Geometrické zobrazenia

Jozef Rajník, Letná škola matematiky 20. 7. 2018

Seminár bol spracovaný primárne podľa PraSe seriálu Geometrická zobrazení `http://mks.mff.cuni.cz/archive/31/9.pdf`.

1 Osová súmernosť

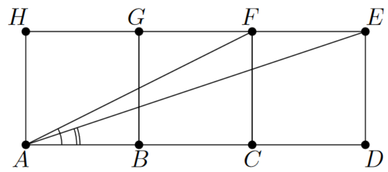
Úloha 1.1. V rovine je daná priamka p a body A, B ležiace v tej istej polrovine vymedzenej priamkou p. Nájdite na priamke p bod P taký, že súčet $|AP| + |PB|$ je najmenší možný.

Úloha 1.2. Na priemere kružnice k zvolíme bod M. Tetiva CD kružnice l prechádza bodom M a zviera s priemerom AB uhol 45°. Dokážte, že hodnota výrazu $|CM|^2 + |MD|^2$ nezávisí na polohe bodu M.

Úloha 1.3. Je daný ostrouhlý trojuholník s priesečníkom výšok H. Dokážte, že obrazy bodu H v osových súmernostiach podľa strán trojuholníka ABC ležia na kružnici jemu opísanej.

Úloha 1.4. Vnútri ostrého uhla s ramenami p, q je daný bod A. Nájdite body P na priamke p a Q na q tak, aby $|AP| + |PQ| + |QA|$ bolo čo najmenšie možné.

Úloha 1.5. Sú dané tri zhodné štvorce ako na obrázku. Určte hodnotu $|\angle DAE| + |\angle DAF|$.



2 Otočenie

Úloha 2.1. Vo štvorci $ABCD$ je daný bod P tak, že $|PD| = 1$, $|PA| = 2$ a $|PB| = 3$. Určte veľkosť uhla APD.

Úloha 2.2. Rovnostranný trojuholník ABC je vpísaný do kružnice k. Na kratšom oblúku BC kružnice k leží bod P. Dokážte, že platí $|PA| = |PB| + |PC|$.

3 Stredová súmernosť

Úloha 3.1. Kružnica pretína strany BC, CA, AB trojuholníka ABC postupne v bodoch A_1 a A_2, B_1 a B_2, C_1 a C_2. Ukážte, že ak sa kolmice na zodpovedajúce strany vedené bodmi A_1, B_1, C_1, pretínajú v jednom bode, tak sa v jednom bode pretnú aj kolmice na zodpovedajúce strany vedené bodmi A_2, B_2, C_2.

Úloha 3.2. Na strane BC trojuholníka ABC sú dané (nie nutne rôzne) body K, L tak, že $|BK| = |CL|$. Pre ktorú polohu bodov K, L je súčet $|AK| + |AL|$ najmenší možný?

Úloha 3.3. Ukážte, že obrazy priesečníka výšok v stredových súmernostiach podľa stredov strán daného trojuholníka ABC ležia kružnici opísanej trojuholníku ABC.

Úloha 3.4. Na ťažnici z vrcholu A trojuholníka ABC leží bod X tak, že platí $|CX| = |AB|$. Označme Y priesečník priamky CX a AB. Dokážte, že trojuholník AXY je rovnoramenný.

Úloha 3.5. Kružnice k a l s polomerom 1 sa dotýkajú (zvonka) v bode T. Kružnica m s polomerom 2 má stred na kružnici k a dotýka sa kružnice k v bode B. Dokážte, že priamka BT prechádza jedným z priesečníkov kružníc l a m.

4 Posunutie

Úloha 4.1. Bod P sa teraz pre zmenu nachádza vnútri rovnobežníka $ABCD$ tak, že platí $|\angle APD|+|\angle CPB| = 180°$. Dokážte, že $|\angle CBP| = |\angle PDC|$.

Úloha 4.2. Označme postupne A_1, B_1, C_1 stredy strán BC, CA, AB trojuholníka ABC. Označme I_a, I_b, I_c postupne stredy kružníc vpísaných trojuholníkom AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 a O_a, O_b, O_c stredy kružníc opísaných týmto trojuholníkom. Dokážte, že trojuholníky $I_aI_bI_c$ a $O_aO_bO_c$ sú zhodné.

