Dôkazové metódy v teórii grafov

Letná škola Trojstenu, 16. 7. 2018
Jozef Rajník

Rátanie stupňov a parita

Úloha 1. Zistite, pre ktoré kladné celé čísla n, k existuje graf, ktorý má n vrcholov, pričom každý má stupeň k. Ako sa zmení riešenie, keď vyžadujeme, aby graf bol súvislý?

Úloha 2 (61MO A-I-5)**.** V istom meste majú vybudovanú sieť na šírenie klebiet, v ktorej si každý klebetník vymieňa informácie s práve tromi klebetnicami a každá klebetnica si vymieňa informácie s práve tromi klebetníkmi. Inak sa klebety nešíria.

a) Dokážte, že klebetníkov a klebetníc je rovnako veľa.

b) Predpokladajme, že sieť na šírenie klebiet je súvislá (klebety od ľubovoľného klebetníka a ľubovoľnej klebetnice sa môžu dostať ku všetkým ostatným). Dokážte, že aj keď sa jeden klebetník z mesta odsťahuje, zostane sieť súvislá.

Matematická indukcia

Úloha 3. Majme graf s maximálnym stupňom s. Dokážte, že vieme jeho vrcholy ofarbiť $s+1$ farbami tak, aby každé dva vrcholy spojené hranou mali rôznu farbu.

Úloha 4 (KMS 17/18-1L-7)**.** Ježiško má pripravených m rôznych darčekov, z každého jeden kus. Na svete je n detí ($n \leq m$). Pre kladné celé číslo $i \leq n$, i-te dieťa má z Ježiškových m darčekov vyhliadnutých d_i darčekov, po ktorých túži ($1 \leq d_i \leq m$). Ježiško vie, že platí

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \cdots + \frac{1}{d_n} \leq 1.$$

Dokážte, že Ježiško môže rozdať deťom po jednom darčeku tak, aby každé dieťa dostalo darček, po ktorom túži.

Úloha 5. V skupine n platí, že ak vyberieme ľubovoľných štyroch ľudí, tak aspoň jeden z nich pozná zvyšných troch (známosti sú vzájomné). Dokážte, že existuje človek, čo pozná všetkých ostatných.

Úloha 6 (KMS 14/15-1Z-8)**.** Mišo sa hrá na Spidermana a vyrobil si doma pavučinu. Tá pozostáva z 3^n kamienkov, kde n je prirodzené číslo, pričom každá dvojica kamienkov je spojená práve jednou nitkou. Za chvíľu sa vrátia Mišovi rodičia, a tak potrebuje pavučinu rozpliesť. Rozpletá ju nasledovným spôsobom: vyberie si trojicu kamienkov, medzi ktorými sú zatiaľ všetky tri nitky, a tieto tri nitky odstráni. Dokážte, že takýmto spôsobom vie postupne z pavučiny odobrať všetky nitky.

Úloha 7 (Matelova veta)**.** Koľko najviac hrán môže obsahovať graf na n vrcholoch, ktorý neobsahuje trojuholník?

Úloha 8 (KMS 06/07, 1. zimná séria, úloha 11)**.** Na ostrove žije n domorodcov. jedného dňa náčelník rozhodol, že všetci (vrátane neho) si urobia a budú nosiť náhrdelník zložený z 0 alebo viac jednofarebných kamienkov. Dvaja domorodci majú mať aspoň jeden kamienok rovnakej farby práve vtedy, keď sú priatelia.

a) Dokážte, že domorodci môžu splniť náčelníkov rozkaz.

b) Aký je minimálny počet farieb kamienkov potrebný na to, aby sa dal splniť náčelníkov rozkaz bez ohľadu na priateľské vzťahy na ostrove?

Extremálny princíp

Úloha 9. Dokážte, že súvislý graf, ktorého každý vrchol má párny stupeň, možno nakresliť jedným ťahom, pričom skončíme v rovnakom vrchole, ako sme začali.

Úloha 10. Dokážte, že súvislý graf, ktorý má najviac dva vrcholy nepárneho stupňa, možno nakresliť jedným ťahom.

Úloha 11. Nech G je taký graf, v ktorom každý vrchol má stupeň aspoň 3. Dokážte, že graf G obsahuje cyklus párnej dĺžky.

