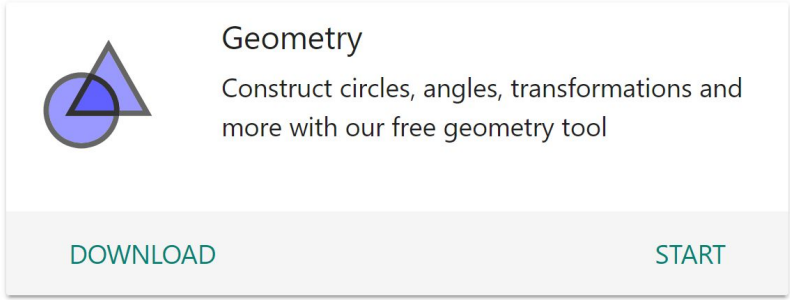
GeoGebra

Veronika Pozsonyiová

Úvod

https://www.geogebra.org/

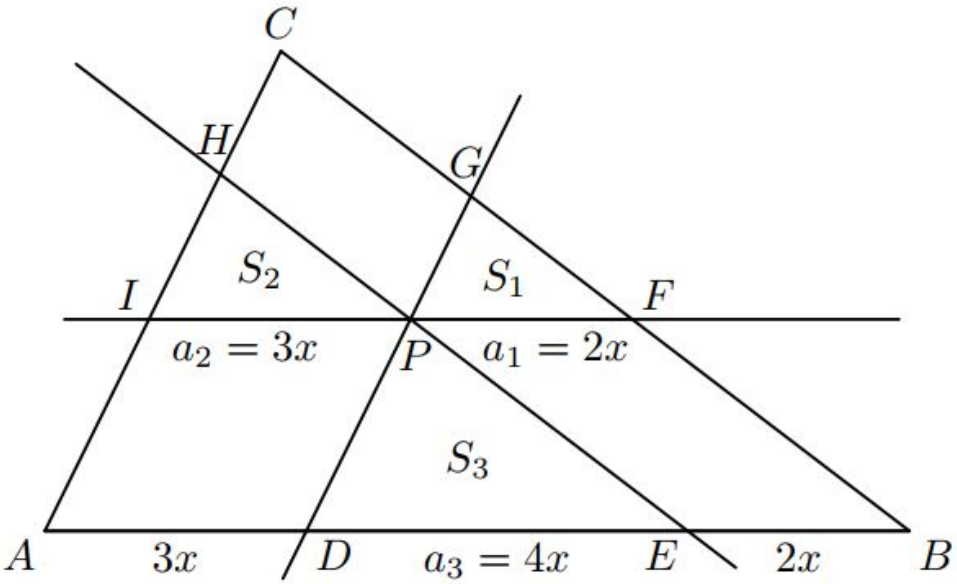
- zadarmo
- materiály, postupy, 3D, animácie, ...
- App Downloads - Geometry
- vytvor si vlastné konto
- moje konto - Veronika408



Čo ďalej?

- otvorte si online/offline geogebru a 5min sa s ňou sami hrajte, skúste objaviť čo najviac vecí ako fungujú
- ukážeme si ako uložiť/exportovať
- ako to funguje
- príklady z prezentácie
  - vyber si príklad a skús ho spraviť v geogebre čo najpodobnejšie (kludne obrázok vylepši)
  - daj si hotový príklad na svoje konto na nete (ulož ho v tvare: KMS 2017_L_1s_2)
  - napíš si meno do prvého stĺpca v tabuľke https://docs.google.com/spreadsheets/d/1ConOEsqoswvzmHarf6TRp3rEa2Wp0n5S60Jpgm2w8dw/edit?usp=sharing
  - skopíruj link príkladu do excelovskej tabulky do príslušnej bunky
  - pokračuj v robení príkladov
  - čekni si komentáre čo som ti napísala k tvojim príkladom v tabuľke
  - ak by si mal/a s niečím problém spýtaj sa susedov alebo mňa :)

V New Yorkskej letiskovej hale treba vymeniť dlaždice. Hala má tvar trojuholníka ABC a vnútri neho sa nachádza bod P. Bodom P sú vedené tri priamky rovnobežné so stranami trojuholníka, ktoré rozdeľujú podlahu haly na menšie časti (ako na obrázku). Robotníci už odmerali plochy troch menších trojuholníkov: $S_1 = 4\,\mathrm{cm}^2$, $S_2 = 9\,\mathrm{cm}^2$ a $S_3 = 16\,\mathrm{cm}^2$. Zistite, aký je obsah celej podlahy ABC, ktorú treba vydláždiť.

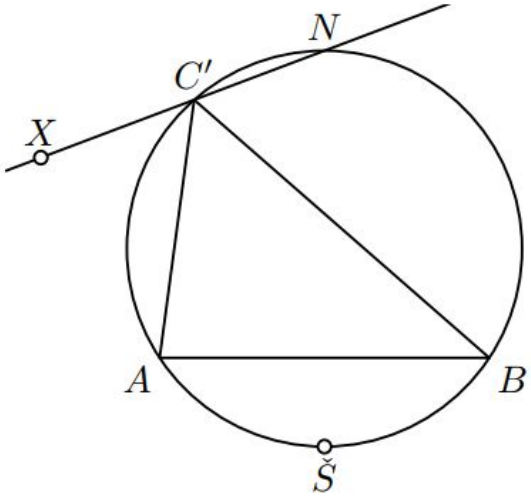


KMS 2017_L_1s_2

Okraj podstavca Sochy slobody má tvar kružnice k. Na nej sú umiestnené v dvoch rôznych bodoch A, B reflektory, ktoré ju osvetľujú. Robotníci majú na obvod podstavca umiestniť ešte tretí reflektor, ale nevedia sa dohodnúť kam. Pre dané body A, B na kružnici k nájdite bod C ležiaci na kružnici k tak, aby