Úloha 4.3. Dediny (body) A, B oddeľuje rieka, ktorej brehy tvoria dve rovnobežné priamky. Kde máme postaviť most AB, kolmý na brehy rieky, aby cesta $AMNB$ bola čo najkratšia?

5 Všehochuť zhodných zobrazení

Úloha 5.1 (PraSe 11/12. 1. seriálová séria, úloha 1)**.** Na strane CD štvorca $ABCD$ je daný bod E. Os uhla BAE pretína stranu BC v bode F. Dokážte, že $|AE| = |BF| + |DE|$.

Úloha 5.2 (PraSe 11/12. 1. seriálová séria, úloha 2)**.** V rovine sú dané body A a B. Uvažujme všetky konvexné päťuholníky $ABCDE$ v jednej polrovine určenej priamkou AB také, že $ABDE$ je rovnobežník a BCD je rovnoramenný pravouhlý trojuholník s pravým uhlom pri vrchole B. Ukážte, že všetky kružnice nad priemerom CE prechádzajú spoločným bodom.

6 Rovnoľahlosť

Rovnoľahlosť so stredom S a koeficientom k je zobrazenie dané bodom S, tzv. *stredom rovnoľahlosti* a nenulovým reálnym číslom k, *koeficientom rovnoľahlosti.* Označuje sa $H(S, k)$. Pre $k > 0$ každý bod $X \neq S$ roviny zobrazí na bod X', ktorý leží na polpriamke SX taký, že $|SX'| = k|SX|$. Pre záporné k bod X' leží na polpriamke opačnej SX. Rovnoľahlosť s kladným, resp. záporným k sa nazýva aj *kladná*, resp. *záporná* rovnoľahlosť.

Rovnoľahlosť je príklad *podobného zobrazenia*, t. j. zobrazuje útvary na s nimi podobné. Nemusí teda zachovávať dĺžky strán, zachováva však pomery strán a uhly

Vlastnosti rovnoľahlosti (premyslite si, prečo platia):

1. Každá rovnoľahlosť má práve jeden samodružný bod — bod S (ak $k \neq 1$, vtedy sú všetky body samodružné).
2. Obraz priamky je priamka s ňou rovnobežná.
3. Stred rovnoľahlosti, bod a jeho obraz ležia na jednej priamke.
4. Inverzným zobrazením k rovnoľahlosti $H(S, k)$ je rovnoľahlosť $H(S, 1/k)$.
5. Rovnoľahlosť $H(S, -1)$ je stredová súmernosť so stredom S.
6. Medzi ľubovoľnými dvomi úsečkami existuje práve jedna kladná a práve jedna záporná rovnoľahlosť.
7. Existuje rovnoľahlosť (alebo posunutie) medzi ľubovoľnými dvomi podobnými mnohouholníkmi, ktorých odpovedajúce strany sú rovnobežné.

Rovnoľahlosť nám vie dať lepší náhľad do niektorých geometrických úloh. Ak potrebujeme dokázať, že tri body A, B, C ležia na priamke, môžeme nájsť rovnoľahlosť so stredom v bode A, v ktorej sa bod B zobrazí na bod C. Ak je našou úlohou dokázať, že tri priamky AA', BB', CC' sa pretínajú v jednom bode, stačí nám nájsť rovnoľahlosť, v ktorej sa body A, B, C zobrazia postupne na body A', B', C'. Tieto priamky potom budú prechádzať stredom rovnoľahlosti.

Rovnoľahlosť príde vhod pri práci s kružnicami. Ak máme kružnice k, l s rôznymi polomermi, tak existuje práve jedna záporná a práve jedna kladná rovnoľahlosť, ktorá zobrazí kružnicu k na kružnicu l. Stredy týchto rovnoľahlostí vieme nájsť ako priesečníky spoločných vonkajších (pre kladnú rovnoľahlosť) alebo vnútorných (pre zápornú) dotyčníc. Samozrejme, stred zápornej rovnoľahlosti nájdeme takto len vtedy, ak kružnice nemajú spoločný bod, čo znamená, že majú spoločné vnútorné dotyčnice.

