



Zadania 2. kola zimnej časti

Termín odoslania 26. 10. 2026

V prípade otázok k zadaniam nás neváhajte kontaktovať na kms@kms.sk.

2.1 Koľko Musíme Spraviť?

level L1, max. 7 bodov

Po tom, čo sa vedúcim podarilo prerobiť KMSko, si uvedomili, že ich rozpočet nebol pripravený na takéto veľké míňanie peňazí. S veľkou dierou v rozpočte sa rozhodli pobiť tak, že všetci pôjdu na brigády. Denys a Košťa dostali v banke na starosť tabuľky. To však mali strašne rýchlo hotové, tak si začali vytvárať vlastné tabuľky, aby nebolo podozrivé, že nič nerobia.

Denys a Košťa zapísali do tabuľky 5×5 prirodzené čísla $1, 2, 3, \dots, 25$. Každé číslo napísali práve raz tak, že v každom políčku bolo práve jedno číslo a súčin čísel žiadneho riadka ani stĺpca nebol deliteľný ani 26, ani 34. Ukážte, že v tabuľke existuje riadok alebo stĺpec taký, že súčin jeho čísel je deliteľný 221.

2.2 Komplikácie Medzi Susedmi

levely L1 až L2, max. 7 bodov

Nate a Filip skončili na poli. Vzali do rúk motyky, ale zrazu prišiel sused pána, pre ktorého pracovali a kričal na nich, že čo robia na jeho pozemku! Zistili, že ich šéf a jeho sused sa už roky hádajú o tom, čo komu patrí. Rozhodli sa vykresliť ich pozemky a vyriešiť tento spor.

Majme obdĺžnik $ABCD$ a bod P na strane AD tak, aby uhol BPC bol 90° . Kolmica z bodu A na stranu BP pretína BP v bode M a kolmica z bodu D na stranu CP pretína CP v bode N . Ukážte, že stred obdĺžnika leží na úsečke MN .

2.3 Katastrofálny Mikroskopický Svet

levely L1 až L3, max. 7 bodov

Nati sa podarilo nájsť si brigádu v jednom laboratóriu, kde má za úlohu počítať kvasinky. Najskôr ju to veľmi nebavilo, ale čoskoro si uvedomila, že sa to dá vypočítať pomocou šikovnej rekurzívnej postupnosti.

Majme rekurzívnu postupnosť s prvými členmi $a_1 = \frac{1}{2}$ a $a_2 = 1$ a pre zvyšné členy a_n , kde $n \geq 3$, je definovaná predpisom

$$a_n = \frac{1 + a_{n-1}}{a_{n-2}}$$

. Nájdite súčin $a_1 a_2 a_3 \dots a_{2026}$.

2.4 Knihy Majú Systém

levely L1 až L4, max. 7 bodov

MišoM si našiel prácu v antikvariáte. Lenže hneď prvý deň, čo tam prišiel, zistil, že všetky knihy sa vyskytli na zemi. Nemohol knihy však na poličky poukladať len tak, keďže majiteľ bol matfyzák a on si vymyslel systém.

Nech x a y sú kladné celé čísla, pričom $x > y$. V závislosti od x a y vypočítajte pravdepodobnosť, že náhodne zvolený kladný deliteľ čísla 10^x je celočíselným násobkom čísla 10^y .

2.5 Kusy Matného Skla

levely L1 až L5, max. 7 bodov

Mati si našiel brigádu v sklenárstve, kde musel rezať sklo do luxusných okien. Majster sklenár bol však veľmi pedantný a vyžadoval od neho, aby z obrovských sklenených platní vyrezával špecifické symetrické tvary. Mati si pri pohľade na rozbité črepy začal krátiť čas tým, že na nich hľadal pekné vzory, až sa úplne zamyslel nad jedným geometrickým problémom.

Vzhľadom na $4 \geq n$ nájdite najmenšie vyhovujúce k , alebo zdôvodnite, prečo žiadne také k neexistuje.

Určite najmenšie kladné celé číslo $k \leq n$ vzhľadom na kladné celé číslo n tak, aby platilo nasledujúce tvrdenie: Medzi k náhodne zvolenými vrcholmi pravidelného n -uholníka je možné vybrať štyri vrcholy, ktoré tvoria deltoid¹.

2.6 Kopírovací Magický Stroj

levely L1 až L5, max. 7 bodov

MišoS sa zamestnal v starom kopírovacom centre. Majiteľ mal v rohu zapadnutú špeciálnu kopírku, ktorá fungovala na veľmi zvláštnom princípe – vždy, keď do nej vložil nejaký počet papierov, nevytlačila toľko kópií, koľko mala, ale nejaký iný počet podľa čudného pravidla. MišoS začal do stroja hádzať papiere a zapisovať si počty, ktoré mu z neho vypadli, dúfajúc, že v tom chaose objaví nejaký hlbší zmysel.

