



Riešenia 1. kola zimnej časti

1.1 Komunálne Musíme Spratovať

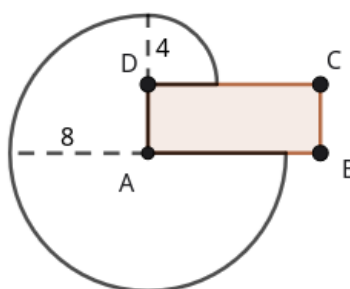
Zadanie.

Keď sa vedúci pozerali na KMS miestnosť, uvedomili si, že už by bolo na čase, aby ju zrenovovali. Lenže pred renováciou ju treba riadne upratať. Podarilo sa im už vypratať z miestnosti takmer všetko, avšak v strede zostala skriňa, ktorou nie a nie pohnúť. Rozhodli sa teda, že nejak sa to poupratuje aj napriek skrini.

Oski dostal za úlohu povysávať KMS miestnosť, ktorá má v strede nehybnú skriňu. Keď sa na miestnosť pozrel zhora, skriňa mala tvar obdĺžnika, so stranami dlhými 10 decimetrov a 4 decimetre. Vysávač mal zapojený do zásuvky priamo pri rohu skrine na zemi. Kábel, ktorým je vysávač zapojený, je dlhý 8 decimetrov. Akú veľkú plochu miestnosti vie Oski povysávať? Steny miestnosti sú dostatočne ďaleko, aby neprekážali vysávaču.

Riešenie. opravujú **Naťa** (natalia.cigasova@trojsten.sk) a **Klárka** (klarka.birova@trojsten.sk)

Úlohu si najprv reprezentujeme geometricky. Máme obdĺžnik $ABCD$ so stranami 10 dm a 4 dm, Oskiho vysávač bol zapojený v jednom rohu tohto obdĺžnika. Bez ujmy na všeobecnosti, povedzme, že je zapojený v bode A . Najprv sa podme pozrieť na hranicu, na ktorú vysávač ešte dosiahne so svojím káblom. Vysávač sa mohol pohybovať najďalej 8 dm pozdĺž strany AB a potom sa mohol otáčať po kružnici s polomerom 8 dm so stredom v bode A . Takto vedel vysávač prejsť tri štvrtiny kružnice, pokiaľ celá dĺžka kábla nepriliehala na stranu AD dlhú 4 dm. Aj v tomto prípade sa vie posúvať vysávač ďalej smerom k bodu C , avšak teraz sú 4 dm kábla zafixované na stene AD , a preto sa vie najďalej pohybovať po kružnici s polomerom 4 dm a so stredom v bode D . Takto vie prejsť až po stenu CD .



Vidíme, že naše hranice sú dané dvomi čiastočnými kružnicami a stranami obdĺžnika. Musíme si uvedomiť, že ak sa vysávač vedel dostať na hranicu tohto útvaru, vedel sa dostať aj na ľubovoľný bod tohto útvaru. Preto plocha, ktorú mohol Oski povysávať, bude súčet dvoch čiastočných kruhov. Prvý čiastočný kruh má polomer 8 dm a sú to tri štvrtiny z celého kruhu, preto má plochu $\frac{3}{4}\pi 8^2 \text{ dm}^2$. Druhý čiastočný kruh má polomer 4 dm

a je to jedna štvrtina z celého kruhu, preto má plochu $\frac{1}{4}\pi 4^2 \text{ dm}^2$. Spolu táto plocha je $\frac{3}{4}\pi 8^2 \text{ dm}^2 + \frac{1}{4}\pi 4^2 \text{ dm}^2 = 3 \cdot 16\pi \text{ dm}^2 + 4\pi \text{ dm}^2 = 52\pi \text{ dm}^2$.

Plocha, ktorú mohol Oski povysávať, bola $52\pi \text{ dm}^2$.

1.2 Kompetetivnosť Má Šmrnc

Zadanie.

Pred renováciou treba upratať aj riad. Problém však je, že všetok riad je špinavý a zo všetkých upratovacích prác je umývanie riadu tá najmenej žiadaná. Vedúci sa snažia dohodnúť, kto to teda všetko umyje, a vtom príde do miestnosti DenŤs, ktorému sa už vôbec nechce upratovať a tak navrhne, nech si zahrajú turnaj v BF (bottle flip) o to, kto ich bude umývať.

Turnaj sa skladal zo zápasov. V každom zápase hrali dvaja vedúci proti sebe. Ak vedúci vyhral, získal 3 body, ak remizoval, získal 1 bod, a ak prehral, nezískal žiadne body. Turnaj vyhrala ten vedúci, ktorý má najviac bodov. Vedúci v tomto turnaji hrali zápas každý s každým práve raz. Vieme, že keď turnaj skončil, vyhral ho práve jeden vedúci a ten mal v zápasoch aspoň toľko prehíer ako výhíer. Aký je najmenší počet vedúcich, ktorí mohli hrať tento turnaj? Pre daný počet ukážte, prečo by ich nemohlo byť menej.

Riešenie. opravujú **Košťá** (kostiantyn.popov@trojsten.sk) a **Denys** (denys.andrukhovskyi@trojsten.sk)

Stratégia riešenia bude nasledovná: budeme skúšať od najmenšieho počtu vedúcich, ktorý si označíme n , kým nenájde taký počet, pre ktorý vieme nájsť daný turnaj. Tým aj dokážeme, že pre všetky menšie počty to nie je možné.

Keďže turnaj niekto vyhral, $n = 0$ nie je možné. Zo zadania však priamo nevyplýva, že vedúcich je viac ako jeden. Keď si premyslíme, tak pre $n = 1$ by sa odohralo nula zápasov a jediný hráč má aspoň toľko prehíer (0), koľko výhíer (0). A keďže je jediný, tak zrejme vyhral turnaj. Takže technicky hodnota $n = 1$ by vyhovovala. Avšak z rozprávky a zámeru zadania je jasné, že hľadáme najmenší taký počet, pri ktorom sa aspoň jedna hra odohrala.

Začneme od $n = 2$. Označíme výhercu za A a iného hráča za B . Keďže A má aspoň toľko prehíer, koľko výhíer, a hral práve raz, existujú dve možnosti. Mohol remizovať; vtedy má jeden bod. Avšak potom aj B má jeden bod, a teda nie je výherca. Druhá možnosť je, že A prehral. Potom, zrejme, má menej bodov ako B .

Takže pre $n = 2$ taký turnaj neexistuje. Vyskúšajme $n = 3$. Nech zase víťazom turnaja je A , a iní hráči sú B a C . Skúsme analyzovať všetky možnosti.

1. Ak A aspoň raz vyhral, tak musel aj aspoň raz prehrať. Takže nech A zvíťazil nad B , a C zvíťazil nad A . Potom C má aspoň toľko bodov, koľko A , takže A nemohol byť jediným víťazom turnaja.
2. Ak A ani raz nevyhral, tak mohol mať:
 - (a) dve prehry;
 - (b) prehru a remízu;
 - (c) dve remízy.