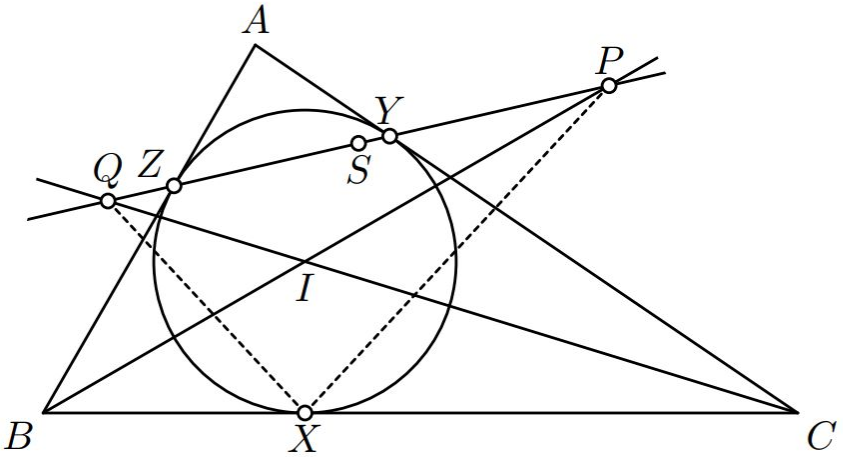
a) obsah trojuholníka ABC bol čo najväčší,

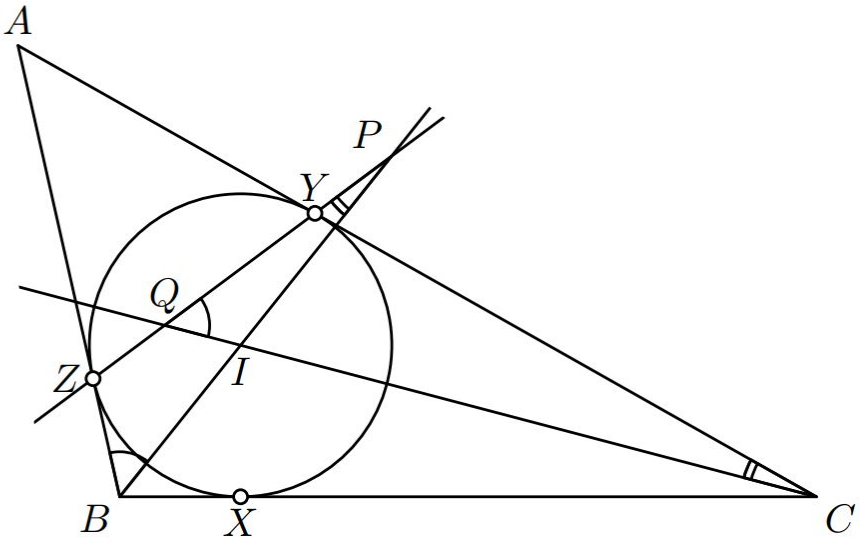
b) obvod trojuholníka ABC bol čo najväčší.



KMS 2017_L_1s_5

Označme I stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC a X, Y, Z postupne jej body dotyku so stranami BC, CA, AB. Priamky BI a CI pretínajú priamku YZ v bodoch P a Q. Dokážte, že ak bod X leží na osi úsečky PQ, tak potom je trojuholník ABC rovnoramenný.

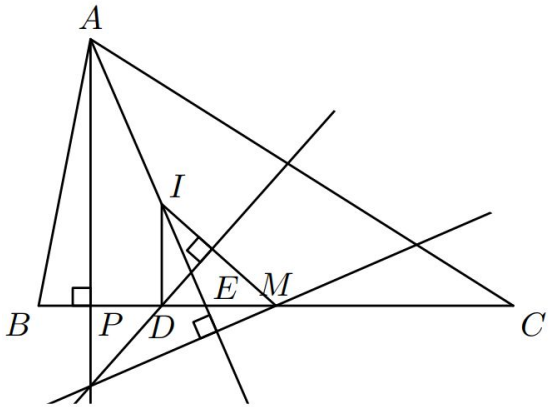




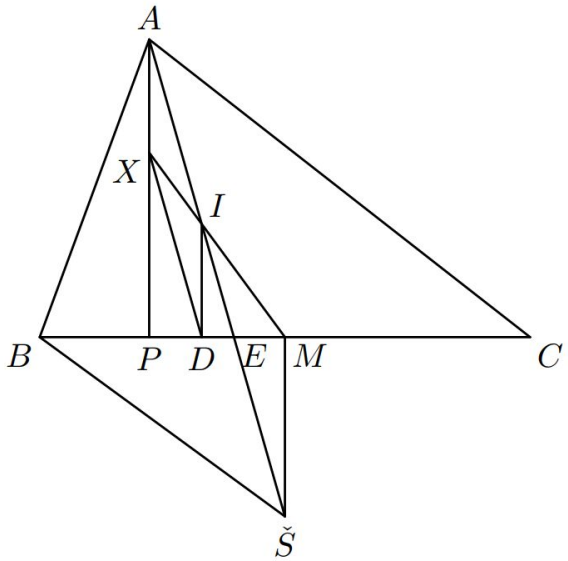
KMS 2017_L_1s_6

Mr. Miro (čítaj majro) uviazol v zápche. Aby si spríjemnil čakanie, zamyslel sa nad nasledujúcou geometrickou úlohou.

V trojuholníku ABC ($|AC| > |AB|$) sa vpísaná kružnica so stredom v bode I dotýka strany BC v bode D. Nech M je stred strany BC. Dokážte, že kolmice z bodov M, D postupne na priamky AI, MI a výška trojuholníka ABC na stranu BC sa pretínajú v jednom bode.