Máme nekonečnú postupnosť zadanú rekurentne ako $a_{n+1} = 2a_n - 1$, pričom $a_1 > 1$ je celé číslo. Pre kladné celé číslo n označme $A(n) \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ počet čísel v našej postupnosti, ktoré sú násobkom n . Dokážte, že pre nepárne prvočíslo p platí buď $A(p) = 0$ alebo $A(p) = \infty$, pričom bez ohľadu na voľbu a_1 môžu nastať oba prípady (t. j. vieme nájsť jedno nepárne prvočíslo, pre ktoré je to 0, a nejaké iné, pre ktoré je to nekonečno).

2.7 Kruhovú Možnosť Sadenia

levely L1 až L5, max. 7 bodov

Baška sa na leto zamestnala ako asistentka záhradného architekta. Dostala za úlohu navrhnuť nový park, ktorého centrom mal byť veľký trávnik. Z nejakého dôvodu si šéf potrpel na tom, aby okolo neho vybudovala kruhové kvetinové záhony. Keď si Baška do plánikov zakreslila stredy týchto záhonov a spojila ich čiarami, s úžasom zistila, že sa jej pred očami črtá niečo povedomé.

Baška si nakreslila trojuholník a na každej strane si zvolila bod. Potom nakreslila kružnicu, ktorá prechádzala jedným vrcholom a zvolenými bodmi na príľahlých stranách. Takto nakreslila zvyšné dve kružnice, ktoré prechádzali zvyšnými vrcholami trojuholníka. Dokážte, že stredy týchto kružníc tvoria trojuholník podobný pôvodnému trojuholníku.

2.8 Koľko Máme Spolu?

levely L1 až L5, max. 7 bodov

Po dlhom týždni plnom ťažkých brigád sa vedúci konečne stretli, aby si spočítali, koľko vlastne zarobili. Zistili však, že daňový systém je plný podivných zaokrúhľovaní nadol a ich výplaty vyzerajú úplne inak, ako čakali. Začali sa hádať, či je výhodnejšie peniaze počítať jedným alebo druhým spôsobom, až kým nezistili, že účtovníctvo ich zamestnávateľov predsa len dáva zmysel.

¹Deltoid je štvoruholník, v ktorom majú dve dvojice vzájomne priliehajúcich strán rovnakú veľkosť

Dokážte, že pre kladné celé $n > 1$ platí:

$$\lfloor n^{\frac{1}{2}} \rfloor + \lfloor n^{\frac{1}{3}} \rfloor + \dots + \lfloor n^{\frac{1}{n}} \rfloor = \lfloor \log_2 n \rfloor + \lfloor \log_3 n \rfloor + \dots + \lfloor \log_n n \rfloor$$

Kde $\lfloor n \rfloor$ značí zaokrúhlenie čísla n nadol.

2.9 Klesanie Má Systém

levely L4 až L5, max. 8 bodov

Joshua sa rozhodol pre pravú slovenskú brigádu: išiel robiť nosiča a pomocníka na horskú chatu kdesi vysoko v Tatrách. Kým cez deň potil krv pod ťažkými krosnami plnými sudov, večery boli podozrivo pokojné. Keď vonku zúrila silná víchrica a unavení turisti už dávno spali v spacákoch, Joshua sedel v prázdnej jedálni pri slabo plápolajúcej peci. Aby pri počúvaní svištiaceho vetra nezaspal na stole, vytiahol si zo starého batoha pokrčený papier a ceruzku. Pri popíjaní vlažného bylinkového čaju sa úplne odpojil od horskej reality a z nudy sa ponoril do sveta abstraktných funkcií.

Daná je striktne klesajúca funkcia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taká, že pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{2026\text{-krát}}(x) = x.$$

Ukážte, že $f(f(x)) = x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$, a navyše existuje práve jedno $x_0 \in \mathbb{R}$ také, že $f(x_0) = x_0$.

2.10 Krabice Musíme Skenovať

levely L4 až L5, max. 10 bodov

Krivoš si našiel prácu v obrovskom kuriérskom sklade, kde sa balíky triedili na dopravných pásoch podľa zložitých kódov. Šéf mu prikázal, že balíky musia spĺňať prísne kritériá, inak sa systém zasekne. Krivoš sa na tie kódy chvíľu pozeral a hneď mu bolo jasné, že v tom systéme musí existovať matematická diera, ktorá by mu zaručila, že sa vždy nájde balík s tým správnym číslom.

Nech $a > 1$ a c sú prirodzené čísla a nech $b \neq 0$ je celé číslo. Dokážte, že existuje prirodzené číslo n také, že číslo $a^n + b$ má deliteľ tvaru $cx + 1$, $x \in \mathbb{N}$.