $\check{S}\check{S}$ je vlastne priemer našej kružnice. Uhol $\angle SY\check{S}$ je teda pravý a rovnako tak aj uhol $\angle SYX$, keďže X tiež leží na tejto osi uhla.

Tým pádom už máme hotovo. Rovnaký postup totiž vieme použiť aj na to, aby sme ukázali, že uhol $\angle SZX$ je pravý. Vďaka Tálesovej vete potom vieme povedať, že Y aj Z ležia na kružnici s priemerom SX , z čoho vyplýva požadované tvrdenie.

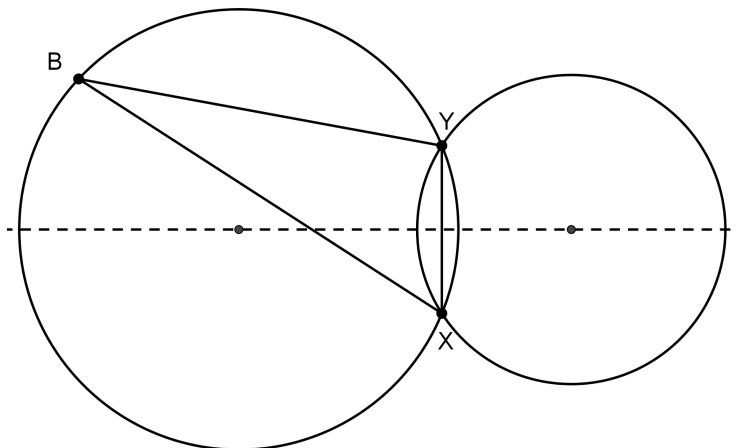
Dôkaz, že B, C, S, Y ležia na kružnici, bez orientovaných uhlov

Pripomeňme, že na to, aby B, C, S, Y ležali na kružnici, stačí aby bod Y ležal v rovnakej polrovine danej priamkou BC ako bod S . Predpokladajme najprv, že to **neplatí**, t. j. bod Y leží v opačnej polrovine ako bod S .

Uvedomme si, že sme na začiatku predpokladali, že Y je v rovnakej polrovine danej priamkou BX ako bod A , takže leží medzi polpriamkami XA a XD . Body A, D, Y tak musia ležať v tej istej polrovine danej priamkou BC a teda v opačnej ako je bod S . Uhol $\alpha = |\angle BAC|$ je teda nutne tupý (keďže leží v opačnej polrovine ako stred opísanej kružnice).

⁶Nám sa však v riešení zide vedieť, v ktorej polrovine bod S leží, preto sme sa zaoberali aj obyčajnými uhlami. Navyše, orientované uhly by nám povedali, že X leží na osi uhla medzi priamkami BY a CY , no nepovedali by nám na osi ktorého.

Kružnice opísané ABX a CDX majú spoločnú tetivu XY , viď obrázok. Na jej osi teda ležia stredy oboch kružníc. Táto os zároveň vyčleňuje dve polroviny – tú s bodom Y budeme nazývať „nad osou“, tú s bodom X „pod osou“. Aby bol uhol $\angle BYX$ tupý, musí Y ležať v opačnej polrovine danej BX ako stred kružnice. Inými slovami, úsečka BX musí prejsť medzi bodom Y a stredom kružnice, takže bod B musí ležať „nad osou“.



Analogicky, aby bol uhol $\angle CYX$ tupý, musí aj bod C ležať „nad osou“. Spomeňme si, že na týchto kružniciach ležali body v poradí A, B, X, Y a C, D, Y, X . To znamená, že aj bod A musí ležať „nad osou“, takže celá úsečka AC leží „nad osou“, čo je v spore s tým, že bod X na nej leží.

2.10 Kúpim Mamke Suvenír

Zadanie.