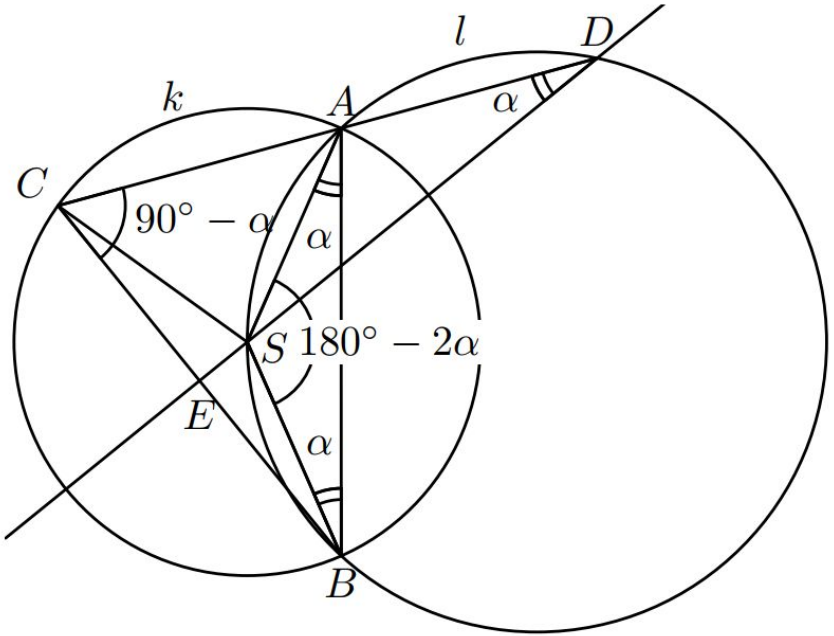


Obr. 5



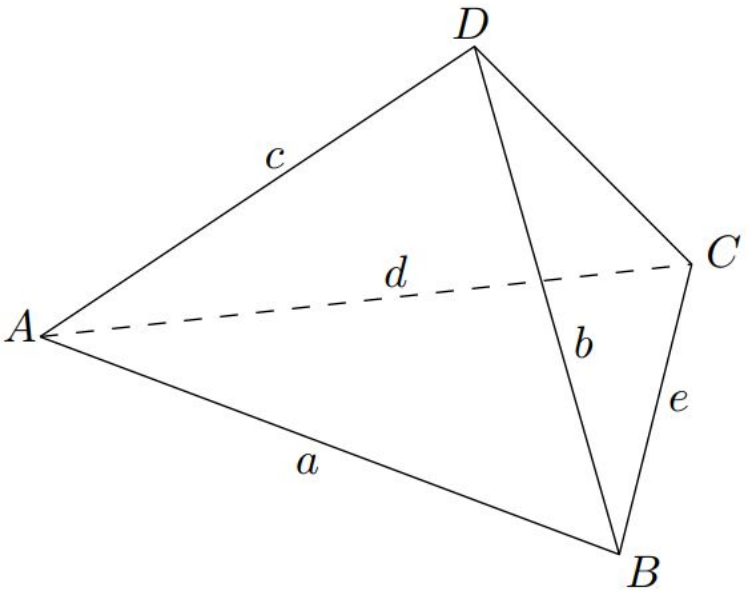
KMS 2017_L_1s_10

Najuznávenejšou osobou krajiny je čarodejník Š. Je známy tým, že svojou mágiou kreslí rôzne geometrické obrazce, napríklad takéto. Kružnice k a l, sa pretínajú v dvoch bodoch A a B. Stred S kružnice k leží na kružnici l. Tetiva AC kružnice k pretína l po druhýkrát v bode D. Dokážte, že úsečky SD a BC sú na seba kolmé.[1]



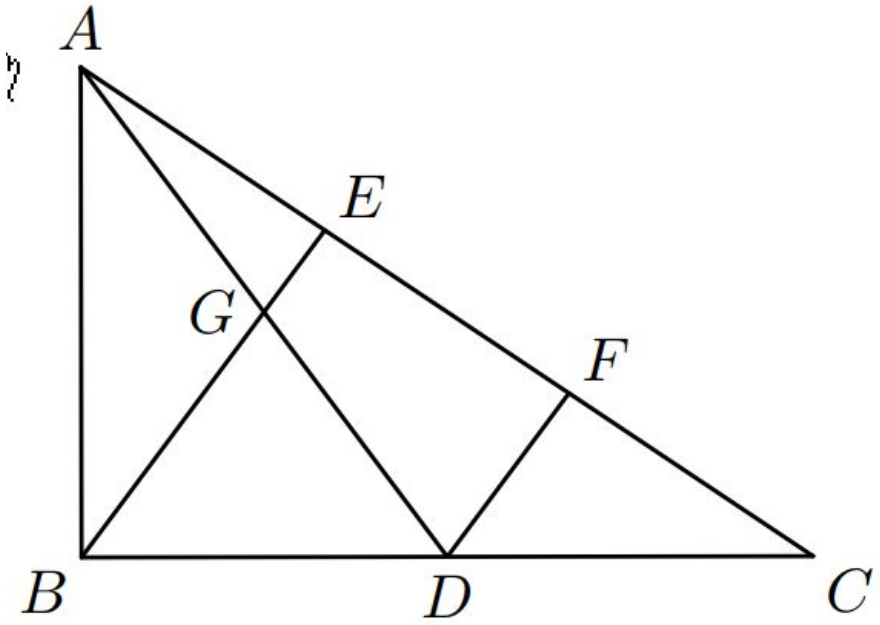
KMS 2017_L_3s_2

Zlatokop Zlatko sníva celý život o tom, že nájde najvzácnejší drahokam krajiny v tvare trojstenu. Podarilo sa mu však nájsť iba štvorsten[2], tak by si z neho chcel spraviť aspoň trojuholník.
Dokážte, že v každom štvorstene existuje vrchol, z ktorého vychádzajúce hrany môžu vytvoriť trojuholník. Tri úsečky môžu vytvoriť trojuholník, práve vtedy, keď je každá z nich kratšia ako súčet dĺžok zvyšných dvoch.