Obzvlášť zaujímavý je prípad, keď sa kružnice k a l dotýkajú. Vtedy je stredom zápornej rovnoľahlosti zobrazujúcej k na l bod ich vzájomného dotyku. Táto rovnoľahlosť je zároveň aj užitočný spôsob, ako v úlohe uchopiť dotýkajúce sa kružnice.

Úlohy

Úloha 6.1. Dokážte, že ťažnice trojuholníka sa pretínajú v jednom bode.

Úloha 6.2. Kružnice k a l sa zvnútra dotýkajú v bode A. Dotyčnica v bode B ku kružnici l pretína kružnicu k v bodoch C a D. Dokážte, že priamka AB prechádza stredom oblúka CD neobsahujúceho bod A.

Úloha 6.3. Je daný trojuholník ABC s opísanou kružnicou k. Nech l je kružnica, ktorá sa dotýka kružnice k v bode A a priamky BC sa dotýka v bode D. Dokážte, že AD je os uhla BAC.

Úloha 6.4. Kružnice k, m, s sa dotýkajú priamky t postupne v bodoch K, M, S. Navyše, kružnice k a m sa zvonka dotýkajú v bode A a kružnice m a s sa zvonka dotýkajú v bode B. Dokážte, že priamky KA a SB sa pretínajú na kružnici m.

Úloha 6.5. Je daná kružnica k a na nej bod A. Určte množinu všetkých stredov úsečiek AB, kde $B \neq A$ je bod kružnice k.

Úloha 6.6. Dve kružnice s rôznym polomerom sa pretínajú v bodoch X, Y. Ich spoločné vonkajšie dotyčnice sa pretínajú v bode Z, pričom jedna z nich sa dotýka kružníc k, l postupne v bodoch P, Q. Dokážte, že priamka ZX je dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku PQX.

Úloha 6.7. Kružnica k vpísaná trojuholníku ABC sa dotýka strany BC v bode D. Označme M bod na kružnici k taký, že DM je priemer kružnice k a nech E bod dotyku kružnice pripísanej ku strane BC so stranou BC. Dokážte, že body A, M a E ležia na priamke.

Úloha 6.8 (60MO–A–II–2)**.** Daný je trojuholník ABC s obsahom S. Vnútri trojuholníka, ktorého vrcholmi sú stredy strán trojuholníka ABC, je ľubovoľne zvolený bod O. Označme A', B', C' postupne obrazy bodov A, B, C v stredovej súmernosti podľa bodu O. Dokážte, že šesťuholník $AC'BA'CB'$ má obsah $2S$.

Úloha 6.9. V trojuholníku ABC pretínajú osi vnútorných uhlov opísanú kružnicu postupne v bodoch $\check{S}_A$, $\check{S}_B$ a $\check{S}_C$. Kružnica vpísaná trojuholníku ABC sa dotýka strán a, b, c postupne v bodoch K, L, M. Dokážte, že priamky $\check{S}_AK$, $\check{S}_BL$ a $\check{S}_CM$ prechádzajú jedným bodom.

Úloha 6.10 (PraSe 11/12. 1. seriálová séria, úloha 3)**.** Je daný trojuholník ABC. Označme T_a bod dotyku kružnice vpísanej trojuholníku ABC so stranou BC a E_a stred kružnice pripísanej k strane BC. Podobne definujeme body T_b, E_b a T_c, E_c pre strany CA a AB. Dokážte, že priamky T_aE_a, T_bE_ba T_cE_c prechádzajú jedným bodom.

Úloha 6.11. Dané sú dve priamky p, q a bod A. Zostrojte kružnicu, ktorá sa dotýka priamok p, q a prechádza bodom A.

Úloha 6.12. Dané sú dve priamky p, q a kružnica m. Zostrojte kružnicu, ktorá sa dotýka priamok p, q a kružnice m.

