Diskrétny kalkulus

Jozef Rajník, Letná škola Trojstenu, 18. 7. 2018

Na začiatok si predstavíme zopár postupnosti, s ktorými budeme pracovať.

Definícia 1. Pre nezáporné celé (resp. aj reálne) číslo n a nezáporné celé číslo k definujeme *k-tu klesajúcu faktoriálnu mocninu čísla n* ako

$$n^{\underline{k}} = \underbrace{n(n-1)\dots(n-k+1)}_{k \text{ zátvoriek}}.$$

Poznámka. Pre záporný exponent definujeme klesajúcu mocninu ako

$$n^{\underline{-k}} = \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}.$$

Definícia 2. *Kombinačné číslo* označuje počet spôsobov, ako z n prvkov vybrať k, ak nám nezáleží na poradí:

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 1},$$

kde n a k sú nezáporné celé čísla. Všimnite si, že kombinačné číslo tu je definované aj pre prípad, keď $k > n$ – v takom prípade je jeho hodnota definovaná ako 0. Ak je k alebo n záporné celé číslo, definujeme jeho hodnotu ako 0.

Definícia 3. Postupnosť *Fibonacciho čísel* je definovaná nasledovne: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pre každé nezáporné celé číslo n

Definícia 4. *n-té harmonické číslo* je

$$H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Definícia 5. *Diferenciou* postupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ nazývame postuponosť $\{\Delta a_n\}_{n=0}^{\infty}$ definovanú predpisom

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n.$$

Veta 1. Diferencie niektorých známych postupností:

Postupnosť	Diferencia	Poznámky
$n^{\underline{k}}$	$kn^{\underline{k-1}}$	$k \in \mathbb{Z}$
2^n	2^n	
a^n	$(a-1)a^n$	$a \in \mathbb{Z}^+$
F_n	F_{n-1}	
H_n	$\frac{1}{n+1}$	
$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k-1}$	$k \in \mathbb{N}$

Veta 2. Pre počítanie diferencií platia nasledujúce pravidlá:

1. $\Delta(f_n + g_n) = \Delta f_n + \Delta g_n$,
2. $\Delta(f_n - g_n) = \Delta f_n - \Delta g_n$,
3. $\Delta(cf_n) = c\Delta f_n$,
4. $\Delta(f_n g_n) = f_n \Delta g_n + g_{n+1} \Delta f_n$.

Úloha 1. Určte diferencie nasledovných postupností:

1. $a_n = n$,
2. $a_n = n^2$,
3. $a_n = 3^n$,
4. $a_n = 4n^{\underline{3}}$,
5. $a_n = 3^n + 4n^{\underline{3}}$,
6. $a_n = n3^n$,
7. $a_n =$,
8. $a_n =$,
9. $a_n =$,

Sumy

Definícia 6. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ označíme $\{\sum a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ľubovoľnú postupnosť S, ktorá spĺňa $\Delta S_n = s_n$. Symbolom $\sum_k^l a_n$ označíme číslo $S_l - S_k$.

Veta 3. Nech S a T sú dve také postupnosti, že $\Delta S = \Delta T = a$. Potom existuje konštanta c taká, že pre všetky n platí $S_n - T_n = c$. Teda všetky postupnosti $\sum a$ sa líšia len o konštantu.

Veta 4. Platí

$$\sum_k^l a = a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{l-1}.$$

Veta 5. Diferencie niektorých známych postupností:

Postupnosť	Suma	Poznámky
$n^{\underline{k}}$	$\frac{n^{\underline{k+1}}}{k+1} + c$	$k \in \mathbb{Z} - \{1\}$
2^n	$2^n + c$	
a^n	$\frac{a^n}{a-1} + c$	$a \in \mathbb{Z}^+$
F_n	$F_{n+1} + c$	
$\frac{1}{n} = n^{\underline{-1}}$	$H_{n-1} + c$	
$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k+1} + c$	$k \in \mathbb{N}$

Veta 6. Pre počítanie súm platí

1. $\sum(f_n \pm g_n) = \sum f_n \pm \sum g_n$,
2. $\sum(cf_n) = c\sum f_n$.

Úloha 2. Vypočítajte

1. $\sum_{k=0}^n k$,
2. $\sum_{k=0}^n a^k$,
3. $\sum_{k=0}^n F_k$,
4. $\sum_{k=0}^n \binom{k}{m}$,
5. $\sum_{k=1}^n (k-1)k$,
6. $\sum_{k=0}^n k^2$.
7. $\sum_{k=0}^n k^3$,

Veta 7 (Sumácia per partes)**.** Platí

$$\sum(f_n \Delta g_n) = f_n g_n - \sum(g_{n+1} f_n).$$

Úloha 3. Vypočítajte

1. $\sum_{k=0}^{n} k2^k$,
2. $\sum_{k=0}^{n} H_k$,
3. $\sum_{k=0}^{n} kF_k$,
4. $\sum_{k=0}^{n} kH_k$,
5. $\sum_{k=0}^{n} k^{\underline{2}}H_k$,
6. $\sum_{k=0}^{n} k^2 2^k$,