Všimneme si, že z týchto možností potrebujeme uvažovať len o poslednej, lebo ak by vyhral v prvých dvoch prípadoch, tak by rozhodne vyhral aj v tom treťom. Totiž, ak existoval taký turnaj, kde by vyhral v prvom

alebo druhom prípade, tak vymenením prehry A za remízu A len zmenšíme body všetkým súperom A a zvýšime body A . Toto pozorovanie budeme opakovane používať aj ďalej.

Ak A má dve remízy, tak má 2 body. Ak B a C remizovali, tak každý tiež má 2 body; ak neremizovali, tak niekto z nich má 4. V oboch prípadoch A nie je víťazom turnaja.

Takže ani pre $n = 3$ to nie je možné. Vyskúšajme $n = 4$ a opäť uvažujme všetky možné prípady.

Nech je víťazom turnaja znova A a iní hráči sú B, C, D . Predtým si všimneme, že A mohol vyhrať najviac jedenkrát, keďže ak by vyhral dvakrát, tak by mal aj prehrať aspoň dvakrát, na čo už ale nemá súperov: má len troch a musel by mať štyroch.

1. Ak A aspoň raz vyhral, tak aspoň raz prehral. Sú potom možnosti, že tretia hra mu skončila remízou alebo prehrou, a rovnako ako v prípade $n = 3$, stačí uvažovať len prípad s remízou.

Nech A zvíťazil nad B , prehral s C a remizoval s D . Potom A má 4 body a C má 3. C teda musel všetky hry prehrať, inak by tiež mal aspoň 4, a teda A by nebol jediným víťhercom turnaja. Ale v tomto prípade D zvíťazil nad C , a teda D má aspoň 4 body. Takže v tomto prípade A nie je jediným víťhercom turnaja.

2. Ak A ani raz nevyhral, tak mohol mať 3 remízy, 2 remízy a 1 prehru, 1 remízu a 2 prehry, alebo 3 prehry. Rovnako ako pre $n = 3$, môžeme pozeráť len na prípad, keď mal 3 remízy.

Potom A má 3 body, a B, C, D každý má 1. Ak by potom niektorá hra medzi B, C, D nebola remíza, tak ten, kto vyhral, má $3 + 1 = 4$ body, teda viac ako A . Takže všetky hry museli byť remízy. Ale potom má každý 3 body, teda opäť A nie je jediným víťhercom.

Teda ani pre $n = 4$ to nie je možné. Vyskúšajme teraz $n = 5$.

Opäť si označíme víťhercu ako A , zvyšných ako B, C, D, E . A mohol mať najviac dve výhry, lebo ak by mal tri, tak by musel aj trikrát prehrať, na čo je znova málo hráčov.

Ak teda A vyhral dvakrát, potom aj prehral dvakrát. Nech A zvíťazil nad B, C , a prehral s D, E . A má 6 bodov, a D, E aspoň 3.

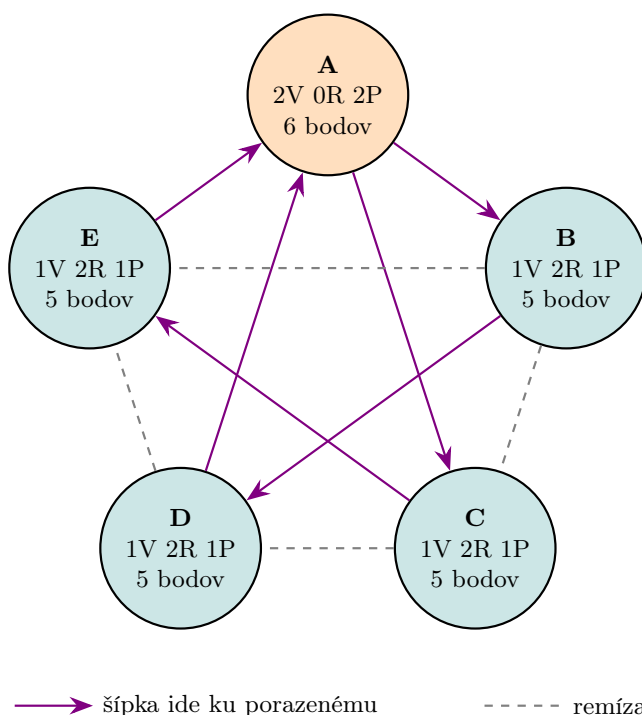
Potom D, E už nemohli mať ďalšie výhry, inak by tiež mali aspoň 6. Taktiež nemohli ich zvyšné tri hry remizovať, keďže by potom opäť mali 6 bodov. Takže D, E aspoň raz prehrali, pričom ani jedna prehra nemohla byť medzi D a E (potom by jeden prehral, ale ten druhý vyhral, a vyššie sme povedali, že D alebo E nemôžu mať ďalšiu výhru).

Takže B, C museli zvíťaziť nad D, E . Ak by B zvíťazil aj nad D aj nad E , mal by potom aspoň 6 bodov, čo je znova veľa. Takže povedzme, že B zvíťazil nad D a C nad E .

Teraz vieme, že každý z B, C, D, E má aspoň 3 body, a teda aby nemali aspoň 6, všetky zvyšné hry by mali byť remízy. Lahko sa presvedčíme pomocou diagramu (alebo tabuľky), že tento prípad nám aj naozaj vyhovuje.

Takže sme ukázali, že $n = 5$ nám vyhovuje, zatiaľ čo všetky menšie n nevyhovujú. Odpoveď potom je: najmenší počet vedúcich je 5.

Poznámka: pre úplné riešenie stačilo len ukázať príklad turnaja pre piatich hráčov a nebolo potrebné písať celú analýzu pre $n = 5$, ako bola spravená vo vzorovom riešení. Avšak týmto sme chceli ukázať, ako sa mohlo *prísť* na tento prípad. Dokonca sme cestou aj ukázali, že tento príklad je „jediný“ — všetky ostatné turnaje piatich hráčov budú vyzeráť rovnako ako tento, až na prehodenie mien vrcholov. Môžete si premyslieť, prečo.

Obrázok 2.1: Príklad turnaja pre $n = 5$

1.3 Korektné Množstvo Subjektov

Zadanie.

Po neskutočne dlhom presviedčaní sa konečne podarilo presvedčiť nadpolovičnú väčšinu vedúcich, že KMS miestnosť potrebuje aj nejaké domáce zvieratko. Keďže Naťa mala vo zverimexe zľavu na chobotnice, rozhodla sa, že sa nakúpi chobotnice.

Nakúpené chobotnice majú buď 8, alebo 7 chápadiel. Naťa dala zvyšným vedúcim hádanku: Aký je počet 8-čápadlových a počet 7-čápadlových chobotníc ak ich súčet chapadiel je N ? Pre aké najmenšie N vedúci nevedia jednoznačne zistiť počet 8-čápadlových a počet 7-čápadlových chobotníc, ak vedia, že z oboch typov kúpila aspoň jednu chobotnicu? Vysvetlite, prečo to nie je možné pre žiadne menšie číslo.

Riešenie. opravujú **Bohdan** (bohdan.bankov@trojsten.sk) a **Ivan** (ivan.morozov@trojsten.sk)

Nechť máme k osmichapadlových a l sedmichapadlových chobotníc. k a l tedy musí byť přirozená čísla. Pro celkový počet chapadel pak musí platit $N = 8k + 7l$.