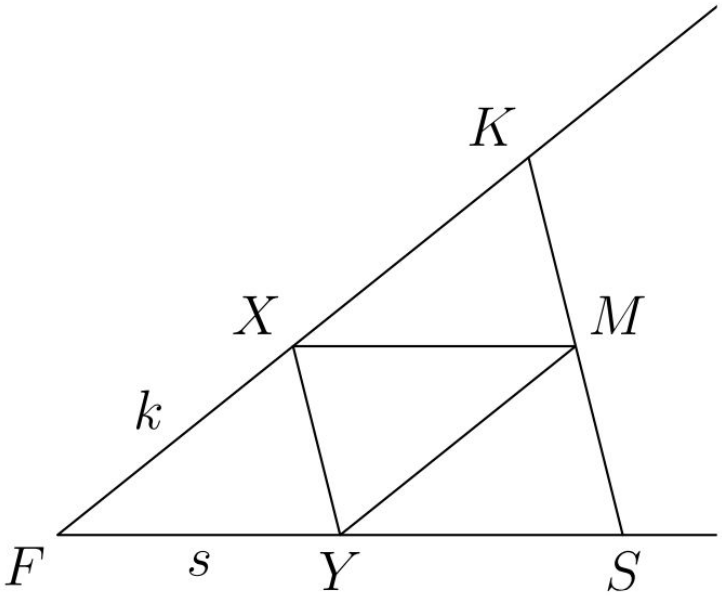
KMS 2017_L_3s_4

Devil Voršiper nemá rád osi. Preto ani jeho kúzelný magický symbol žiadne osi neobsahuje. Jeho symbol tvorí trojuholník ABC, v ktorom D je stred strany BC. Bod E leží na strane AC tak, že platí $2|AE| = |CE|$. Naviac platí, že $|\sphericalangle CBE| = |\sphericalangle ADB|$. Určte veľkosť uhla ABC.



KMS 2017_L_3s_6

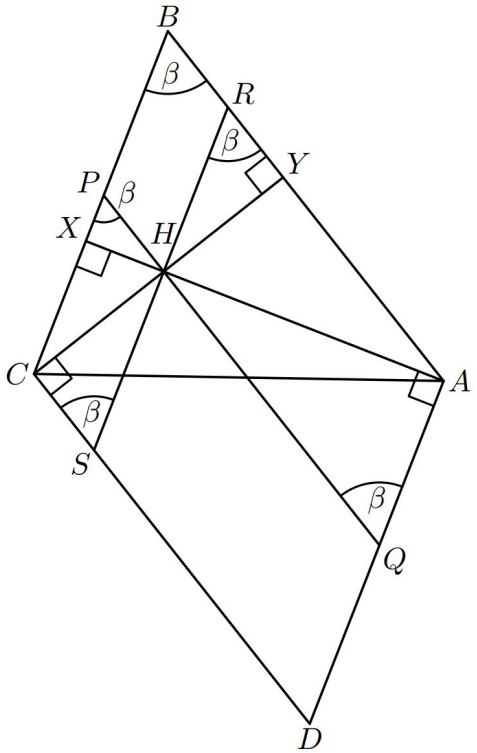
Iveta má na papieri narysované dve polpriamky k, s vychádzajúce zo spoločného bodu. Mimo polpriamok k, s sa nachádza bod M. Iveta chce narysovať body K a S, ktoré ležia postupne na polpriamkach k a s. Navyše chce, aby platilo $|KM| = |MS|$ a aby body K, M, S ležali na jednej priamke. Ivetá má k dispozícii euklidovské pravítko a kružidlo.[2] Nájdite pre Ivetu všeobecný postup konštrukcie, ktorým narysuje spomenuté body K, S.



KMS 2017_Z_1s_3

Marián sa rozhodol, že sa začne venovať geometrii. Čarodejník Š mu poradil, že podstatou každej geometrickej úlohy je nájsť 4 body, čo ležia na jednej kružnici. Skúste to s ním aj vy!

Majme rovnobežník $ABCD$. Nech H je priesečník výšok trojuholníka ABC. Rovnobežka so stranou AB cez bod H pretína priamky AD a BC postupne v bodoch Q a P. Rovnobežka so stranou BC cez bod H pretína priamky AB a CD postupne v bodoch R a S. Dokážte, že body P, Q, R, S ležia na jednej kružnici.



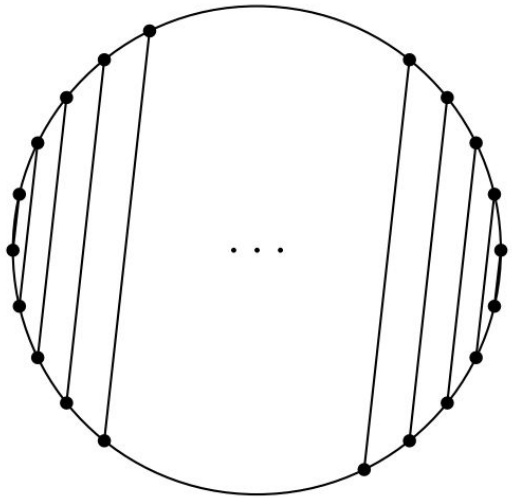
KMS 2017_Z_1s_8

Mr. Miro bol pozvaný na párty dlhorukých basketbalistov. Všetkých 2017 účastníkov párty si posadalo za okrúhly stôl, každý s pohárikom v ruke. Každú sekundu si štrngnú pohárikmi, pričom dodržiavajú nasledovné dve pravidlá:

(i) Necinkajú si poháriky do kríža.

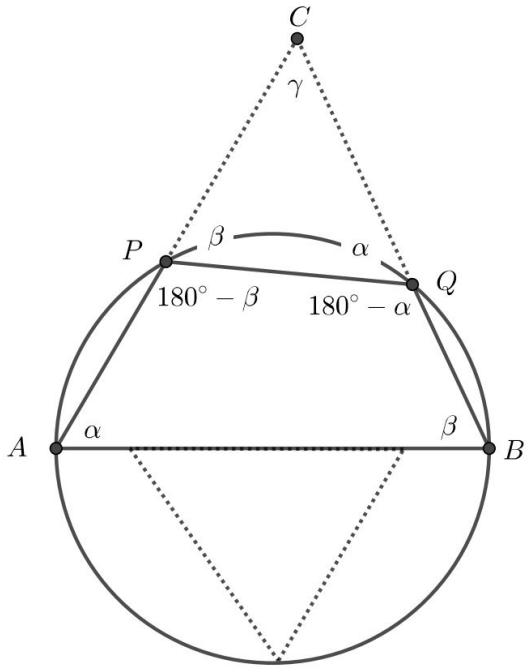
(ii) V danej sekunde si každý môže cinknúť nanajvýš raz.

