



Zadania 3. kola zimnej časti

Termín odoslania 24. november 2025

V prípade otázok k zadaniam nás neváhajte kontaktovať na kms@kms.sk.

3.1 Kopec Mrňavých Stvorení

level **L1**, max. **7 bodov**

Vraví sa, že nosiť deťom vianočné darčeky je pohodová práca, lebo väčšinu roka netreba pracovať. Keď si však Venezuela povie, že Vianoce budú už 1. októbra a nedá to vedieť ani mesiac dopredu, začne sa pravý zhon a problémy.

Santa si v zhone na sane vzal prvých troch škriatkov, ktorých našiel. Každý z nich je buď elf, alebo rarach. Elf vždy hovorí pravdu a rarach vždy klame. Uviedli nasledovné tvrdenia:

- Červený: „Zelený je rarach alebo modrý je elf.“
- Zelený: „Modrý a červený sú rarachovia.“
- Modrý: „Červený a zelený sú rarachovia.“

Ktorí z nich sú elfovia a ktorí rarachovia?

3.2 Korešpondencia Máta Santu

levely **L1** až **L2**, max. **7 bodov**

Santa dúfal, že si pred mainstreamovými Vianocami stihne ešte aspoň kúsok oddýchnuť, no len čo sa o jeho návrate dozvedeli elfovia, chodili za ním s rôznymi problematickými želaniami od detí. Ani netušil, že hneď to prvé mu spôsobí viac problémov ako celá Venezuela dokopy.

Keď list otvoril, tak v ňom videl roztráseným rukopisom nakreslený štvorec $SNEH$. Ďalej si všimol body U , A , ktoré postupne ležia v stredoch strán SN a NE . Úsečky SA a HU sa pretínajú v bode B . Dokážte, že trojuholník ABH má strany v pomere $3 : 4 : 5$ (v nejakom poradí). Aká bude dĺžka strany štvorca ak strany trojuholníka ABH budú 3, 4 a 5?

3.3 Kde Má Snežiť!?

levely **L1** až **L3**, max. **7 bodov**

Santa sprvu nechápal, prečo je to želanie označené ako problematické. Veď sneh si želajú deti každý rok. Potom mu však padol zrak na adresu odosielateľa, ktorý bol z... Austrálie?!

Na obálke bolo napísané austrálske poštové smerovacie číslo n . Santa naň vypúľil oči, n malo viac ako $n/2$ deliteľov! Nájdite všetky kladné celé n , ktoré mohol Santa uvidieť napísané na obálke.

3.4 Kanónu Meriame Súradnice

levely L1 až L4, max. 7 bodov

Keď si Santa uvedomil, že má dostať sneh do Austrálie uprostred tamojšieho leta, okamžite zvolal krízový štáb. Ten zasadal mnoho hodín a priniesol množstvo absurdných nápadov, kým sa dostali k riešeniu, ktoré je možné otestovať.

Na testovaciu plochu bolo treba rozmiestniť snežné delá tak, aby ju celú pokryli snehom. Súradnice, na ktorých sa nachádza snežné delo, sú dané trojicou reálnych čísel (x, y, z) . Výskumní ľadoví medvedi zistili, že stačí umiestniť delá na súradnice, ktoré spĺňajú nasledovnú sústavu rovníc

$$x(x + y) + z(x - y) = 6,$$

$$y(y + z) + x(y - z) = -2,$$

$$z(z + x) + y(z - x) = 6.$$

Nájdite všetky takéto trojice (x, y, z) .

3.5 Keď Mráz Sfukujeme

levely L1 až L5, max. 7 bodov

Prvotné fázy testovania prebehli mimoriadne úspešne. Až pri simulovaní austrálskych podmienok výskumní ľadoví medvedi odhalili problém: sneh sa pri teplotách nad 40°C takmer okamžite roztopí. A tak krízový štáb zasadal znova. Po dlhých hodinách útrap a starostí prišli k záveru, že do Austrálie skrátka treba nafúkať sneh aj s podnebí priamo z Antarktídy.

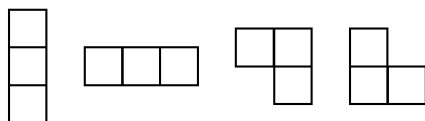
Každá veterná turbína potrebuje na svoju prevádzku rovnako veľký štvorcový areál. Santovi ekonómovia si vyhládli obdĺžnikový pozemok, ktorý sa dá rozdeliť na 200 rovnakých štvorcov. S týmto prišli za ľadovými medvedmi. Tí im povedali: „Viac.“ Ekonómovia išli premeriavať a zistili, že ten istý pozemok sa dá rozdeliť aj na 288 rovnakých štvorcov. Znovu prišli za ľadovými medvedmi, ktorí im opäť povedali: „Viac.“ Dokážte, že daný pozemok sa určite dá rozdeliť aj na 392 rovnakých štvorcov.