Hledáme nejmenší N takové, že existuje navíc další dvojice přirozených čísel a, b taková, že $N = 8a + 7b$. Kdyby platilo $k = a$, případně $b = l$, pak by to byla tá jistá možnost pro počty osmichapadlových a sedmichapadlových chobotníc, bez újmy na obecnosti tedy můžeme předpokládat $a > k$ ($a < l$).

Z předchozích pozorování odvodíme $8a + 7b = 8k + 7l$, a tedy $8(a - k) = 7(l - b)$. Jmenovitě tedy platí $7 \mid a - k$ a $8 \mid l - b$.

Nejmenší možné řešení nastane v případě $k = 1$ a $a = 8$. Analogicky vezmeme nejmenší hodnoty pro b a l ($b = 1$, $l = 9$) a ověříme, že $N := 71 = 8 \cdot 8 + 7 \cdot 1 = 8 \cdot 1 + 7 \cdot 9$ opravdu splňuje zadání. Menší hodnota N není možná, neboť by pak nebyla splněna podmínka dělitelnosti čísly 7 a 8.

1.4 Kde Mám Sieť?

Zadanie.

Súčasťou renovácie sa stalo aj vylepšenie bezpečnosti siete WiFi. Namiesto toho, aby človek zadal jedno heslo, ktoré si nájde na papieriku pri návšteve miestnosti, sa vytvoril nový systém, kde najskôr musí človek dokázať, že je hodný byť vedúcim KMS-ka. Mišo sa akurát dostavil na renovačné práce, ale akurát abstinuje od ráťania pre náročné skúškové obdobie.

Každý mesiac sa mení v KMS miestnosti heslo k WiFi. Na to, aby sa Mišo mohol pripojiť na sieť, musí vždy vypočítať sústavu rovníc pre reálne čísla x a y . Každý mesiac sú však podobné a jediné, čo sa v tejto sústave mení, je reálny parameter a . Sústava rovníc vyzerá všeobecne takto:

$$ax + y = 1$$

$$|x| + y = a$$

Mišo nechce každý mesiac znova prepočítavať celú rovnicu. Ako vyzerá riešenie tejto sústavy rovníc vzhľadom na parameter a , ktorý sa mení na začiatku mesiaca?

Riešenie. opravujú **Noro** (norbert.bielik@trojsten.sk) a **Marek** (marek.sliva@trojsten.sk)

Úlohu budeme riešiť spôsobom, že pre každú hodnotu parametra a nájdeme riešenie sústavy v tvare usporiadanej dvojice (x, y) . Keď zoberieme rovnice

$$ax + y = 1, \tag{4.1}$$

$$|x| + y = a \tag{4.2}$$

a odčítame ich, čím sa zbavíme premennej y , dostávame

$$ax - |x| = 1 - a. \tag{4.3}$$

Pokračujeme riešením dvoch možností, keď je x nezáporné alebo keď je záporné.

Ak je x nezáporné, teda $x \geq 0$, platí

$$|x| = x. \tag{4.4}$$

Po vložení do rovnice (4.3) dostaneme

$$ax - x = 1 - a, \tag{4.5}$$

čo je ekvivalentné s rovnicou

$$(a - 1)x = -(a - 1), \tag{4.6}$$

čo možno upraviť na

$$(a - 1)(x + 1) = 0. \tag{4.7}$$

Súčin dvoch čísel je nula práve vtedy, keď je aspoň jeden z činiteľov nulový. Ak $a = 1$, čo zabezpečí nulovosť prvej zátvorky, zistíme, že obe rovnice zo zadania budú vyzerať rovnako, konkrétne

$$x + y = 1, \quad (4.8)$$

čo vedie priamo k riešeniu

$$(x, y) = (x, 1 - x) \quad (4.9)$$

pre $a = 1$ a $x \geq 0$.

Keby bola nulová druhá zátvorka, musí platiť $x = -1$, čo je ale v spore s podmienkou $x \geq 0$, čiže pre $x \geq 0$ dostávame riešenia iba ak $a = 1$, pričom takýchto riešení je nekonečne veľa a tvoria polpriamku.

Keď sa pozrieme na možnosť $x < 0$, dostávame

$$|x| = -x, \quad (4.10)$$

čo podobne dosadíme do (4.3) a dostaneme

$$ax + x = 1 - a, \quad (4.11)$$

teda

$$(a + 1)x = 1 - a. \quad (4.12)$$

Prípád $a = -1$ je triviálny a vedie na rovnicu $0 = 2$, čo nemá riešenie. V prípade, že $a \neq -1$, môžeme rovnicu predeliť zátvorkou z ľavej strany a dostaneme

$$x = \frac{1 - a}{a + 1}, \quad (4.13)$$

Stále požadujeme, aby $x < 0$, teda aby bol podiel záporný, čo znamená, že záporný musí byť buď čitateľ, alebo menovateľ. To vedie na možnosti $a > 1$ alebo $a < -1$. Už nám zostáva len vyjadriť y , na čo použijeme prvú rovnicu zo zadania a dostávame

$$y = 1 - ax = 1 - a \frac{1 - a}{a + 1} = \frac{(a + 1) - a(1 - a)}{a + 1} = \frac{1 + a^2}{a + 1}, \quad (4.14)$$

čo môžeme prepísať na

$$(x, y) = \left(\frac{1 - a}{a + 1}, \frac{1 + a^2}{a + 1} \right) \quad (4.15)$$

pre $a \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ a $x < 0$. Teda pre danú hodnotu a je riešením jeden bod. Zároveň si vieme všimnúť, že pre $a = 1$ dostaneme riešenie $(0, 1)$, čo je rovnaké ako dostávame pre $x \geq 0$ a $a = 1$, takže riešenie nezávisí od toho, či úlohu riešime na intervaloch $x < 0$ a $x \geq 0$ alebo $x \leq 0$ a $x > 0$. Počas riešenia sme zároveň zistili, že pre parameter $a = (-1, 1)$ sústava nemá riešenie.

1.5 Koberec Mráz Signalizuje

Zadanie.

V KMSku býva v zime zimka, a teda bolo treba vyriešiť tento problém. Okrem diek sa kúpil aj krásny nový koberec, ktorý vyzeral sťa obrázok z učebnice geometrie. Samozrejme, vedúci nemohli tento koberec nechať len tak a rozhodli sa z neho spraviť skutočnú úlohu.

Koberec v tvare štvoruholníka $PQRS$, pre ktorý platí, že $|\angle SPR| = 105^\circ$, $|\angle SQR| = 75^\circ$ a $|\angle QRS| = 70^\circ$. Taktiež platí, že strany QR a PS sú rovnako dlhé. Určte $|\angle PRS|$.

