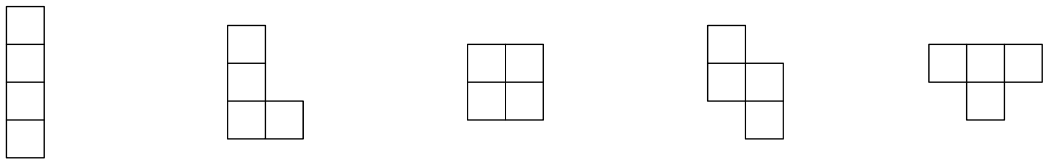
Štvorčekové siete

Jozef Rajník, Letná škola Trojstenu, 17. 7. 2018

Pri mnohých úlohách na štvorčekovej sieti sa objavujú dieliky, kachličky alebo inak nazvané veci pozostávajúce z niekoľkých políčok usporiadaných do nejakého tvaru. Pre takéto tvary sa používa názov *polyominá*.



I L O S T

Obr. 1: Tetrominá s ich značkami

1 Strielanie lodí

Úloha 1.1. Na pláne 8×8 políčok sa nachádza loď rozmerov 1×2 (vodorovne alebo zvislo otočená). Na koľko najmenej políčok musíme vystreliť, aby sme loď s istotou zasiahli aspoň raz?

Úloha 1.2. Na pláne 7×7 sa nachádza loď 1×2 (ľubovoľne otočená).

Úloha 1.3. Na pláne 5×5 sa nachádza loď 1×3 (ľubovoľne otočená).

Úloha 1.4. Na pláne 6×6 sa nachádza loď 1×3 (ľubovoľne otočená).

Úloha 1.5. Na pláne 7×7 sa nachádza loď 1×3 (ľubovoľne otočená).

Úloha 1.6. Na pláne 5×5 sa nachádza loď 1×4 (ľubovoľne otočená).

Úloha 1.7. Na pláne 6×6 sa nachádza loď 1×4 (ľubovoľne otočená).

Úloha 1.8. Na pláne 7×7 sa nachádza loď 1×4 (ľubovoľne otočená).

Úloha 1.9. Na pláne 8×8 sa nachádza loď 1×4 (ľubovoľne otočená).

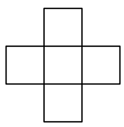
Úloha 1.10. Na pláne 8×8 sa nachádza loď 2×2.

Úloha 1.11. Na pláne 9×9 sa nachádza loď 2×2.

Úloha 1.12. Na pláne 6×6 sa nachádza loď v tvare L-ka.

Úloha 1.13. Na pláne 7×7 sa nachádza loď v tvare L-ka.

Úloha 1.14. Na pláne 3×5 sa nachádza loď pozostávajúca z piatich políčok v tvare pluska.



Úloha 1.15. Na pláne 6×6 sa nachádza loď v tvare pluska.

Úloha 1.16. Na pláne 7×7 sa nachádza loď rozmerov 2×3.

Úloha 1.17. V závislosti od prirodzeného čísla n určte, koľko najmenej výstrelov treba na zasiahnutia lode 1×3 (ľubovoľne otočenej) na pláne $n \times n$.

Úloha 1.18. V závislosti od prirodzeného čísla n určte, koľko najmenej výstrelov treba na zasiahnutia lode 1×4 (ľubovoľne otočenej) na pláne $n \times n$.

Úloha 1.19. V závislosti od prirodzeného čísla n určte, koľko najmenej výstrelov treba na zasiahnutia lode 1×5 (ľubovoľne otočenej) na pláne $n \times n$.

Na tento štýl si môžete skúsiť vymyslieť veľa úloh, stačí zmeniť veľkosť tabuľky alebo veľkosť lode. Taktiež môžete skúšať riešiť úlohy pre všeobecné rozmery, dokonca pre obdĺžnikové tabuľky.

2 Dláždenie tabuliek

V nasledujúcich úlohách budeme dláždiť tabuľku $n \times n$ štvorčekov dlaždicami určitého tvaru. Pri dláždení môžeme dlaždice ľubovoľne otáčať a prevracať. Ukladáme ich bez prekrývania. Úlohou bude zistiť, koľko najviac dlaždíc možno použiť. Respektíve, zistiť, koľko najmenej štvorčekov môže ostať nevydláždených – tento počet vychádza často krajšie a počet použitých dlaždíc sa dá z neho ľahko odvodiť.