3.6 Krompáč, Motyka, Semtex

levely L1 až L5, max. 7 bodov

Po rozsiahlych masových protestoch spoločenstva tučniakov proti developerským plánom Santovej nadnárodnej korporácie bol Santa nútený opäť zvolať krízový štáb, tentoraz kvôli zrušeniu plánu s veternými turbínami. Opäť sa zasadalo mnoho hodín a Santa prepotil úporným rozmyšľaním všetky svoje červené čiapky. Vtom vkročil do miestnosti elf so spásonosnou myšlienkou.

Keďže rýľ a motyka boli na túto prácu málo, museli sa najatí záhradní trpaslíci naučiť zostavovať výbušniny. Dynamit má tvar štvorčekovej siete 7×7 . Na jedno políčko siete musia umiestniť rozbušku, zvyšok dynamitu musia pokryť výbušnými komponentami tvarov ako na obrázku. Komponenty nesmú otáčať ani prekryvať, inak by hrozilo samovoľné vznietenie. Nájdite všetky políčka, na ktoré môžu umiestniť rozbušku. Nezabudnite zdôvodniť, prečo na ostatných políčkach rozbuška byť nemôže.



3.7 Komando Mocných Sobov

levely L1 až L5, max. 7 bodov

Čas do Vianoc sa krátil, no tentoraz to bola jediná vec, ktorá stála v ceste uskutočneniu Santovho plánu. Už skúpil všetky oceľové laná, ktoré boli k dispozícii, zostávalo mu už len vycvičiť soby na ich novú špeciálnu úlohu...

Velitelia Santovej letky, Rudolf, Dasher a Blitzen zaujali formáciu, ktorá mala tvar rôznostranného trojuholníka RBD pričom pri vrchole R bol uhol 60° . Koniec lana bol uchytený v strede O kružnice opísanej tomuto trojuholníku. Nech U a V sú postupne päty kolmíc z bodu R na osi uhlov RBD a RDB . Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkmi RUV a BOD sa dotýkajú.

3.8 Krásny Miin Sen

levely L1 až L5, max. 7 bodov

Malá Mia sa v predvianočnú noc zobudila na zvláštne otrasy. Spomenula si, čo je za noc, a rozhodla sa vyzrieť z okna, aby videla, či sa jej splnil sen o zasnežených Vianociach. Vonku nesnežilo, z nebies však viseli akési hrubé kovové pásy. Nad mestom sa vznášal tmavý útvar, za ktorým sa v pozadí mihali hviezdy.

Mia má z tejto noci dva zážitky, reprezentované celými číslami m, n takými, že obe čísla

$$\frac{m^2 + n}{n^2 - m} \quad \text{a} \quad \frac{n^2 + m}{m^2 - n}$$

sú celé (nie nutne kladné). Nájdite všetky možné dvojice čísel (m, n) .

3.9 Kreslíme Mystické Symboly

levely L4 až L5, max. 8 bodov

Mia ani nevedela, ako znovu zaspala, no keď sa ráno zobudila, bola prekvapená, aká je jej zima. Poriadne sa poobliekala a keď vyšla von, zistila, že sa splnilo jej želanie. Vonku bol sneh, a to v množstve, ktoré nikdy predtým nevidela. Radostne zvéskla a vrhla sa do stavania snehuliakov. Nebola jediná, kto v čerstvom snehu šantil...

Nech p je prvočíslo. Deti si do snehu nakreslili kompletný graf so $42p$ vrcholmi. Na každú hranu napísali celé číslo. Dokážte, že existuje cyklus, ktorý má súčet čísel na hranách deliteľný číslom p .

3.10 Kto Melbourne Schoval?

levely L4 až L5, max. 10 bodov

Do zadania sme pridali podmienku, že trojuholník je rôznostranný.

Santa po niekoľkých namáhavých mesiacoch odpočíval na pláži pri zátok, ktorú pred necelým dňom obývalo mesto Melbourne. Bol so svojou prácou spokojný. Udržal si priazeň aj toho najnáročnejšieho dieťaťa, ktoré mu kedy napísalo. Ale vracieť mesto späť sa mu nateraz nechcelo...

Kreslo, v ktorom Santa vylihoval, malo tvar rôznostranného ostrouhlého trojuholníka ABC . Bola mu opísaná kružnica Γ , stred kružnice opísanej označíme ako O a ortocentrum ako H . Nech M, N sú postupne stredy strán AB a AC a nech E, F sú postupne päty výšok z B a C v trojuholníku ABC . Nech P je priesečník priamky MN



s dotyčnicou ku Γ v bode A . Nech $Q \neq A$ je priesečník Γ s kružnicou opísanou trojuholníku AEF . Nech R je priesečník priamok AQ a EF . Dokážte, že priamka PR je kolmá na priamku OH .