



Zadania 2. kola zimnej časti

Termín odoslania 27. október 2025

V prípade otázok k zadaniam nás neváhajte kontaktovať na kms@kms.sk.

2.1 Kolekcia Mystických Skvostov

level L1, max. 7 bodov

„Vážení návštevníci, vitajte v Múzeu Legendárnych Objektov! Čaká na Vás expozícia toho najvzrušujúcejšieho, čo sa našim bádateľom podarilo vo svete objaviť. Ale dajte pozor! Mnohé objekty v našej zbierke obsahujú prastaré mýtické kúzla, ktoré môžu byť nebezpečné. Preto si, prosím, odložte svoje kabáty a batožinu do skriniek, aby Vám počas prehliadky nezavadzali.“

Skrinky v Múzeu Legendárnych Objektov sú číslované postupne, počnúc skrinkou číslo 1. Plastové číslice použité na očíslovanie skriniek stoja 2 centy za kus. Takže napríklad označenie skrinky číslo 9 stojí dva centy a označenie skrinky číslo 10 stojí 4 centy. Ak celkové náklady na očíslovanie všetkých skriniek sú 137 eur a 94 centov, koľko skriniek je v múzeu?

2.2 Kostejava Malinká Slabosť

levely L1 až L2, max. 7 bodov

„Na úvod tu máme pravdepodobne najkomplikovanejší nález zo všetkých – ihlu obsahujúcu dušu hrozného Kosteja. Toho môže zabiť len ten, kto má túto ihlu vo svojom držaní,¹ preto bola ukrytá vo vajci, ktoré v sebe niesla kačica ukrytá v zajacovi, ktorý žil v železnej truhlici skrytej v dube na ostrove Bujan uprostred oceána. Naším bádateľom trvalo roky nájsť tento bájný ostrov, na ňom prehľadať všetky stromy, kým neobjavili ten so železnou truhlicou. Z tej následne ušiel zajac, ktorého museli chytiť. Následný lov vypustenej kačice aj rozbitie jej vajca boli už malinou...“

Kostejava duša, ktorej jedna časť je ukrytá v tu prítomnej ihle, pozostáva z dvoch rovnoramenných trojuholníkov VAB a VAC so základňami AB a AC. Trojuholníky zdieľajú rameno VA. Vieme, že $\angle VAB = 40^\circ$ a $\angle VAC = 20^\circ$.

- Vypočítajte veľkosť uhla BVC.
- Bod D zvolíme tak, aby platilo $|DV| = |BV|$, $\angle VBD = 10^\circ$ a aby sa úsečky BD a AV preťali. Vypočítajte veľkosť uhla BDC.

2.3 Kuchíme Mýtické Stvorenie

levely L1 až L3, max. 7 bodov

„Kotol, ktorý vidíte v tejto expozícii, je samotný Eldhrímnir. Ten používal slávny kuchár bohov, Andrímnir na prípravu Saehrímnira, mýtického stvorenia, ktoré každý deň znovu oživoval, aby ho mohol zabiť a pripraviť z neho boží pokrm aj nasledujúci deň. Okrem toho si tu môžete pozrieť aj krátky úryvok z jeho kuchárskej príručky.“

V Andhrímirovej kuchárskej príručke boli spomenuté dvojice celočíselných teplôt x, y . Prvá teplota x zodpovedá teplote varenia Saehrímnira a druhá teplota y zodpovedá teplote, akú musí mať pri oživovaní Saehrímnirove telo.

¹Takže v súčasnosti len Múzeum Legendárnych Objektov.

Aby proces oživenia prebehol hladko, tak pre tieto teploty musí platiť:

$$3x^2y - 10xy - 8y - 17 = 0.$$

Andhrímirovi sa, samozrejme, nechce naveky pripravovať Saehrímnira rovnako. Nájdite preňho všetky možné dvojice príslušných teplôt. Na Asgarde existuje ľubovoľne nízka teplota, takže neuvažujte absolútnu nulu.

2.4 Každého Moreplavca Svet

levely L1 až L4, max. 7 bodov

„Teraz vstupujeme do najväčšej sály v múzeu. To, čo vidíte pred sebou, je Archa z vrchu Ararat. Na nej sa plavili slávny Utanapištim, Manu, Noe a Deukalión, keď zachraňovali ľudstvo a zverstvo pred veľkou potopou. Z daného obdobia sa nám zachovala aj istá dobová hra, ktorou si vyššie spomínané postavy mohli krátiť čas, kým sa spolu so zverincom plavili oceánom. Mohlo to vyzeráť napríklad takto.“

Kým sa Utanapištim prizeral, tak sa Deukalión, Noe a Manu hrali. Na začiatku má každý v ruke jednu zápalku a pred nimi je kôpka n zápaliek. Vo svojom ťahu môže hráč vždy pridať 1 zápalku na strednú kôpu (ak má nejakú v ruke) alebo si z kôpky vziať jednu zápalku do ruky. Hráč, ktorý už nevie spraviť ťah, prehrá. Začína Deukalión a potom sa striedajú do kruhu postupne s Noem a Manum. Navyše sa Manu a Noe spojili a dohodli sa, že budú hrať tak, aby určite prehral Deukalión. Dokáže vždy Deukalión donútiť Noeho alebo Manuma prehrať, bez ohľadu na to ako budú Noe a Manu hrať? Ak áno, ukážte ako má Deukalion postupovať. Ak nie, dokáže aspoň zabezpečiť, aby hra trvala donekonečna, alebo ho vedľa Noe s Manum vždy poraziť? Aj v tomto prípade ukážte ako majú hráči v hre postupovať.