Nasledovné úlohy sú už zadávané všeobecne pre rozmer tabuľky $n \times n$. Odporúčam vám vyriešiť si úlohy najprv pre malé hodnoty n, odpozorovať, ako sa riešenie správa, a následne správne zovšeobecniť.

Úloha 2.1. Tabuľku $n \times n$ chceme vydláždiť dlaždicami v tvare tetramina I.

Úloha 2.2. Tabuľku $n \times n$ chceme vydláždiť dlaždicami v tvare tetramina O.

Úloha 2.3. Tabuľku $n \times n$ chceme vydláždiť dlaždicami v tvare tetramina L.

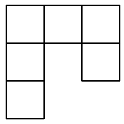
Úloha 2.4. Tabuľku $n \times n$ chceme vydláždiť dlaždicami v tvare triomina L.

Úloha 2.5. Tabuľku $n \times n$ chceme vydláždiť dlaždicami v tvare tetramina S.

Úloha 2.6. Tabuľku $n \times n$ chceme vydláždiť dlaždicami v tvare tetramina T.

Úloha 2.7 (KMS 14/15-2Z-9, upravené)**.** Tabuľku 7×7 chceme vydláždiť triominami L a tetreminami S. Koľko najemnej triomín L musíme použiť, ak chceme tabuľku vydlížditť?

Úloha 2.8 (IMO 2004)**.** Nájdite všetky dvojice kladných celých čísel (m, n) takých, že tabuľku $m \times n$ možno vydláždiť kachličkami:



3 Figúrky na šachovnici

V nasledovných úlohách budeme zisťovať koľko najviac šachových figúrok vieme umiestniť na šachovnicu tak, aby sa žiadne dve neohrozovali. Pokiaľ nie je uvedené inak, šachovnica má zakaždým rozmery 8×8.

Úloha 3.1. Koľko najviac **veží** možno tak umiestniť?

Úloha 3.2. Koľko najviac **strelcov** možno tak umiestniť?

Úloha 3.3. Koľko najviac **jazdcov** možno tak umiestniť?

Úloha 3.4. Koľko najviac **dám** možno tak umiestniť?

Úloha 3.5. Koľko najviac **pešiakov** možno tak umiestniť?

Úloha 3.6. Koľko najviac kráľov možno umiestniť na šachovnicu rozmerov $n \times n$ tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali. Výsledok určte v závislosti od prirodzeného čísla n.

Úloha 3.7. Koľko najviac jazdcov možno umiestniť na šachovnicu rozmerov 8×8 tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali. Ako je to pre šachovnicu 7×7?

Skúste si predchádzajúce úlohy vyriešiť pre šachovnice všeobecných rozmerov alebo si skúste vymyslieť vlastné figúrky.

4 Prepínanie políčok v tabuľke

Úloha 4.1 (KMS 15/16, Z2, 7)**.** Na každom políčku tabuľky $n \times m$ je lampa. Na začiatku sú všetky lampy vypnuté. V každom ťahu si môžeme vybrať v riadku alebo stĺpci m po sebe idúcich lámp a zmeniť stav týchto lámp (zo zapnutej na vypnutú a naopak). Dokážte, že stav, v ktorom sú všetky lampy zapnuté, vieme dosiahnuť práve vtedy, keď číslo m je deliteľom čísla n.

Úloha 4.2. Na každom políčku tabuľky 8×8 je lampa. Nazačiatku sú všetky lampy zhasnuté. V jednom ťahu si vyberieme jednu lampu a jeden smer (buď zvislý, alebo vodorovný) a prepneme vybranú lampu a všetkých jej susedov v danom smere. Po istom počte takýchto ťahov ostala svietiť práve jedna lampa. Nájdite všetky možné pozície tejto lampy.

Úloha 4.3 (APMO 2007)**.** Na každom políčku tabuľky 5×5 je zhasnutá lampa. V jedom kroku si môžeme vybrať lampu a vybranú lampu spolu so všetkými lampami na susedných políčkach prepnúť. Po niekoľkých krokoch nám ostala svietiť jedna lampa. Nájdite všetky políčka, na ktorých to mohlo byť.