„Vážení návštevníci, dúfame, že sa Vám prehliadka nášho múzea páčila, naučili ste sa počas nej niečo a odnášate si množstvo informácií o artefaktoch, ktoré boli ešte donedávna považované za mýty. Predtým, ako definitívne opustíte Múzeum Legendárnych Objektov, prosím, prejdite si ešte náš darčekový obchod, v ktorom si môžete na pamiatku kúpiť repliku vášho obľúbeného artefaktu, ale aj množstvo ďalších spomienkových predmetov. Ďakujeme a dovidenia.“

Pre tých, ktorí si nevedia vybrať darček sami, majú v obchode múzea poradcu, funkciu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, zo zážitkov do darčiekov. Na to musí funkcia spĺňať, že pre každú dvojicu reálnych čísel x, y platí:

$$f(xf(y) + x^2 + y) = f(x)f(y) + xf(x) + f(y).$$

Nájdite všetky takéto funkcie.

Riešenie.

opravuje Šošo (jakub.sosovicka@trojsten.sk)

Vyhovujú funkcie $f(x) = ax$ pre ľubovoľné reálne a .

Dosadzujeme najskôr nuly. Po dosadení $(0, 0)$ dostávame $f(0) = f(0)^2 + f(0)$, teda $f(0) = 0$. Dosadením $(x, 0)$ dostaneme:

$$f(x^2) = xf(x). \quad (10.1)$$

Dosadením $-x$ do tejto rovnice vidíme, že $xf(x) = -xf(-x)$, teda $f(x) = -f(-x)$ (aj pre $x = 0$), teda funkcia je nepárna.

Ďalšie priamočiare dosadenia, ktoré by dali niečo zaujímavé možno už nevidno na prvý pohľad. Na pravej strane máme ale $xf(x)$, čo už vieme, že je $f(x^2)$. Mohli by sme preto z ľavej strany spraviť $f(x^2)$ aby sa nám niečo pokrátilo. Teda chceme zvoliť $xf(y) + y = 0$. Teda chceme $x = -\frac{y}{f(y)}$. To nemôžeme spraviť pre nulové $f(y)$, ale predpokladajme, že existuje y , pre ktoré $f(y) \neq 0$. Dosadením $(-\frac{y}{f(y)}, y)$ dostávame $f(y)(f(-\frac{y}{f(y)}) + 1) = 0$, teda $f(-\frac{y}{f(y)}) = -1$ a z nepárnosti $f(\frac{y}{f(y)}) = 1$.

Pokiaľ by sme vedeli, že f je prostá, tak $\frac{y}{f(y)}$ by nadobúdalo iba jednu hodnotu a mali by sme skoro hotovo. Stačilo by nám dokonca, keby z $f(a) = f(b) = 1$ vyplývalo $a = b$ (f je prostá v jednotke). Predpokladajme teda $f(a) = f(b) = 1$. Potom z (10.1) máme $f(a^2) = a$, $f(b^2) = b$. Po chvíli skúšania nám potom napadne dosadiť (a, b^2) , čím dostaneme:

$$f(ab + a^2 + b^2) = b + a + b = a + 2b.$$

Ľavá strana je symetrická, tak dosadíme aj (b, a^2) . Naľavo dostaneme rovnaký výraz a napravo dostaneme symetricky $2a + b$. Porovnaním pravých strán máme $a = b$.

Z toho dostávame, že existuje najviac jedno pevné a také, že $f(a) = 1$. Potom pre všetky y je buď $\frac{y}{f(y)} = a$, alebo $f(y) = 0$. Preto buď $f(y) = \frac{1}{a}y = a'y$, alebo $f(y) = 0$ (pre $y = 0$ nastane druhá možnosť a inak je $a \neq 0$).

Chceli by sme dokázať, že buď pre každé y nastane prvá možnosť, alebo pre každé y nastane druhá možnosť. Nech sporom $f(y) = a'y \neq 0$ a $f(z) = 0, z \neq 0$. Dosadíme (y, z) a dostaneme $f(y^2 + z) = yf(y)$. Pravá strana je nenulová, teda aj ľavá musí byť. Potom nutne $a'(y^2 + z) = ya'y$, teda $a'z = 0$, čo je spor. Preto nutne $f(x) = a'x$ pre a' reálne (to zahŕňa aj nulový prípad).

Ešte treba overiť, že tieto funkcie splňajú zadanie, čo sa triviálne overí.