Úloha 6.13 (KMS 05/06–2L–6)**.** Kružnice k_1, k_2 sa zvonka dotýkajú v bode D. Priamka p sa dotýka kružníc k_1, k_2 po rade v bodoch A, B. Úsečka AC je priemerom kružnice k_1. Priamka q prechádza cez bod C a dotýka sa kružnice k_2 v bode E. Dokážte, že trojuholník ACE je rovnoramenný.

Úloha 6.14 (IMO 1978)**.** V trojuholníku ABC s opísanou kružnicou k, platí $|AB| = |AC|$. Kružnica l sa dotýka priamok AB, AC postupne v bodoch P, Q a taktiež sa dotýka kružnice k. Dokážte, že stred úsečky PQ je stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC.

Úloha 6.15 (IMO 1981)**.** Tri zhodné kružnice sa pretínajú v jednom spoločnom bode O. Každá kružnica sa dotýka dvoch strán trojuholníka ABC (každá kružnica inej dvojice strán). Dokážte, že bod O, stred vpísanej a opísanej kružnice trojuholníku ABC ležia na jednej priamke.

Úloha 6.16 (IMO 1982)**.** Máme nie rovnoramenný trojuholník $A_1A_2A_3$ so stranami a_1, a_2, a_3 (a_i je oproti A_i). Pre $i \in \{1, 2, 3\}$ nech M_i je stred strany a_i, T_i bod dotyku kružnice vpísanej trojuholníku $A_1A_2A_3$ so stranou a_i a S_i obraz bodu T_i v osovej súmernosti podľa osi vnútorného uhla pri vrchole A_i. Dokážte, že priamky M_1S_1, M_2S_2 a M_3S_3 prechádzajú jedným bodom.

Náznaky riešení

Riešenia úloh so zdrojom možno nájsť na stránkach zodpovedajúcich olympiád alebo korešpondenčných seminárov. Niektoré úlohy sú vzorovo vyriešené v spomínanom seriáli. V prípade záujmu viem poskytnúť riešenie, napíšte mi mail.

1.1 Zobrazte bod B podľa priamky p.

1.2 Zobrazte D podľa priamky AB na D' a ukážte, že $|CD'|$ je konštantná.

1.5 Preklopte E podľa AD a skúmajte trojuholník AFE'.

2.1 Otočenie so stredom v A o $90°$.

2.2 Otočenie zo stredom v bode A o $60°$.

3.1 Stredová súmernosť podľa stredu kružnice. Načo sa zobrazia kolmice cez A_1, B_1, C_1?

3.2 Zobrazte AL podľa stredu strany AB.

3.4 Zobrazte X podľa stredu úsečky BC na X' a pozrite sa na trojuholník ABX'.

3.5 Uvažujte stredovú súmernosť so stredom v bode T. Polomer SB kružnice m sa zobrazí na úsečku $S'B'$. Pozrite sa na štvoruholník $SBS'B'$. Čo je zač?

4.1 Posuňte bod P o $\overrightarrow{AB}$ do bodu P', čo vraví podmienka $|\angle BP'C| + |\angle BPC| = 180°$ teraz?

4.2 Posuňte trojuholník BA_1C_1 na trojuholník CB_1A. Čo viete povedať o $|O_bO_a|a|I_bI_a|$?

4.3 Posuňte A o šírku rieky.

6.12 Nájdite bod dotyku s kružnicou M a doriešte ako v predchádzajúcej úlohe.

6.14 Uvažujte rovnoľahlosť posielajúcu troj. ABC na $AB'C'$, $B'C'$ je dotyčnica kružnice l. Využite polno podobných pravouhlých trojuholníkov.

6.15 Nech S_A, S_B, S_C sú stredy tých kružníc. Všimnite si, že strany trojuholníka $S_AS_BS_C$ sú rovnobežné so stranami trojuholníka ABC. Stačí ukázať, že stred opísanej ABC sa zobrazí na O v rovnoľahlosti so stredom v I.

6.16 Ukážte, že $S_1S_2 \parallel M_1M_2$. Využite, že body T_2 a T_3 sú osovo súmerné podľa osi uhla pri A_1. Ukázať, že T_3I je osou uhla S_1IS_2. Ide to vyuhliť aj inými spôsobmi.