



Zadania 1. kola zimnej časti

Termín odoslania 28. 9. 2026

V prípade otázok k zadaniam nás neváhajte kontaktovať na kms@kms.sk.

1.1 Komunálne Musíme Spratovať

level L1, max. 7 bodov

Keď sa vedúci pozerali na KMS miestnosť, uvedomili si, že už by bolo na čase, aby ju zrenovovali. Lenže pred renováciou ju treba riadne upratať. Podarilo sa im už vypratať z miestnosti takmer všetko, avšak v strede zostala skriňa, ktorou nie a nie pohnúť. Rozhodli sa teda, že nejak sa to poupratuje aj napriek skrini.

Oski dostal za úlohu povysávať KMS miestnosť, ktorá má v strede nehybnú skriňu. Keď sa na miestnosť pozrel zhora, skriňa mala tvar obdĺžnika, so stranami dlhými 10 decimetrov a 4 decimetre. Vysávač mal zapojený do zásuvky priamo pri rohu skrine na zemi. Kábel, ktorým je vysávač zapojený, je dlhý 8 decimetrov. Akú veľkú plochu miestnosti vie Oski povysávať? Steny miestnosti sú dostatočne ďaleko, aby neprekážali vysávaču.

1.2 Kompetetivnosť Má Šmrnc

levely L1 až L2, max. 7 bodov

Pred renováciou treba upratať aj riad. Problém však je, že všetok riad je špinavý a zo všetkých upratovacích prác je umývanie riadu tá najmenej žiadaná. Vedúci sa snažia dohodnúť, kto to teda všetko umyje, a vtom príde do miestnosti DenŤs, ktorému sa už vôbec nechce upratovať a tak navrhne, nech si zahrajú turnaj v BF (bottle flip) o to, kto ich bude umývať.

Turnaj sa skladal zo zápasov. V každom zápase hrali dvaja vedúci proti sebe. Ak vedúci vyhral, získal 3 body, ak remizoval, získal 1 bod, a ak prehral, nezískal žiadne body. Turnaj vyhráva ten vedúci, ktorý má najviac bodov. Vedúci v tomto turnaji hrali zápas každý s každým práve raz. Vieme, že keď turnaj skončil, vyhral ho práve jeden vedúci a ten mal v zápasoch aspoň toľko prehiev ako výhier. Aký je najmenší počet vedúcich, ktorí mohli hrať tento turnaj? Pre daný počet ukážte, prečo by ich nemohlo byť menej.

1.3 Korektné Množstvo Subjektov

levely L1 až L3, max. 7 bodov

Po neskutočne dlhom presviedčaní sa konečne podarilo presvedčiť nadpolovičnú väčšinu vedúcich, že KMS miestnosť potrebuje aj nejaké domáce zvieratko. Keďže Naťa mala vo zverimexe zľavu na chobotnice, rozhodla sa, že sa nakúpi chobotnice.

Nakúpené chobotnice majú buď 8, alebo 7 chápadiel. Naťa dala zvyšným vedúcim hádanku: Aký je počet 8-chápadlových a počet 7-chápadlových chobotníc ak ich súčet chapadiel je N ? Pre aké najmenšie N vedúci nevedia jednoznačne zistiť počet 8-chápadlových a počet 7-chápadlových chobotníc, ak vedia, že z oboch typov kúpila aspoň jednu chobotnicu? Vysvetlite, prečo to nie je možné pre žiadne menšie číslo.

1.4 Kde Mám Sieť?

levely L1 až L4, max. 7 bodov

Súčasťou renovácie sa stalo aj vylepšenie bezpečnosti siete WiFi. Namiesto toho, aby človek zadal jedno heslo, ktoré si nájde na papieriku pri návšteve miestnosti, sa vytvoril nový systém, kde najskôr musí človek dokázať, že je hodný byť vedúcim KMS-ka. Mišo sa akurát dostavil na renovačné práce, ale akurát abstinuje od rátania pre náročné skúškové obdobie.

Každý mesiac sa mení v KMS miestnosti heslo k WiFi. Na to, aby sa Mišo mohol pripojiť na sieť, musí vždy vypočítať sústavu rovníc pre reálne čísla x a y . Každý mesiac sú však podobné a jediné, čo sa v tejto sústave mení, je reálny parameter a . Sústava rovníc vyzerá všeobecne takto:

$$ax + y = 1$$

$$|x| + y = a$$

Mišo nechce každý mesiac znova prepočítavať celú rovnicu. Ako vyzerá riešenie tejto sústavy rovníc vzhľadom na parameter a , ktorý sa mení na začiatku mesiaca?

1.5 Koberec Mráz Signalizuje

levely L1 až L5, max. 7 bodov

V KMSku býva v zime zimka, a teda bolo treba vyriešiť tento problém. Okrem diek sa kúpil aj krásny nový koberec, ktorý vyzeral sťa obrázok z učebnice geometrie. Samozrejme, vedúci nemohli tento koberec nechať len tak a rozhodli sa z neho spraviť skutočnú úlohu.

Koberec v tvare štvoruholníka $PQRS$, pre ktorý platí, že $|\sphericalangle SPR| = 105^\circ$, $|\sphericalangle SQR| = 75^\circ$ a $|\sphericalangle QRS| = 70^\circ$. Taktiež platí, že strany QR a PS sú rovnako dlhé. Určte $|\sphericalangle PRS|$.