2.5 Kreuje Maui Súostrovia

levely L1 až L5, max. 7 bodov

„Ďalším vzácnym exponátom je Mauiho rybársky háčik. Ten si vytvoril sám, podľa niektorých z rybacej sánky, podľa iných z kostí svojich predkov. Faktom ostáva, že pomocou neho vylovil z hĺbok Pacifiku severný ostrov Nového Zélandu a dokonca aj Havajské súostrovia.“

Ostrov, ktorý Maui vylovil ako prvý, mal tvar rôznostranného ostrouhlého trojuholníka ABC s opísanou kružnicou k . Osi vnútorných uhlov $\sphericalangle ABC$ a $\sphericalangle ACB$ pretnú kružnicu k postupne v bodoch P a Q . Nech R je ľubovoľný bod kratšieho oblúka BC rôzny od B, C a nech M, O sú po rade priesečníky PR s CQ a QR s BP . Dokážte, že stred **vpísanej** kružnice trojuholníka ABC leží na kružnici opísanej trojuholníku MOR .

2.6 Kamenné Medúzine Sochy

levely L1 až L5, max. 7 bodov

V tomto zadaní bola pôvodne chyba, bol tam uzavretý interval miesto otvoreného.

„Sochy, okolo ktorých prechádzame nie sú súčasťou expozície, ale slúžia na výstrahu pre návštevníkov. Týmto smerom sa totiž nachádza náš najnebezpečnejší artefakt, hlava Medúzy. Z právnych dôvodov nie je pohľad na ňu súčasťou prehliadky, ale ako vidíte, niektorých odvážlivcov to neodradilo, aby sa neskúsili pozrieť...“

Tí najodvážnejší z návštevníkov Múzea Legendárnych Objektov ako posledné v živote videli hlavu bájnej Medúzy s hadmi namiesto vlasov. Každý z 12 hadov má nejakú reálnu (nie nutne rôznu) dĺžku z **otvoreného** intervalu (1 dm, 12 dm). Dokážte, že vieme vybrať troch z týchto hadov tak, že ich dĺžky tvoria strany ostrouhlého trojuholníka.

2.7 Kráľ Musí Svietiť

levely L1 až L5, max. 7 bodov

„Po svojej pravici teraz môžete vidieť trón perzského kráľa Džamšída. Tento trón si postavil sám panovník, aby ochránil svoj ľud pred ničivou zimou. Keď usadol na trón z pravých drahokamov, objavili sa démoni, ktorí ho podľa očitých svedkov vyniesli do výšok, odkiaľ žiaril ako slnko, čím odvrátil skazonosný mráz.“

Keď sa na trón poriadne zahľadíte, tak uvidíte rubíny a zafíry, z každého kameňa aspoň jeden kus. Pre ich počty r, z platí, že sú nesúdeliteľné a $r - z \mid r^2 - z$. Dokážte, že potom pre všetky kladné celé čísla a, b platí aj $r - z \mid r^a - z^b$.

2.8 Kanoe – Magická Stíhačka

levely L1 až L5, max. 7 bodov

„Kanoë, na ktoré sa práve pozeráte, začaroval samotný diabol. Len na ňom mohli inak poctiví kanadskí drevorubači doletieť včas domov na silvestrovské oslavy.“

Drevorubači boli rozdelení na dve strany kanoë tak, že na pravej strane ich je menej ako na ľavej strane. Každý drevorubač má na chrbte vytetované jedno alebo viac rôznych čísel, pričom dvaja drevorubači môžu zdieľať spoločné číslo. Pre každé číslo zadefinujeme premiešanie tak, že všetci drevorubači, ktorí majú vytetované dané číslo sa presunú na opačnú stranu kanoë. Ukážte, že je vždy možné si vybrať postupnosť čísel tak, aby po všetkých premiešaniach týmito číslami skončilo na pravej strane viac drevorubačov ako na ľavej.“

2.9 Kliatba Mocná Strašná

levely L4 až L5, max. 8 bodov

„Prsteň v tejto vitríne je slávny Andvaranaut, ktorý pomáhal trpaslíkovi Andvarimu hľadať zlato. Keď mu ho však boh Loki ukradol spolu s jeho pokladom, Andvari tento prsteň prekliat. Loki sa však kliatbe vyhol, keďže prsteň stihol darovať kráľovi trpaslíkov, Hreidmarovi, aby si ho udobril potom, ako nechtiac zabil jeho syna.“

Pečať na prstene má tvar kružnice k so stredom S , v ktorom sú vyznačené body A, B, C, D tak, aby sa úsečky AC a BD pretínali v bode $X \neq S$. Kružnice opísané ABX a CDX sa pretnú v bode $Y \neq X$ a kružnice BCX a DAX sa pretnú v bode $Z \neq X$. Dokážte, že body X, Y, Z, S ležia na kružnici.

2.10 Kúpim Mamke Suvenír

levely L4 až L5, max. 10 bodov

„Vážení návštevníci, dúfame, že sa Vám prehliadka nášho múzea páčila, naučili ste sa počas nej niečo a odnášate si množstvo informácií o artefaktoch, ktoré boli ešte donedávna považované za mýty. Predtým, ako definitívne opustíte Múzeum Legendárnych Objektov, prosím, prejdite si ešte náš darčkový obchod, v ktorom si môžete na pamiatku kúpiť repliku vášho obľúbeného artefaktu, ale aj množstvo ďalších spomienkových predmetov. Ďakujeme a dovidenia.“

Pre tých, ktorí si nevedia vybrať darček sami, majú v obchode múzea poradcu, funkciu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, zo zážitkov do darčkov. Na to musí funkcia spĺňať, že pre každú dvojicu reálnych čísel x, y platí:

$$f(xf(y) + x^2 + y) = f(x)f(y) + xf(x) + f(y).$$

Nájdite všetky takéto funkcie.