Riešenie. opravujú Iľo (michal.ilkovic@trojsten.sk) a Filip Findorák (filip.findorak@trojsten.sk)

Vieme dopočítať tretí uhol v trojuholníku $\triangle QRS$. $|\angle RSQ| = 180^\circ - |\angle SQR| - |\angle QRS| = 180^\circ - 75^\circ - 70^\circ = 35^\circ$. Teraz aplikujeme sínusovú vetu na trojuholník $\triangle QRS$ a vyjadríme pomocou nej $\sin(|\angle RSQ|)$:

$$\frac{|RS|}{\sin(|\angle SQR|)} = \frac{|QR|}{\sin(|\angle RSQ|)} \implies \sin(|\angle RSQ|) = \frac{|QR|}{|RS|} \sin(|\angle SQR|). \quad (5.1)$$

Rovnako aplikujeme sínusovú vetu na trojuholník $\triangle PRS$ a vyjadríme pomocou nej $\sin(|\angle PRS|)$:

$$\frac{|RS|}{\sin(|\angle SPR|)} = \frac{|PS|}{\sin(|\angle PRS|)} \implies \sin(|\angle PRS|) = \frac{|PS|}{|RS|} \sin(|\angle SPR|). \quad (5.2)$$

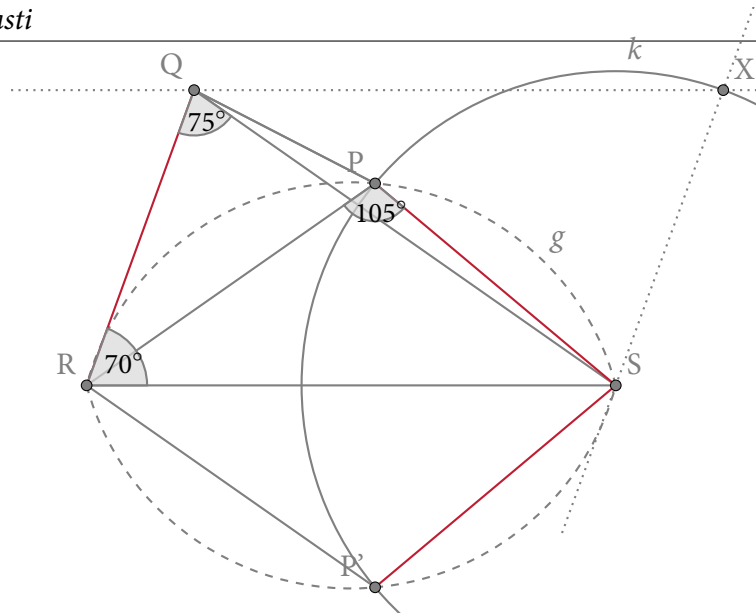
Teraz si všimneme, že pravé strany rovníc 5.1 a 5.2 sa rovnajú, lebo zo zadania $|QR| = |PS|$ a $\sin(|\angle SQR|) = \sin(75^\circ) = \sin(180^\circ - 75^\circ) = \sin(105^\circ) = \sin(|\angle SPR|)$. Takže sa rovnajú aj ľavé strany: $\sin(|\angle PRS|) = \sin(|\angle RSQ|) = \sin(35^\circ)$. Táto rovnica má na intervale $(0^\circ, 180^\circ)$ dve riešenia. $|\angle PRS| = 35^\circ$, alebo $|\angle PRS| = 145^\circ$. Druhá možnosť nastať nemôže, pretože trojuholník $\triangle PRS$ nemôže mať dva tupé uhly. Jediné riešenie je teda $|\angle PRS| = 35^\circ$.

Iné riešenie. Vela riešiteľov postupovalo podľa prvého riešenia, ktoré nevyžaduje znalosť toho, ako obrázok zo zadania správne skonštruovať. To vo všeobecnosti nebolo v úlohe potrebné vedieť, ale správny obrázok nám často pomôže rýchlejšie uvidieť dôležité vzťahy v úlohe. Navyše sa správnou konštrukciou obrázku môžeme vyvarovať jednej veľmi častej chybe a tou je viacero možných konfigurácií.

Najprv vieme skonštruovať trojuholník $\triangle QRS$ s uhlami $75^\circ, 70^\circ, 35^\circ$. Ďalej skonštruujeme bod P , ktorý je určený dvomi vlastnosťami. Bod P sa pozerá na úsečku RS pod uhlom 105° a zároveň je od S vzdialený $|QR|$.

Skonštruujeme množinu g všetkých bodov, ktoré sa na úsečku RS pozerajú pod uhlom 105° . Z vlastností obvodových uhlov vieme, že táto množina bude vyzeráť ako zjednotenie dvoch kružnicových oblúkov. Ako si môžeme všimnúť, v zadaní chýba častá podmienka pre konvexnosť štvoruholníka $PQRS$, takže body Q a P sa môžu nachádzať aj v opačných polrovinách vzhľadom na priamku RS .

Jeden zo spomínaných kružnicových oblúkov bude časťou kružnice opísanej $\triangle QRS$. Druhý je len jeho obraz v osovej súmernosti podľa RS . Ďalej skonštruujeme množinu (kružnicu) k všetkých bodov, ktoré sú vzdialené od S na vzdialenosť $|QR|$. To vieme spraviť doplnením $\triangle QRS$ do rovnobežníka $QRSX$ a narysovaním kružnice so stredom v S a polomerom $|SX|$. Bod P musí ležať v prieniku g a k , má teda dve možné polohy (polohu v opačnej polrovine ako Q vzhľadom na RS označíme P').



Skutočne vidíme, že štvoruholník $P'QRS$ je nekonvexný (podstatné je poradie písmenok). Vďaka $|\angle SQR| + |\angle RP'S| = 180^\circ$ vieme, že P', Q, R, S leží na kružnici. Keďže ďalej vieme, že $|QR| = |PS|$, nutne je to rovnoramenný lichobežník. Uhol $|\angle P'RS|$ už dopočítame jednoducho: $|\angle P'RS| = |\angle P'RQ| - |\angle SRQ| = |\angle RP'S| - |\angle QRS| = 105^\circ - 70^\circ = 35^\circ$.

Vidíme, že P a P' sú vzájomné obrazy vzhľadom na RS , takže $|\angle P'RS| = |\angle PRS| = 35^\circ$. Takže bez ohľadu na polohu bodu P výjde veľkosť $\angle PRS$ rovnaká.

Poznámka. Skúste si premyslieť, prečo prvé riešenie stále funguje, aj keď by bol $PQRS$ nekonvexný. Zároveň je z druhého riešenia zrejmé vidieť, prečo uvažovať priesečník PR a QS a aplikovať sínusovú vetu na trojuholníky, ktoré ho majú za vrchol, môže byť nebezpečné.

1.6 Koncentrovane Mumákujeme Stenu

Zadanie.

Vedúci si všimli, že miestnosť je veľmi smutná s čisto bielymi stenami, a tak sa rozhodli ju pekne-krásne vytapetovať. Na internete si vyhládali „matematické tapety pre matematických fanatikov na tému matematiky“ a kúpili prvý výsledok. Hneď, ako im tapety došli, si však uvedomili chybu. Mali si lepšie pozrieť, čo na tých tapetách vôbec je, lebo na každej rolke bol iba jedna a tá istá úloha, čo by veľmi miestnosť nerozveselilo a iba by ju zmonotónnilo. Ale tak, keď už existuje úloha, malo by existovať aj riešenie, rozhodli sa to teda prepočítať.