Za koľko najmenej sekúnd si môže cinknúť každý s každým?



KMS 2017_Z_2s_4

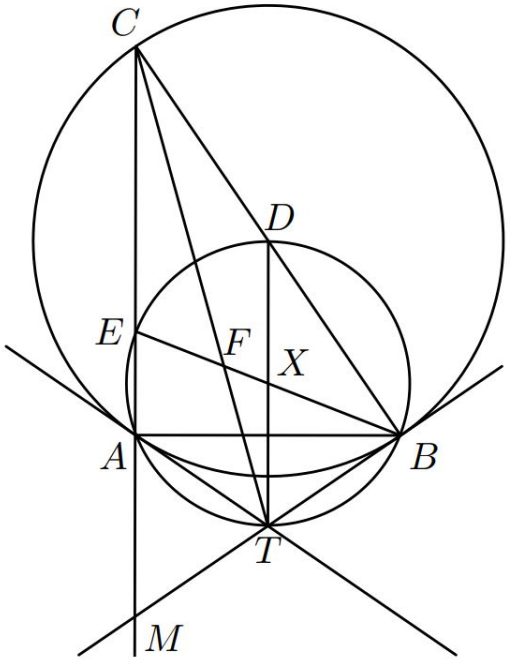
Betka upiekla pre Mr. Mira koláč, aby bol Mr. Miro spokojný. Koláč má tvar trojuholníka s dĺžkami strán 19, 20 a 21 cm. Chce ho rozrezať pozdĺž jednej priamky na dva kusy a uložiť ich na kruhový tanier tak, aby sa neprekrývali ani nevyčnievali z taniera. Určte minimálny priemer taniera, pre ktorý sa to môže Betke podariť.



KMS 2017_Z_2s_5

Mr. Miro sa vo voľnom čase zaoberá medziľudskými pomermi. Pomery v geometrii sú však preňho easy, tie prenecháva vám.

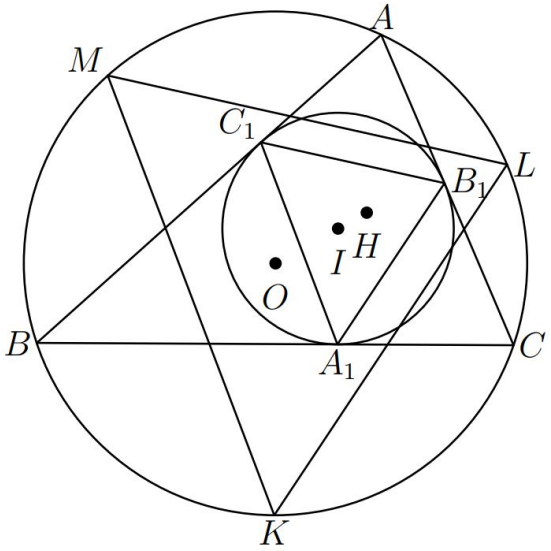
Majme trojuholník ABC s opísanou kružnicou k. Dotyčnice ku kružnici k v bodoch A a B sa pretínajú v bode T. Kružnica opísaná trojuholníku ABT pretína priamky BC a AC postupne v bodoch D a E ($D \neq B$ a $E \neq A$). Priamky CT a BE sa pretínajú v bode F. Predpokladajme, že bod D je stredom úsečky BC. Určte pomer $|BF| : |BE|$.



KMS 2017_Z_2s_7

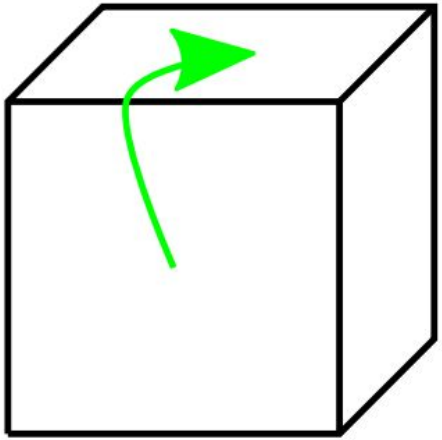
Mr. Miro je spokojný, keď je najedený. Okrem toho je spokojný aj vtedy, keď nájde tri body ležiace na jednej priamke.

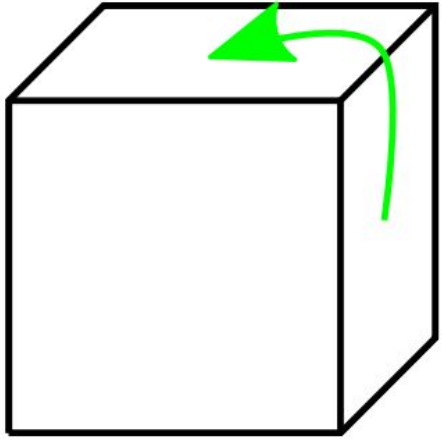
Majme trojuholník ABC. Označme A_1, B_1, C_1 postupne body dotyku jeho vpísanej kružnice so stranami BC, AC, AB. Nech O a I sú postupne stredy kružnice opísanej a vpísanej trojuholníku ABC a H_1 je ortocentrum trojuholníka $A_1B_1C_1$. Dokážte, že body O, I, H_1 ležia na jednej priamke.