Úloha 12. V skupine $n > 6$ detí má každé dieťa práve troch kamarátov (kamarátsvo je vzájomné). Dokážte, že deti možno rozdeliť na dve neprázdne skupiny tak, že každé dieťa v skupine má v nej aspoň dvoch svojich kamarátov.

Úloha 13 (Rusko, 2001)**.** Na párty je $2n + 1$ ľudí. Vieme, že ak si vyberieme skupinu ľubovoľných n ľudí, tak existuje mimo tejto skupiny účastník párty, ktorý pozná všetkých ľudí z tejto skupiny. Dokážte, že na párty je účastník, ktorý pozná všetkých účastníkov párty.

Úloha 14. Nájdite najmenšie také číslo s, že v grafe na 10 vrcholoch s minimálnym stupňom k existuje kružnica prechádzajúca cez všetky vrcholy.

Úloha 15. Dokážte, že v grafe s n vrcholmi, kde má každý vrchol stupeň aspoň $n/2$ existuje kružnica prechádzajúca všetkými vrcholmi.

Úloha 16 (OMM 2009)**.** Na párty je n osôb. Vieme, že medzi ľubovoľných štyroch osôb existujú tri osoby, ktoré poznajú každá s každou alebo existujú tri osoby, medzi ktorými sa žiadne dve nepoznajú. Dokážte, že ich vieme rozdeliť na dve skupiny, kde v jedenej skupine sa budú všetci poznať a v druhej skupine sa nikto nebude poznať.

Ďalšie úlohy

Úloha 17 (PraSe, 2014/15, 1. podzimní, úloha 5)**.** Veľkoobchod s farbami má v každom z n miest svoju pobočku. Medzi každými dvomi mestami vedie cesta. Bolo rozhodnuté, že je treba nakresliť plánik týchto pobočiek z ciest medzi nimi tak, aby

(i) každé mesto malo inú farbu než všetky z cesty z neho vedúce,

(ii) žiadne dve cesty vedúce do rovnakého mesta nemali rovnakú farbu.

Koľko najmenej farieb je na to potrebných?

Náznaky riešení

1 Spočítajte počet hrán grafu pomocou jeho stupňov.

2 a) Spočítajte počet hrán dvomi spôsobmi – pomocou stupňov klebetníkov a stupňov klebetníc.
b) Spočítajte stupne okolo odstráneného klebetníka.

4 Indukcia, odoberte dieťa, ktoré chce najviac darčekov – ukážte, že chce aspoň n.

5 Indukcia, odoberte A, potom nejaký B pozná všetkých. Ak sa pozná každý z každým, tak je to easy. Ak existujú C a D, čo sa nepoznajú, zoberte štvoricu A, B, C, D – v nej musí A poznať B a teda B pozná všetkých $+A$.

6 Indukcia. Rozdeľte na 3 kôpky po 3^n kamienkov. Nitky medzi nimi odstráňte takto: pre každé a, b odstráňte nikty medzi kameňmi číslo a, b a $a+b$ (z každej kôpky jeden kameň).

8 Rozdeľte na párny a nepárny prípad a indukcia na počet hrán.

11 Zoberte najdlhšiu cestu. Hrany z jedného koncového vrchola spolu s tou cestoua vytvoria tri kružnice. Jedna z nich to je.

12 Zoberte najmenší cyklus ako jednu skupinu. Ak má aspoň 5 vrcholov, je to zjavne OK. Ak má menej a nie je OK, priberte doňho ďalšie vrcholy, nie je veľa možností, ako môže vyzerať situácia.

13 Ukážte, že tam je K_{n+1}.

14 Je to 5. Pozri ďalšiu úlohu.

15 Zoberte najdlhšiu cestu. Pozrite sa, kam vedú hrany z koncových vrcholov a spravte z nich kružnicu obsahujúcu všetky vrcholy najdlhšej cesty. Ak existuje vrchol mimo tejto kružnice, nájdite dlhšiu cestu.

17 Zjavne treba aspoň n farieb. Stačí to. Očíslujte si mestá $0,\ldots,n-1$, každému dajte farbu, aké má číslo. Ceste medzi mestami i, j dajte farbu $i+j \bmod n$.