Určite, pre ktoré prirodzené čísla n má rovnica

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_n^2} = 1$$

riešenie v obore kladných celých čísel.

Riešenie.

opravujú **Samo** (samuel.sandor@trojsten.sk) a **Oski** (oskar.hritz@trojsten.sk)

Najprv sa pri takýchto úlohách hodí zamyslieť nad jednoduchými prípadmi, teda pre malé n . Pre $n = 1$ dostaneme zjavne riešenie $x_1 = 1$. Ďalej si uvedomme, že každý zo zlomkov pre ľubovoľné n je nejaké kladné číslo.

Pre $n = 2$ vidíme, že ani jedno z x_1 a x_2 nemôže byť rovné 1, lebo by celá ľavá strana bola väčšia ako jedna. Pokiaľ sú však obidve x_1, x_2 aspoň 2, potom x_1^2 a x_2^2 sú obidve aspoň 4 a teda $\frac{1}{x_1^2}, \frac{1}{x_2^2}$ sú obidve najviac $\frac{1}{4}$. Potom však $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, čo je spor.

Pre $n = 3$ analogicky nemôže byť žiadne x_i rovné 1, teda všetky musia byť aspoň 2, ale potom $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, čo je opäť spor.

Pre $n = 4$ môžeme rovnakou úvahou dôjsť k riešeniu $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 2$.

Pre $n = 5$ vidíme, že najviac tri z x_i môžu byť rovné 2 (ak by boli štyri, potom by ľavá strana bola väčšia ako jedna). Taktiež si všimnime, že ak by najviac tri z x_i boli rovné 2, potom súčet zvyšnej dvojice je najviac $\frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$ a teda dokopy by bol súčet ľavej strany by bol najviac $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{4} + \frac{2}{9} = \frac{35}{36}$ čo je menej ako 1, čím sme prišli k sporu, teda pre $n = 5$ neexistuje riešenie.

Pre $n = 6$ vidíme, že pokiaľ budú tri z x_i rovné 2, potom potrebujeme, aby zvyšné tri zlomky dávali v súčte jednu štvrtinu. Po istom skúšaní vieme dospieť k riešeniu $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{36} = 1$.

Pre $n = 7$ opäť analogicky, ak budú tri z x_i rovné 2, potom potrebujeme, aby zvyšné štyri zlomky dávali v súčte jednu štvrtinu. Tu nás môže napadnúť veľmi elegantný spôsob ako to urobiť – keď sa zamyslíme, zistíme, že ak to prenásobíme štvorkou, hľadáme vlastne štyri zlomky ktorých súčet je 1, čo zjavne vieme dosiahnuť tak, že každý z nich bude rovný $\frac{1}{4}$, teda ak potrebujeme štyri zlomky so súčtom jednej štvrtiny, vieme to zabezpečiť tak, že každý z nich bude rovný $\frac{1}{16}$.

Táto úvaha sa dá dobre zovšeobecniť algebraicky, ak si uvedomíme, že platí

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4x^2} = \frac{1}{(2x)^2} + \frac{1}{(2x)^2} + \frac{1}{(2x)^2} + \frac{1}{(2x)^2} = \frac{4}{(2x)^2}.$$

Teda ľubovoľný zo zlomkov vieme takto nahradiť štyrmi zlomkami, ktoré budú mať stále druhé mocniny kladných celých čísel v menovateľoch. Týmto spôsobom tak vieme navýšiť počet zlomkov na ľavej strane o 3, teda pokiaľ existuje taká n -tica $x_1, \dots, x_n$ pre nejaké n , tak určite existuje aj pre $n + 3$.

Nakoľko sme už našli konštrukciu pre zvyšok 1 po delení 3 vieme týmto postupom¹ vyrobiť všetky väčšie n so zvyškom 1 po delení 3.

Rovnako sme už našli konštrukciu pre zvyšok 0 po delení 3 (pre $n = 6$), teda opäť sme pokryli všetky takéto čísla, ktoré sú aspoň 6.

Už nám ostáva len vysporiadať sa so zvyškom 2 po delení 3. Už sme ukázali, že konštrukcie neexistujú pre $n = 2$, ani pre $n = 5$, ďalším kandidátom je $n = 8$. Tu vieme použiť rovnaké pozorovanie ako pri $n = 6$, teda že $\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{36} = \frac{1}{4}$. To môžeme aplikovať dvakrát a následne k tomu ešte pridať dve štvrtiny, čím budeme mať osem zlomkov, teda máme konštrukciu $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = 1$.

Dokopy sme tak ukázali, že takú n -ticu $x_1, \dots, x_n$ vieme nájsť pre všetky kladné celé n okrem 2, 3 a 5.

¹ Celkový postup sa nazýva *matematická indukcia*, a tvorenie nových riešení je náš *indukčný krok*. Podrobnejšie vysvetlenie nájdete napríklad na <https://prase.cz/library/IndukceVH/IndukceVH.pdf>.

1.7 Katastrofálnu Monotóniu Skántrime

Zadanie.

Monotónne tapety vedúcich riadne zarmútili. Našťastie však našli alternatívu! Čo má čísla a je to farebné? Predsa hracie karty! Ale povedali si, že predtým, než ich nalepia na stenu, sa s nimi trocha pohrajú.

Majme balíček kariet, double-decker bez žolíkov². Označme skupinou množinu kariet veľkosti aspoň 3, ktorej karty spĺňajú jednu z nasledujúcich podmienok

1. všetky karty majú rovnaké čísla a po dvojiciach rôzne farby,
2. všetky karty majú rovnakú farbu, no hodnoty kariet tvoria postupnosť $a, a + 1, \dots, a + k$, kde a a k sú celé kladné čísla.

Pomôžte vedúcim zistiť:

- a Aký je najmenší počet kariet n taký, že ľubovoľných n kariet vieme rozdeliť do skupín? Berieme, že karta s hodnotou 1, takz. eso, môže ísť iba na začiatok.
- b Aký je najmenší počet kariet n taký, že ľubovoľných n kariet vieme rozdeliť do skupín, v prípade, že k danému počtu n kariet pridáme **jedného** žolíka? Žolík môže v skupine reprezentovať ľubovoľnú kartu.

Riešenie.

opravuje BaškaN (barbora.novosadova@trojsten.sk)

Najskôr ukážeme, že **riešenie podúlohy a** je $n = 100$, teda pre $n \leq 99$ kariet existuje taká n -tica, ktorá sa nedá rozdeliť do skupín, a pre $n = 100$ žiadna taká n -tica neexistuje.