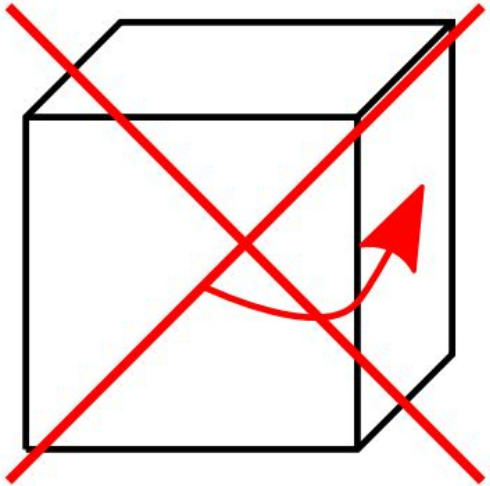


KMS 2017_Z_2s_9

Kuchárka vyryla do kocky cukru dierky a spravila si z nej tak hraciu kocku. Potom sa ju snažila pootáčať, aby vyzerala pekne. Kocka vyzerá pekne, keď má na vrchu šestku a na jej prednej strane (otočenej ku kuchárke) je štvorka. Kuchárka môže otáčať kockou okolo všetkých hlavných osí okrem vertikálnej (pozri obrázok), a to vždy len o 90°. Koľko najmenej otočení potrebuje, aby vedela s určitosťou, že kocka bude vyzerať pekne, nech je na začiatku otočená ľubovoľne?

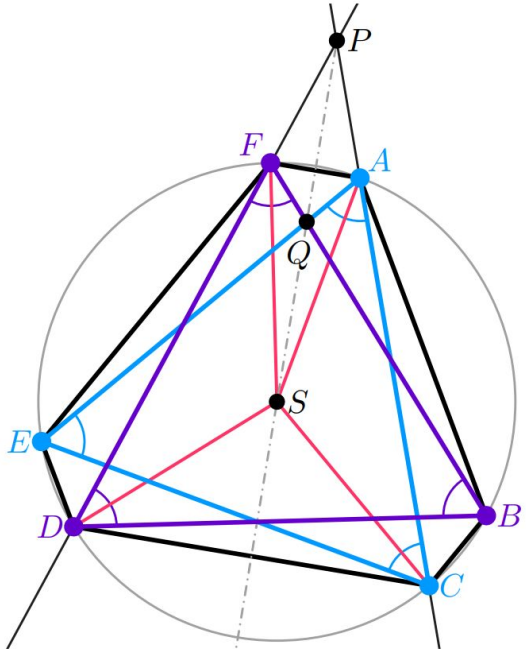






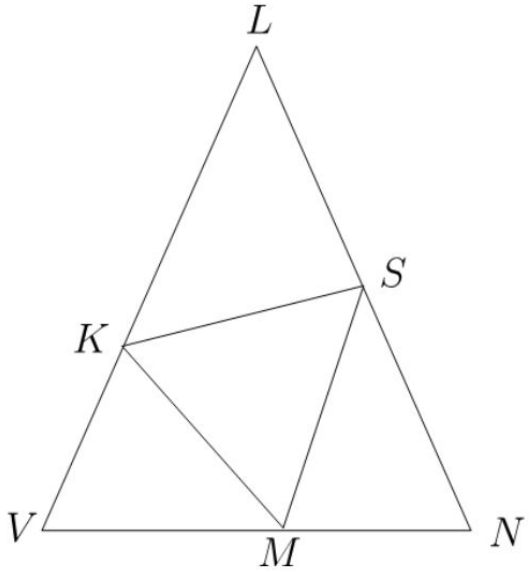
KMS 2017_Z_3s_1

Jurkovi nechutilo soté, čo mal na obed, tak namiesto jedenia obdivoval svoju tácku. Tácka má tvar šesťuholníka $ABCDEF$ a je položená na kruhovom obruse tak, že všetky vrcholy šesťuholníka $ABCDEF$ ležia na jeho obvode. Jurko si začal po tácke a po stole kresliť a označil si priesečník priamok AC a FD ako P a priesečník priamok AE a BF ako Q. Potom si všimol, že platí $|BF| = |BD|$, $|AC| = |CE|$, $|PA| = |PF|$ a že priamka PQ je osou uhla APF. Zistite pomer obsahov trojuholníkov ACE a BDF.



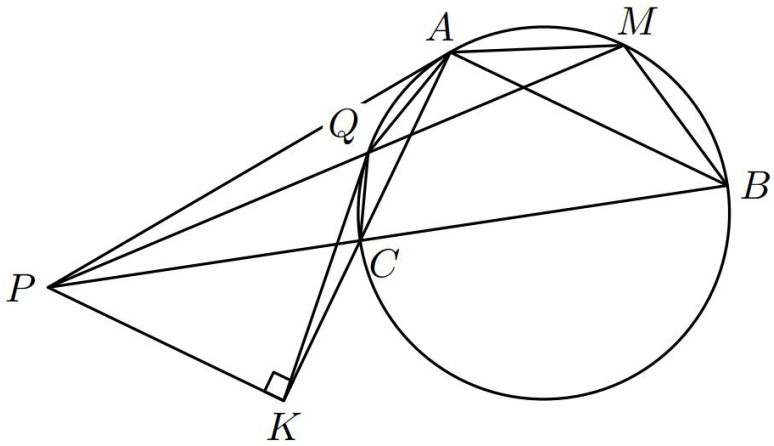
KMS 2017_Z_3s_2

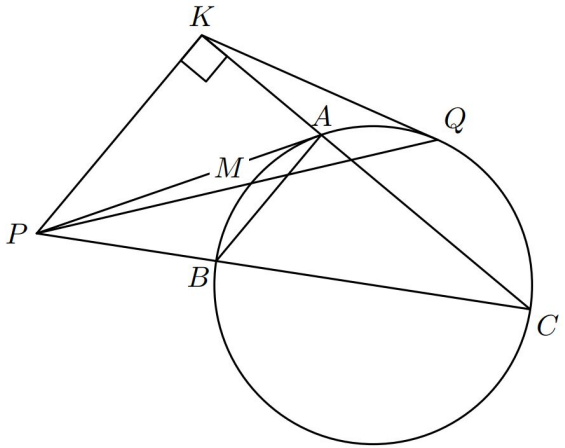
Tomáško miluje, keď má na stole systém a poriadok. Preto si na obede uložil lyžičku, vidličku, nožík, koreničku a soľničku postupne do bodov L, V, N, K a S. Vytvoril tak z príboru rovnoramenný trojuholník LVN so základňou VN. Body K a S sa nachádzali postupne na stranách LV a LN. Všetko bolo navrhnuté tak, že osi uhlov VKS a KSN sa preťali v bode M, ktorý ležal na základni VN. Nakoniec umiestnil Tomáško do bodu M makovničku. Dokážte, že bod M sa nachádza v strede základne VN.



