



Zadania 3. kola zimnej časti

Termín odoslania

V prípade otázok k zadaniam nás neváhajte kontaktovať na kms@kms.sk.

3.1 Kód Musíme Stanoviť

level **L1**, max. **7 bodov**

Oslava dokončenia miestnosti sa mala oficiálne začať, no hlavné dvere do KMS sa zasekli a boli zamknuté dvomi starými zámkami. Alex si všimol, že mechanika dverí funguje na prevrátených pomeroch premenných. Aby všetkých pustil dnu a oslava mohla začať, musí rýchlo spočítať vzťah medzi zámkami.

Nech x, y sú kladné reálne čísla spĺňajúce $x + \frac{1}{y} = 5$ a $y + \frac{1}{x} = 7$. Pomôžte Alexovi nájsť hodnotu $\frac{x}{y}$.

3.2 Klárka Miluje Skrine

levely **L1 až L2**, max. **7 bodov**

Keďže hostia priniesli kopec spoločenských hier, Klárka ich chcela uložiť do skrine. Skriňa je však zabezpečená číselným zámkom.

Na displeji svieti 9-ciferný vzor $N = ABCABCBBB$, o ktorom návod hovorí, že je deliteľný úplne všetkými celými číslami od 1 do 17 vrátane. Cifry A, B a C sú navzájom rôzne. Aké sú hodnoty cifier A, B a C , ktoré musí vedúca Klárka zadať, aby skriňu s hrami otvorila?

3.3 KMS Miestnosti Slávnosť

levely **L1 až L3**, max. **7 bodov**

Na oslave sa vytvorila skvelá atmosféra a Sebík vytiahol gitaru, aby zahral pár pesničiek. Zvyšným vedúcim sa však veľmi nechcelo tancovať, tak sa rozhodol vniesť do spoločenstva trochu zábavy.

Sebík rozdal vedúcim $2n$ kartičiek s po sebe idúcimi celými číslami. Platí, že n je celé kladné číslo. Keď Sebík zahral pesničku, vedúci sa rozdelili do dvojíc a svoje čísla vynásobili. Sebík je zvedavý, aký mohol byť najmenší rozdiel medzi najväčším a najmenším zo získaných súčinov. Pomôžte mu to zistiť! Závisí tento najmenší možný rozdiel od toho, ktoré po sebe idúce čísla na začiatku vybral?

3.4 Kolmé Magnificentné Svetlo

levely **L1 až L4**, max. **7 bodov**

Aby bola atmosféra na oslave dokonalá, Baška zapla svetelnú laserovú šou nad tanečným parketom.

Laserová šou mala tvar rovnobežníka $ABCD$. Svetelný lúč dopadá z bodu D ako päta kolmice na uhlopriečku AC v bode X . Dokážte, že stred úsečky BX má rovnakú vzdialenosť od bodov A a C .

3.5 Komorné Matematické Švindľe

levely **L1 až L5**, max. **7 bodov**

Počas večera sa chcel Jožtek pochváliť nejakými novými matematickými trikmi.

Jožtek mal $n \geq 2$ neznámych nenulových celých čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$. Zistil, že ak súčet týchto čísel dáva rovnakú hodnotu ako ich súčin, teda $a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 a_2 \dots a_n$, nastane v ich vlastnostiach zaujímavá pravidelnosť. Pomôžte Jožtekovi dokázať, že za týchto podmienok je výraz $(a_1^2 - 1)(a_2^2 - 1) \dots (a_n^2 - 1)$ vždy druhou mocninou celého čísla.

3.6 Kruhové Mandaly Skicuje

levely L1 až L5, max. 7 bodov

Mimi nejako neohúrili Jožtekove triky. Namiesto toho jej do oka padol šmirák z Prázdninovej Šifrovačky Trojstenu povalujúci sa na zemi. Mimi si ho zobrala a na čistú stranu si začala kresliť mandalu.