Najskôr teda nájdeme 99-ticu, ktorá nám to kazí. Z nášho kompletného 104-kartového balíka odoberme obe $2\heartsuit$, obe $1\diamondsuit$ a jednu $1\spadesuit$. Zostali nám obe $1\heartsuit$, z ktorých ani jedna nemôže ísť do skupiny typu 2 (tzv. *postupky*), keďže chýbajú príslušné 2ky. Obe teda musia ísť do skupiny typu 1 (tzv. *tercky*). Avšak nemôžu byť obe v rovnakej tercke, a zároveň nemáme dosť jednotiek na to, aby sme zostavili dve kompletne tercky. Takže jedna $1\heartsuit$ sa nedá zaradiť do žiadnej skupiny, a teda $n = 99$ nevyhovuje. Pre $2 \leq n < 99$ potom vždy existuje n -tica, ktorá vynecháva tieto (plus ešte ďalšie) karty a zároveň ponecháva obe $1\heartsuit$, a pre takéto n -tice aspoň jedna $1\heartsuit$ zostáva nezaraďená, takže ani žiadne menšie n nevyhovuje ($n = 1$ zjavne nejde).

Prečo to pre 100 kariet už ide? Rozdelíme si všetkých 104 kariet na tercky, teda pre každé číslo máme dve štvorice navzájom rôznych kariet. Pozrime sa na to, akými všetkými spôsobmi môžeme odobrať 4 karty:

Z každého čísla chýbajú najviac 2 karty: pokiaľ z každej štvorice chýba najviac 1, nemusíme nič riešiť, lebo stále máme platné trojice. Pokiaľ by obe chýbajúce karty boli z jednej štvorice, jednoducho k zvyšnej dvojici prehodíme jednu kartu z druhej príslušnej štvorice (takú, ktorá v tej dvojici nie je).

Z niektorého čísla chýbajú 3 karty, pričom sú všetky rôzne: zostalo nám teda 5 kariet, pričom v tejto päťici je jedna dvojica rovnakých kariet. Jednu z tej dvojice použijeme do postupky a zvyšné štyri vytvoria tercku. Nech je k číslo, z ktorého chýbajú 3 karty. Keďže chýba už len 1 ďalšia karta, určite v balíku zostalo aspoň po jednej karte s hodnotami $k + 1$, $k - 1$, v znaku, v ktorom potrebujeme spraviť postupku (resp. $k + 1$, $k + 2$ pre $k = 1$ a $k - 1$, $k - 2$ pre $k = 13$). Zároveň nám to ostatné číselné skupiny nepokazí, lebo po vytvorení postupky budú z každej ďalšej skupiny chýbať najviac 2 karty (jedna použitá v postupke a jedna štvrtá odobratá karta).

²Balíček kariet 4 rôznych farieb. Z každej farby je 13 rôznych kariet s hodnotami 1 až 13. Každá karta sa tam nachádza dvakrát.

Z niektorého čísla chýbajú 3 karty, pričom dve z nich sú rovnaké: teraz zo zvyšných 5 kariet vytvoríme najviac trojicu, keďže máme dve dvojice opakujúcich sa kariet. Dve karty teda musia patriť do postupky. Nech je k číslo, z ktorého chýbajú 3 karty, a bez ujmy na všeobecnosti nech sú $k\heartsuit, k\diamondsuit$ dve dvojice opakujúcich sa kariet v tomto čísle. Keďže chýba už len 1 ďalšia karta, určite v balíku zostalo aspoň po jednej karte s hodnotami $k+1, k+2, k-1, k-2$ v oboch znakoch $\heartsuit, \diamondsuit$ (resp. $k+1, k+2$ pre $k=1, 2$ a $k-1, k-2$ pre $k=13, 12$). Môžeme teda vytvoriť postupku spôsobom "ďalej od kraja", teda pre $k \leq 7$ vezmem postupky $k, k+1, k+2$, pre $k > 7$ vezmem postupky $k, k-1, k-2$. Pokiaľ by teraz v niektorom čísle $k \pm 1, k \pm 2$ chýbali spolu so štvrtou chýbajúcou kartou 3 karty, opäť môžeme dve karty zaradiť do postupiek v rovnakom smere ako predtým (keďže v smere "ďalej od kraja" sú určite ešte aspoň 2 karty rovnakého znaku). Zo všetkých ostatných čísel potom už budú chýbať nanajvýš dve karty, a už vieme, že vtedy idú karty každého čísla rozdeliť na tercky, teda takto vieme rozdeliť všetky karty.

Z niektorého čísla chýbajú 4 karty: jednoduchým riešením je zmeniť všetky ostatné skupiny na postupky od 1 po 13, pričom štyri z nich sú chýbajúcimi kartami rozdelené na dve podpostupky. Pokiaľ sú chýbajúce karty napr. dvojky, a teda jednotky sa nedajú zaradiť do postupiek, tieto jednoducho ponecháme v štvoriciach. To isté platí, ak chýbajú trojky (kedy v štvoriciach ponecháme jednotky a dvojky), jedenástky (ponecháme dvanástky a trinástky) alebo dvanástky (ponecháme trinástky).

To sú všetky možnosti. Hocijako teda odoberieme 4 karty z 104-kartového balíčka, zvyšných 100 budeme vedieť rozdeliť do platných skupín. Riešením podúlohy a je teda $n = 100$.

A teraz ukážeme, že **riešenie podúlohy b je $n = 99$** . Určite platí, že každá 99-tica plus žolík sa dá rozdeliť — z podúlohy a totiž vieme, že každá 100-tica bez žolíka sa dá rozdeliť, teda stačí, aby žolík reprezentoval ľubovoľnú vynechanú kartu. Stačí nám teda ukázať, že $n = 98$ ani žiadne menšie n nevyhovuje.

Zoberme si 98-ticu, v ktorej sme vynechali obe $1\diamondsuit$, obe $1\spadesuit$, a obe $2\heartsuit$. Vieme si teraz všimnúť, že ani jednu $1\heartsuit$ nevieme bez použitia žolíka zaradiť ani do postupky (na to treba $2\heartsuit$), ani do tercky (máme len dve rôzne farby jednotiek). Zároveň ale nemôžu obe $1\heartsuit$ byť v tej istej skupine, a žolík je len v jednej skupine, teda aspoň jedna $1\heartsuit$ ostane nezaraďená. Teda $n = 98$ nevyhovuje, pre $2 \leq n < 98$ vieme podobne ako v podúlohe a len vynechávať ďalšie karty, ktoré nie sú $1\heartsuit$, a $n = 1$ zjavne nejde. Teda naozaj $n = 98$ ani nič menšie nevyhovuje. Riešením podúlohy b je teda $n = 99$.

1.8 Kružidlom Maľujeme Šrafy

Zadanie. *Popri upratovaní si vedúci uvedomili, že majú omnoho viac rysovacích pomôcok než treba. A tak Iľo zobral kružidlo a začal ním robiť kružnice. A potom ďalšie. A ďalšie. Až kým nevyskúšal všetky kružidlá. Následne zobral aj pravítko a začal rysovať priamky. Došli mu však papiere, a tak mnohé priamky prešli do kružníc. Vtom mu vzkrsol v hlave nápad.*

Daná je kružnica g so stredom O a polomerom r . Nech AB je nemenný priemer kružnice g . Nech K je pevný bod úsečky AO . Označme t dotyčnicu ku kružnici g v bode A . Pre ľubovoľnú tetivu CD (rôznu od AB) prechádzajúcu bodom K označme P, Q postupne priesečníky priamok BC, BD s dotyčnicou t .