KMS 2017_Z_3s_4

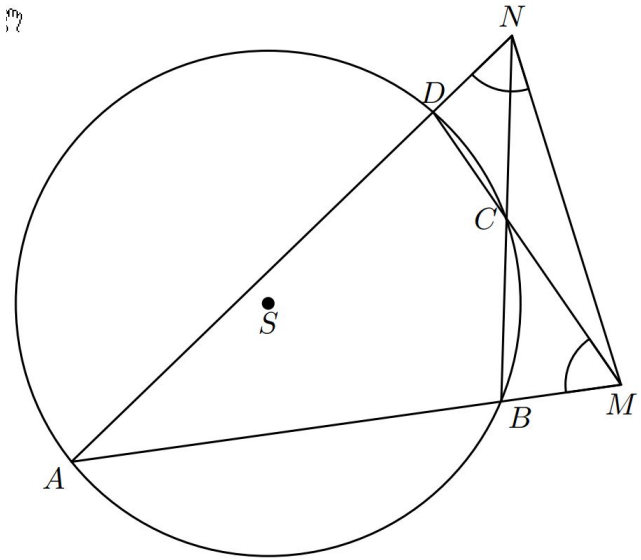
V jedálni urobili tety kuchárky langoše. Kuchárka Betka sa oduševnene pustila do kečupomaľby langoša. Najprv do kružnice l, ktorá ohraničuje langoš, vpísala trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole A. Ďalej urobila dotyčnicu ku kružnici l v bode A, ktorá preťala priamku BC v bode P. Stred kratšieho oblúka AB kružnice l označila ako M. Pokračovala priamkou PM, ktorá druhýkrát preťala kružnicu l v bode Q. Svoje umenie zakončila dotyčnicou ku kružnici l v bode Q, ktorá preťala priamku AC v bode K. Síce plno kečupu skončilo mimo taniera, ale Betka vie, že jej umelecké dielo je to pravé. Dokážte, že uhol PKC je pravý.





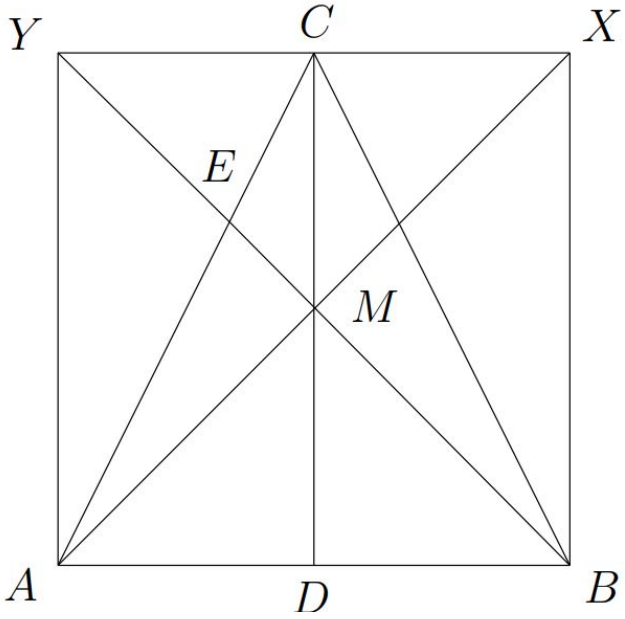
KMS 2017_Z_3s_10

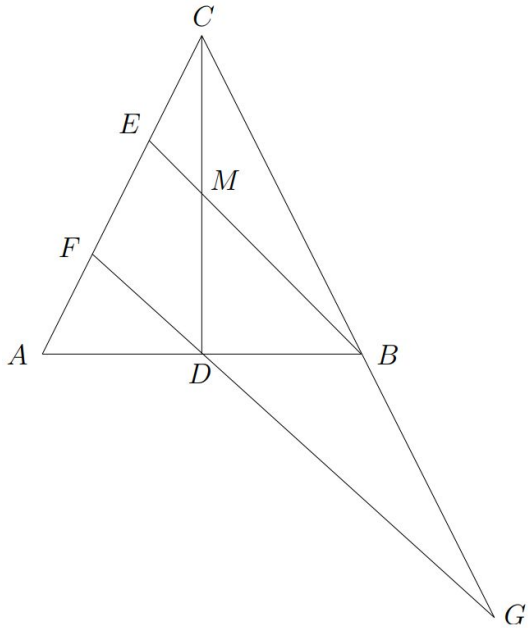
Ku správnej štedrej večeri patrí adventný veniec. Najlepšie taký, ktorý má tvar kružnice k, na ktorej ležia sviečky v štyroch rôznych bodoch A, B, C, D v tomto poradí. Ďalej polpriamky AB a DC sa pretínajú v bode M a polpriamky BC a AD sa pretínajú v bode N. Navyše platí, že $|\sphericalangle BMC| = |\sphericalangle ANM|$ a $|BC| = |CN|$. Prečo je takýto veniec najlepší? Lebo body M, N sú rovnako vzdialené od stredu kružnice k. Dokážte to!