1.6 Koncentrovane Mumákujeme Stenu

levely L1 až L5, max. 7 bodov

Vedúci si všimli, že miestnosť je veľmi smutná s čisto bielymi stenami, a tak sa rozhodli ju pekne-krásne vytapetovať. Na internete si vyhľadali „matematické tapety pre matematických fanatikov na tému matematiky“ a kúpili prvý výsledok. Hneď, ako im tapety došli, si však uvedomili chybu. Mali si lepšie pozrieť, čo na tých tapetách vôbec je, lebo na každej rolke bol iba jedna a tá istá úloha, čo by veľmi miestnosť nerozveselilo a iba by ju zmonotónnilo. Ale tak, keď už existuje úloha, malo by existovať aj riešenie, rozhodli sa to teda prepočítať.

Určite, pre ktoré prirodzené čísla n má rovnica

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_n^2} = 1$$

riešenie v obore kladných celých čísel.

1.7 Katastrofálnu Monotóniu Skántrime

levely L1 až L5, max. 7 bodov

Monotónne tapety vedúcich riadne zarmútili. Našťastie však našli alternatívu! Čo má čísla a je to farebné? Predsa hracie karty! Ale povedali si, že predtým, než ich nalepia na stenu, sa s nimi trocha pohrajú.

Majme balíček kariet, double-decker bez žolíkov¹. Označme *skupinou* množinu kariet veľkosti aspoň 3, ktorej karty spĺňajú jednu z nasledujúcich podmienok

1. všetky karty majú rovnaké čísla a po dvojiciach rôzne farby,
2. všetky karty majú rovnakú farbu, no hodnoty kariet tvoria postupnosť $a, a + 1, \dots, a + k$, kde a a k sú celé kladné čísla.

Pomôžte vedúcim zistiť:

- a Aký je najmenší počet kariet n taký, že ľubovoľných n kariet vieme rozdeliť do *skupín*? Berieme, že karta s hodnotou 1, takz. eso, môže ísť iba na začiatok.
- b Aký je najmenší počet kariet n taký, že ľubovoľných n kariet vieme rozdeliť do *skupín*, v prípade, že k danému počtu n kariet pridáme **jedného** žolíka? Žolík môže v skupine reprezentovať ľubovoľnú kartu.

1.8 Kružidlom Maľujeme Šrafy

levely L1 až L5, max. 7 bodov

Popri upratovaní si vedúci uvedomili, že majú omnoho viac rysovacích pomôcok než treba. A tak Iľo zobral kružidlo a začal ním robiť kružnice. A potom ďalšie. A ďalšie. Až kým nevyskúšal všetky kružidlá. Následne zobral aj pravítka a začal rysovať priamky. Došli mu však papiere, a tak mnohé priamky prešli do kružníc. Vtom mu vzkrsol v hlave nápad.

Daná je kružnica g so stredom O a polomerom r . Nech AB je nemenný priemer kružnice g . Nech K je pevný bod úsečky AO . Označme t dotýčnicu ku kružnici g v bode A . Pre ľubovoľnú tetivu CD (rôznu od AB) prechádzajúcu bodom K označme P , Q postupne priesečníky priamok BC , BD s dotýčnicou t .

Dokážte, že súčin $|AP| \cdot |AQ|$ ostáva konštantný pri ľubovoľnej voľbe tetivy CD .

1.9 Kýžený Milovaný Spánok

levely L4 až L5, max. 8 bodov

Baška bola po tom dlhom upratovaní a renovovaní riadne unavená, a tak si ľahla na gauč. Neuvedomila si však, že sa jej telo unavilo natoľko, že ochorela, a počas spánku mala podivuhodný horúčkový sen naplnený matematikou...

Dané sú rôzne kladné celé čísla x, y a kladné celé číslo n , pre ktoré platí $x + y \mid x^{2n} + y^{2n}$. Ukážte, že $(x - y)^{4n} > xy$.

1.10 Konečne Máme Srandu

levely L4 až L5, max. 10 bodov

Po náročnej práci bolo nové KMS-ko dokončené. Nehybná skriňa stále zavádzala v strede miestnosti, chobotničky si krásne nažívali v akváriu a steny boli vytapetované. Už len ostávalo zahrať si na oslávenie nejakú peknú kartovú hru.

Máme balíček kariet očíslovaných od 1 po N , ktoré sú na začiatku usporiadané v ľubovoľnom poradí naukladané na sebe. Definujme *veľkú výmenu* ako nasledujúci postup pozostávajúci z N krokov:

- Vymeníme časť balíčka, ktorá sa nachádza nad kartou 1, s časťou, ktorá sa nachádza pod kartou 1;
- Následne vymeníme časť balíčka nad kartou 2 s časťou pod kartou 2;

¹Balíček kariet 4 rôznych farieb. Z každej farby je 13 rôznych kariet s hodnotami 1 až 13. Každá karta je tam nachádza dvakrát.

- Takto pokračujeme ďalej, až nakoniec vymeníme časť balíčka nad kartou N s časťou pod kartou N .

Ak je jedna z častí, ktoré vymieňame, prázdna, výmena zodpovedá jednoduchému presunu neprázdnej časti na spodok balíčka alebo naopak. Ukážte, že vykonanie $N + 1$ po sebe nasledujúcich *veľkých výmen* vždy vráti balíček do jeho pôvodného usporiadania.