Dokážte, že súčin $|AP| \cdot |AQ|$ ostáva konštantný pri ľubovoľnej voľbe tetivy CD .

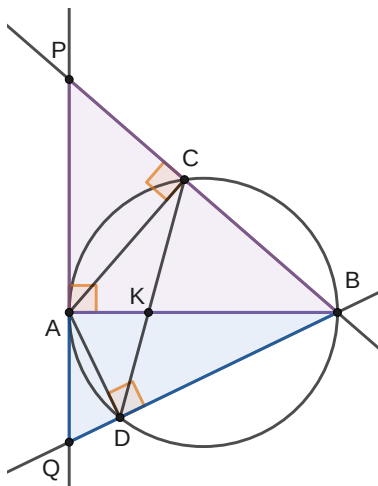
Riešenie.

opravuje **Mišo M.** (michal.molnar@trojsten.sk)

Aj keď otázka na súčin $|AP| \cdot |AQ|$ môže skúsenejších riešiteľov nabádať na použitie mocnosti, na túto úlohu hravo postačia podobnosti trojuholníkov a obvodové uhly. Pred začatím riešenia si ešte uvedomme, že iba body A, B, K sú

zadané pevne³, všetko ostatné záleží na voľbe tetivy CD . V ideálnom prípade teda chceme vyjadriť súčin $|AP| \cdot |AQ|$ len pomocou vzdialeností týchto troch bodov.

Začnime s bodmi A a B . Keďže AB je priemer kružnice g a priamka PQ je jej dotýčnica v bode A , uhly $\angle PAB$ a $\angle QAB$ sú pravé. Kružnica g je navyše Tálesova nad priemerom AB , takže aj uhly $\angle ACB$ a $\angle ADB$ sú pravé. Môžeme si všimnúť, že úsečky AC a AD sú vlastne výškami na preponu v pravouhlých trojuholníkoch PAB a QAB . Na túto situáciu poznáme zo školy veľa vzorčiekov pre dĺžky (Pytagorova veta, Euklidove vety, ...), my sa však obmedzíme len na podobnosti trojuholníkov.



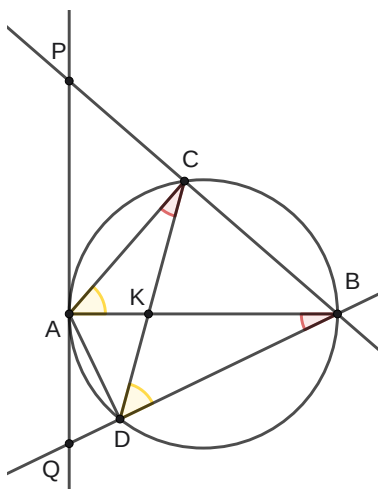
V trojuholníku PAB teda platí

$$PAB \sim PCA \sim ACB$$

a v trojuholníku QAB analogicky

$$QAB \sim QDA \sim ADB.$$

Teraz by sme vedeli napísať veľa rôznych pomerov, ktoré pre strany týchto trojuholníkov platia. Zatiaľ však počkáme na to, čo nám prinesie bod K , aby sme sa potom v tom množstve výrazov nestratili.



³Ešte bod O , ten nám však ako stred úsečky AB neposkytne novú informáciu.

V bode K sa pretínajú dve tetivy kružnice g . Vďaka obvodovým uhlom máme

$$|\sphericalangle ACK| = |\sphericalangle KBD| \text{ a } |\sphericalangle CAK| = |\sphericalangle KDB|,$$

z čoho dostaneme podobnosť trojuholníkov $ACK \sim DBK$. Analogicky vieme odvodiť aj $ADK \sim CBK$.

Než prejdeme k vyjadrovaniu pomerov, zamyslime sa nad tým, ktoré z nich by nám mohli byť osožné. V trojuholníkoch vyššie sa bod K nenachádza, takže na to, aby sme mohli náš pomer niekam dosadiť, potrebujeme, aby obsahoval jednu z úsečiek, ktoré nekončia v bode K , konkrétne teda AD , BD , BC alebo AC . Napríklad z podobnosti $ACK \sim DBK$ vieme dostať

$$\frac{|AC|}{|BD|} = \frac{|CK|}{|BK|} = \frac{|AK|}{|DK|},$$

z podobnosti $ADK \sim CBK$ zas

$$\frac{|AD|}{|BC|} = \frac{|AK|}{|CK|} = \frac{|DK|}{|BK|}.$$

Všimnime si, že vynásobením dvojice prostredných (resp. dvojice posledných) zlomkov dostaneme výraz $\frac{|AK|}{|BK|}$, ktorý nezáleží na voľbe bodov C a D . To by sa nám v riešení mohlo hodiť. Celý vzťah získaný vynásobením prvej a druhej rovnice je

$$\frac{|AC| \cdot |AD|}{|BC| \cdot |BD|} = \frac{|AK|}{|BK|}.$$

Vráťme sa teraz k našim pravouhlým trojuholníkom. Úsečky AC a BC sú obe v trojuholníku PAB , vzťah AD a BD vieme zas vypožorovať z trojuholníka QAB . Konkrétne z podobnosti $PCA \sim ACB$ dostaneme

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AP|}{|AB|}$$

a z podobnosti $QDA \sim ADB$ máme

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AQ|}{|AB|}.$$

Vynásobením výsledných rovníc dostaneme

$$\frac{|AP| \cdot |AQ|}{|AB|^2} = \frac{|AC| \cdot |AD|}{|BC| \cdot |BD|} = \frac{|AK|}{|BK|},$$

pričom druhú rovnosť sme odvodili vyššie. Teraz nám už len stačí vynásobiť túto rovnosť výrazom $|AB|^2$ a dostaneme

$$|AP| \cdot |AQ| = \frac{|AK|}{|BK|} \cdot |AB|^2.$$

Keďže hodnota na pravej strane nezáleží na voľbe tetivy CD , nezáleží na nej ani ľavá strana, čo sme chceli dokázať.

1.9 Kýžený Milovaný Spánok

Zadanie. Baška bola po tom dlhom upratovaní a renovovaní riadne unavená, a tak si lahla na gauč. Neuvedomila si však, že sa jej telo unavilo natoľko, že ochorela, a počas spánku mala podivuhodný horúčkový sen naplnený matematikou...

Dané sú rôzne kladné celé čísla x, y a kladné celé číslo n , pre ktoré platí $x + y \mid x^{2n} + y^{2n}$. Ukážte, že $(x - y)^{4n} > xy$.

Riešenie.

opravuje Petr (petr.velycko@trojsten.sk)

Zopár poznámok na začiatok, najväčšieho spoločného deliteľa x, y budeme značiť $\gcd(x, y)$, a budeme párkrát využívať vlastnosť $k \mid l \implies k \leq l$.