Mimi si kreslila mandaly nasledovne. Najprv si nakreslila trojuholník $A_0 B_0 C_0$ a k nemu opísanú kružnicu k . Potom postupne pre každé celé kladné $i \geq 1$ nakreslila nový trojuholník $A_i B_i C_i$ do kružnice k nasledovne:

1. Z vrcholu A_{i-1} Mimi vedie os uhla $\angle B_{i-1} A_{i-1} C_{i-1}$ a tam, kde táto os opäť pretne kružnicu k , vznikne nový vrchol A_i .
2. Rovnakým spôsobom pomocou osí uhlov z vrcholov B_{i-1} a C_{i-1} získa nové vrcholy B_i a C_i .

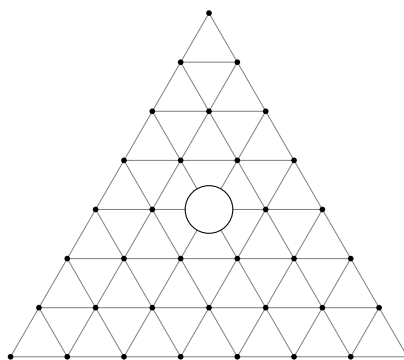
Takto Mimi nakreslila do mandaly n trojuholníkov, kde n je celé kladné číslo. Mimi si všimla, že vzniknutý trojuholník $A_n B_n C_n$ je rozmerovo aj tvarovo úplne zhodný s pôvodným trojuholníkom $A_0 B_0 C_0$. Vzhľadom na n určte všetky možné pôvodné trojuholníky $A_0 B_0 C_0$.

3.7 Konfety Majstrovsky Saje

levely L1 až L5, max. 7 bodov

Počas oslavy sa Iľo rozšantil s konfetami. Na to sa s ním rozšantil aj Alex s novými robotickými vysávačmi.

KMS miestnosť má tvar rovnostranného trojuholníka a je dláždená zhodnými rovnostrannými trojuholníkmi. K jednej strane miestnosti prilieha $n - 1$ trojuholníkových dlaždíc, kde $n > 1$ je celé kladné číslo. Na vrcholoch trojuholníkov je $1 + 2 + 3 + \dots + n$ konfiet, na každom vrchole je práve jedna konfeta. Vedúci dali na zem niekoľko vysávačov, aby ich povysávali.

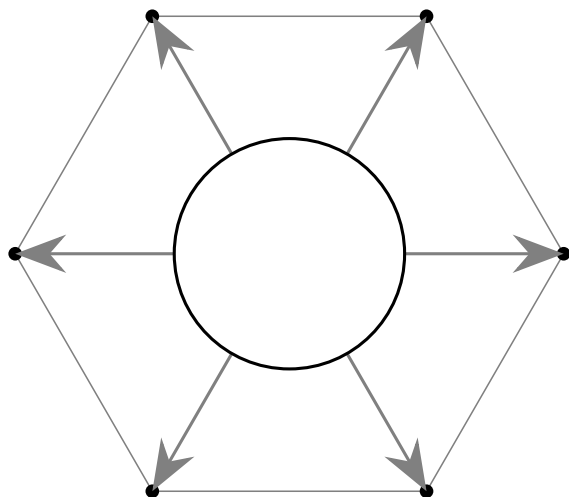


Obrázok 7.1: Príklad dláždenia s vysávačom pre $n = 8$.