Úloha 4.4. V tabuľke 4×4 môžeme presúvať štvorčeky na voľné miesto. Môžeme tak z konfigurácie naľavo dostať konfiguráciu napravo?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Úloha 4.5 (KMS, 03/04-1L-10)**.** Šachová figúrka *zombík* sa v jednom ťahu môže pohnúť buď o 1 políčko hore, o 1 políčko hore, alebo o 1 políčko šikmo doľava dole. Na začiatku stojí zombík v ľavom dolnom rohu šachovnice 8×8. Dá sa s ním prejsť po celej šachovnici tak, aby na každom políčku stál práve raz?

Nájdite všetky celé čísla n, pre ktoré s ním možno prejsť šachovnicu $n \times n$.

5 Ďalšie úlohy

Úloha 5.1 (KMS 07/08-Z1-6)**.** V štvorcom parku je do štvorcovej mriežky 100×100 umiestnených 10 000 stromov. Koľko z nich sa dá najviac vyťať tak, aby zo žiadneho pňa nebolo vidieť iný peň? Dokážte, že viac pňov sa už takto vyťať nedá.

Úloha 5.2 (KMS 15/16-1L-6)**.** Ľudka a Kika si zobrali tabuľku $m \times n$ políčok, kde m, n sú nepárne prirodzené čísla. Každé jej políčko zafarbili namodro alebo načerveno. Ľudke sa páčia *červeno dominantné* riadky. To sú také riadky, ktoré obsahujú viac červených políčok ako modrých. Kika zas obľubuje *modro dominantné* stĺpce, teda také stĺpce, ktoré obsahujú viac modrých políčok ako červených. Ľudka a Kika pri zafarbovaní spolupracovali, aby boli obe spokojné. V závislosti od čísiel m, n nájdite najväčší súčet počtu modro dominantných stĺpcov a červeno dominantných riadkov, ktorý Ľudka s Kikou mohli dostať.

Úloha 5.3 (PraSe, 1. podzimní série 2014)**.** Na každom políčku šachovnice 8×8 sa nachádza zombík. Naraz sa každý zombík presunie na políčko, ktoré susedí stranou s políčkom, na z ktorého sa zombík presúva. Koľko najviac políčok môže ostať voľných?

Úloha 5.4 (KMS 07/08-Z3-9)**.** Nájdite najmenšie celé číslo d také, že čísla 1, 2, ..., 16 vieme rozmiestniť na šachovnicu 4×4 tak, že každé použijeme práve raz a rozdiel čísel na ľubovoľných dvoch políčkach susediacich stranou bude najviac d.

Úloha 5.5 (KMS 17/18-3Z-9)**.** Linoleum na podlahe jedálne tvorí štvorčekovú mriežku $m \times n$ štvorčekov. V každom štvorčeku sa nachádza jeden stôl. Osvetlenie jedálne zabezpečujú lampy, ktoré sa nachádzajú v niektorých mrežových bodoch mriežky (vrátane tých na obvode, všetkých mrežových bodov je teda $(m+1)(n+1)$). Každá lampa osvetľuje stoly na tých štvorčekoch, v ktorých rohoch sa nachádza. V závislosti od prirodzených čísel m, n nájdite najmenší počet lámp potrebný na to, aby každý stôl bol osvetlený aspoň dvomi lampami.

Úloha 5.6. V tabuľke $n \times n$ je $n - 1$ infikovaných políčok. Každú sekundu sa infikujú všetky políčka, ktoré susedia (stranou) s aspoň dvomi infikovanými políčkami. Ukážte, že jedno políčko vždy ostane neinfikované.

Úloha 5.7 (12/13-Z1-9)**.** Každý štvorček na nekonečnom štvorčekovom papieri je zafarbený práve jednou z piatich farieb. Každý kríž z piatich štvorčekov (ako na obrázku) obsahuje každú farbu práve raz. Dokážte, že každý obdĺžnik 5×1 musí obsahovať každú farbu práve raz.

Úloha 5.8 (KMS 12/13-L1-8)**.** Vieme uložiť čísla 1 až 100 do štvorčekovej mriežky 10×10 tak, aby v ľubovoľnom tetromine T bol súčet čísle párny?

Úloha 5.9 (KMS 13/14-Z1-5)**.**