Začnime pozorovaním, ktoré sa týka deliteľnosti $x + y$. Jazykom modulárnej aritmetiky by sme povedali, že platí $0 \equiv (x + y)(x^{2n-1} - x^{2n-2}y + x^{2n-3}y^2 - \dots - y^{2n-1}) = x^{2n} + y^{2n} \equiv x^{2n} + (-x)^{2n} \equiv 2x^{2n} \pmod{x + y}$. Platí teda

$$x + y \mid 2x^{2n}. \quad (9.1)$$

Nech $g = \gcd(x, y)$ a a, b sú nesúdeliteľné celé čísla také, že $x = ga$, $y = gb$. Dosadením do (9.1) dostávame $g(a + b) \mid 2g^{2n}a^{2n}$, a teda $a + b \mid 2g^{2n-1}a^{2n}$. Z vlastností najväčšieho spoločného deliteľa máme, že $\gcd(a + b, a) = \gcd(a, b) = 1$, teda aj $\gcd(a + b, a^{2n}) = 1$, teda platí $a + b \mid 2g^{2n-1}$. Po spätnom vynásobení g dostaneme

$$x + y \mid 2g^{2n}.$$

Zo spomínanej vlastnosti deliteľnosti kladných celých čísel teda platí

$$x + y \leq 2g^{2n}. \quad (9.2)$$

Ďalej z AG nerovnosti (je ostrá, lebo $x \neq y$) máme $2\sqrt{xy} \stackrel{AG}{<} x + y \stackrel{(9.2)}{\leq} 2g^{2n}$, teda

$$xy < g^{4n}. \quad (9.3)$$

Keďže $g := \gcd(x, y) \leq |x - y|$ (lebo platí aj $x \neq y$, aj $g \mid x$, aj $g \mid y$, teda $g \mid |x - y|$), nerovnosť (9.3) môžeme ďalej upraviť do požadovaného tvaru

$$xy < g^{4n} \leq |x - y|^{4n} \stackrel{4n \text{ párne}}{=} (x - y)^{4n},$$

čo bolo treba dokázať.

1.10 Konečne Máme Srandu

Zadanie.

Po náročnej práci bolo nové KMS-ko dokončené. Nehybná skriňa stále zavadzala v strede miestnosti, chobotničky si krásne nažívali v akváriu a steny boli vytapetované. Už len ostávalo zahrať si na oslávenie nejakú peknú kartovú hru.

Máme balíček kariet očíslovaných od 1 po N , ktoré sú na začiatku usporiadané v ľubovoľnom poradí naukladané na sebe. Definujme veľkú výmenu ako nasledujúci postup pozostávajúci z N krokov:

- Vymeníme časť balíčka, ktorá sa nachádza nad kartou 1, s časťou, ktorá sa nachádza pod kartou 1;
- Následne vymeníme časť balíčka nad kartou 2 s časťou pod kartou 2;
- Takto pokračujeme ďalej, až nakoniec vymeníme časť balíčka nad kartou N s časťou pod kartou N .

Ak je jedna z častí, ktoré vymieňame, prázdna, výmena zodpovedá jednoduchému presunu neprázdnej časti na spodok balíčka alebo naopak. Ukážte, že vykonanie $N + 1$ po sebe nasledujúcich veľkých výmen vždy vráti balíček do jeho pôvodného usporiadania.

Riešenie. opravujú **MatejB** (matej.bachnicek@trojsten.sk) a **MatúšP** (matus.pokorny@trojsten.sk)

Pre $N = 1$ sa zjavne nikdy nemení nič, teda tvrdenie platí. Ďalej predpokladajme $N > 1$.

Nech *malá výmena pre kartu k* je výmena časti balíčku nad kartou k a časti balíčku pod kartou k . Jedna veľká výmena teda pozostáva z n malých výmen postupne pre karty $1, 2, \dots, N$ v tomto poradí.

Podme zistiť, čo vlastne spraví jedna malá výmena. Vieme, že z balíčku A, k, B , kde A a B sú ľubovoľne dlhé úseky kariet (môžu byť aj prázdne) a k je karta, pre ktorú robíme výmenu, dostaneme B, k, A . Vidíme teda, že prvá karta pod k (ak nejaká je) sa dostala na vrch balíčku, vrchná karta balíčku sa dostala hneď pod kartu k , posledná nad k sa dostala na koniec a posledná celkovo hneď nad k . Inak sa v zásade nič nezmenilo — úseky A a B stále obsahujú tie isté karty, čo predtým, v tom istom poradí.

Neformálne teda vieme upozorovať, že karta k a okraje balíčku si v istom zmysle vymenili úlohy; pred malou výmenou bol nad A a pod B okraj balíčku, po malej výmene je nad A a pod B karta k (a naopak).

Skúsme toto pozorovanie sformalizovať. Predstavme si fiktívnu kartu 0, ktorá sa v ľubovoľnom momente nachádza hneď nad vrchnou kartou a zároveň hneď pod spodnou kartou; z balíčku sme teda spravili kruh. Potom tento kruh jednoznačne určuje usporiadanie kariet, a dva takéto kruhy, ktoré sa líšia len otočením, určujú to isté usporiadanie — prvá karta je totiž určite tá, čo nasleduje po karte 0, druhá nasleduje po prvej, tretia po druhej, a tak ďalej. Pritom ale platí, že ak mal kruh pred malou výmenou tvar $0, A, k, B$, kde 0 je táto fiktívna karta, k je karta, pre ktorú robíme výmenu, a A, B sú ľubovoľne dlhé úseky kariet (môžu byť aj prázdne), tak po malej výmene dostaneme kruh v tvare $0, B, k, A$. To je ale ten istý kruh ako $k, A, 0, B$, len otočený (na čom nezáleží). A ten sa od $0, A, k, B$ líši len v tom, že sme vymenili karty 0 a k . Malá výmena okolo k je teda v tejto kruhovej reprezentácii len vymenenie kariet 0 a k .

Teraz sa pozrime na to, čo v kruhovej reprezentácii spraví veľká výmena. Najskôr sa udeje malá výmena pre kartu 1, teda sa vymenia karty 0 a 1. Na mieste, kde pôvodne bola 0, je teda teraz 1, a 0 sa nachádza na pôvodnom mieste karty 1. Následne po malej výmene pre kartu 2 sa na mieste, kde pôvodne bola karta 1, teraz nachádza karta 2 (lebo tam bola predtým 0) a 0 sa nachádza na pôvodnom mieste karty 2.

Vieme si teda všimnúť, a následne ľahko indukciou dokázať, že po prvých k krokoch veľkej výmeny sa karty $1, 2, \dots, k$ ocitnú v tomto poradí na pôvodných miestach kariet $0, 1, \dots, k - 1$ a 0 sa ocitne na pôvodnom mieste karty k . Po celej veľkej výmene je teda na pôvodnom mieste karty 0 karta 1, na pôvodnom mieste karty 1 karta 2, atď., a na pôvodnom mieste karty N je karta 0. Číslo na každom mieste sa teda zvýšilo o 1 modulo $N + 1$.

No a teda po $N + 1$ veľkých výmenách sa číslo na každom mieste zvýšilo o $N + 1$ modulo $N + 1$, teda je rovnaké ako na začiatku, a teda celý kruh aj celé usporiadanie balíčku sú rovnaké ako na začiatku.

Dokázali sme, že po $N + 1$ veľkých výmenách sa balíček vždy vráti do pôvodného usporiadania.