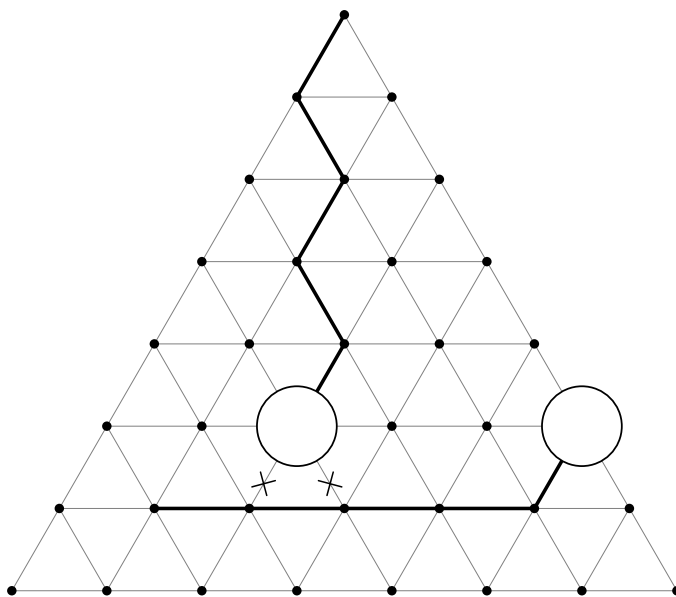
Vysávače sa pokladajú na vrcholy trojuholníkov a medzi vrcholmi sa pohybujú po stranách trojuholníkov. Z vrcholu sa teda vysávač môže pohnúť jedným z nasledujúcich smerov: vpravo dole, vpravo, vpravo hore, vľavo hore, vľavo, vľavo dole. Avšak keďže sú tieto robotické vysávače hlúpe, majú nastavené iba dva smery, ktorými sa môžu

pohybovať. Tieto smery musia byť susedné, teda napríklad, vysávač vie mať nastavené smery vpravo hore a vľavo hore, alebo vľavo hore a vľavo, ale nemôže mať nastavené smery vľavo a vpravo.

Taktiež, ak už nejaký vysávač povysával nejaký vrchol, nemohol ho navštíviť žiadny iný vysávač. Koľko najmenej vysávačov potrebujú vedúci vzhľadom na n , aby povysávali všetky konfety?



Obrázok 7.2: Smery pohybu vysávača.



Obrázok 7.3: Príklad vysávania dvoch vysávačov.

3.8 Koláč Medzi Súdruhmi

levely L1 až L5, max. 7 bodov

Na stôl dorazil obrovský koláč rozdelený na niekoľko častí. Filip ho chce spravodlivo rozdeliť vedúcim.

Nech $n > 1$ je kladné celé číslo, potom číslo $\varphi(n)$ ¹ je počet všetkých kladných celých k takých, že $1 \leq k \leq n$ a zároveň k a n sú nesúdeliteľné. Ukážte, že vedúci Filip vie vždy vybrať $\varphi(n) + 1$, nie nutne rôznych, deliteľov čísla n so súčtom n .

3.9 Krásny Mesačný Svetlovzor

levely L4 až L5, max. 8 bodov

Neskoro v noci vyšla Alicka s kamarátmi na terasu pozrieť sa na nočnú oblohu. Zaujalo ju konkrétne jedno súhvezdie.

Súhvezdie má tvar ostrouhlého trojuholníka ABC . Nech H je jeho ortocentrum a O je stred jeho opísanej kružnice. Nech P je stred úsečky BH a Q je stred úsečky CH . Alicka chce ostatným dokázať, že opísané kružnice trojuholníkov PHQ a ABC sa dotýkajú práve vtedy, keď $OH \parallel BC$.

3.10 Končíme Monografiou, Spánkom

levely L4 až L5, max. 10 bodov

Na úplný záver kolaudačnej párty, keď už svitá, vytiahne Dominik svoj obľúbený zápisník s reálnymi funkciami.

¹Niektoré vlastnosti čísla φ , ináč známeho ako Eulerova funkcia, môžete nájsť na Wikipédii alebo v KMS materiáloch: https://cs.wikipedia.org/wiki/Eulerova_funkce, <https://materialy.kms.sk/pdfs/euler-theorem.pdf>.

Nájdite všetky funkcie $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ také, že pre všetky $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí $f(xf(x+y)) = yf(x) + 1$, aby mohol Dominik s pokojným svedomím ukončiť oslavu a ísť spať.