KMS 2018_L_1s_8

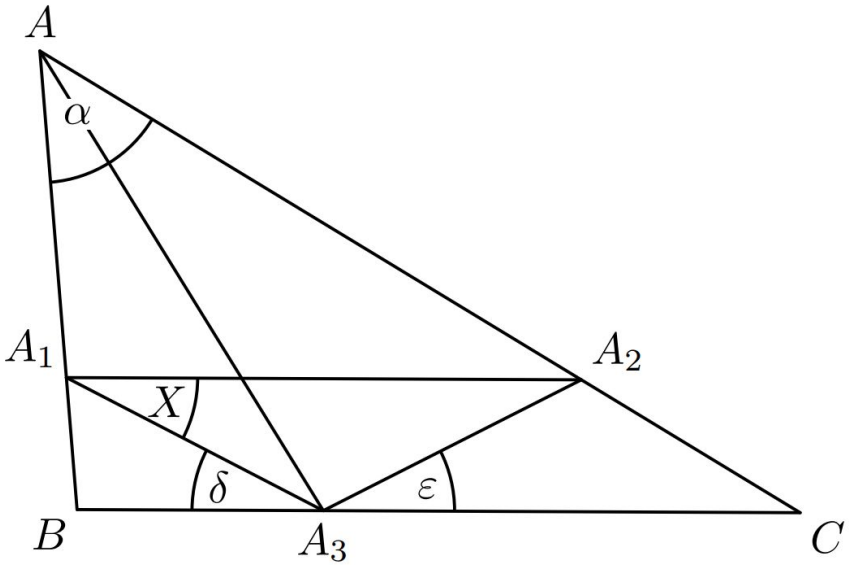
Čo vám napadne, keď sa pozriete na cirkusový stan? Predsa rovnoramenný trojuholník, napríklad takýto. V rovnoramennom trojuholníku ABC so základňou AB označíme D pätu výšky z bodu C na stranu AB. Stred strany CD označíme M. Priamka BM pretína stranu AC v bode E. Dokážte, že $2 \cdot |CE| = |AE|$.





KMS 2018_L_2s_3

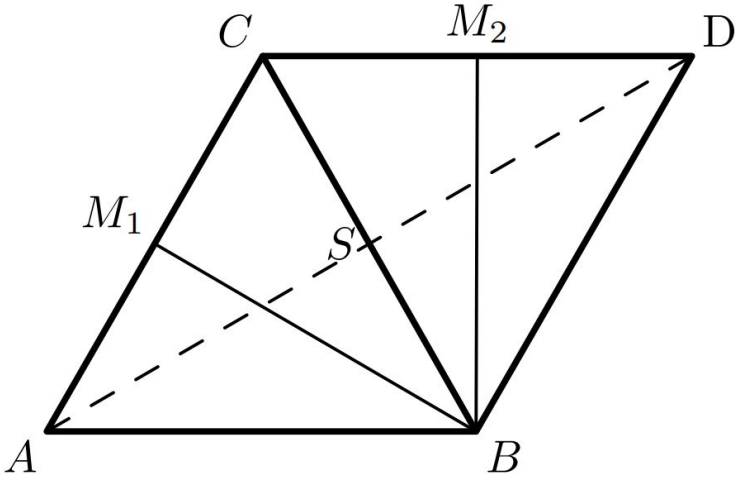
Cirkusový krotiteľ šeliem chová mystickú šelmu – trojuholník ABC. Body A_1, A_2 ležia postupne na stranách AB a AC tak, že priamky A_1A_2 a BC sú rovnobežné. Navyše, kružnica opísaná trojuholníku AA_1A_2 sa dotýka strany BC v bode A_3. Podobným spôsobom definujme body B_3 a C_3. Dokážte, že priamky AA_3, BB_3, CC_3 sa pretínajú v jednom bode.



KMS 2018_L_2s_6

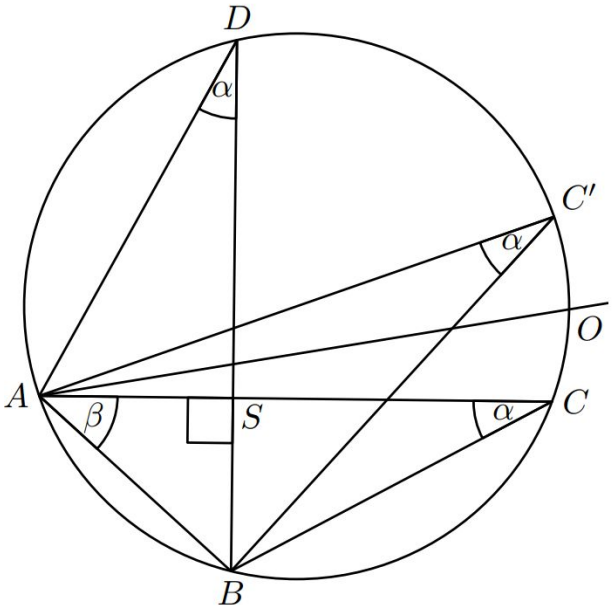
Posádku čaká náročná plavba Bermudským trojuholníkom. Aby v ňom nezmizli, potrebuje kapitán Modrobrada o ňom niečo zistiť.

Nech ABC je rovnoramenný trojuholník so základňou AB. Označme obraz bodu A v stredovej súmernosti podľa stredu úsečky BC ako D. Stred úsečky AC označme M_1 a stred úsečky CD označme M_2. Vieme tiež, že $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle M_1BA|$. Zistite súčet $|\sphericalangle M_1BM_2| + |\sphericalangle ACB|$.



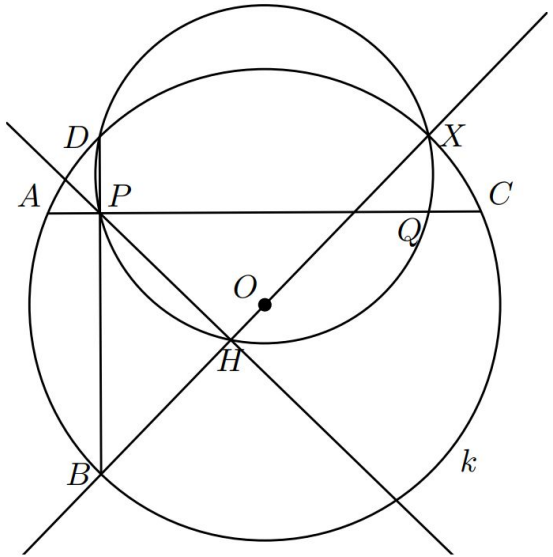
KMS 2018_L_3s_2

Kapitán sa zapozeral do lodného radaru, aby si pozrel, kde pristáť. Radar ohraničuje kružnica r, na ktorej ležia body A, B, C, D tak, že úsečky AC a BD sú na seba kolmé. Kapitán si zobral priamku AC a jej obraz v osovej súmernosti podľa osi uhla BAD označil g. Dokážte, že priamka g prechádza stredom kružnice r.

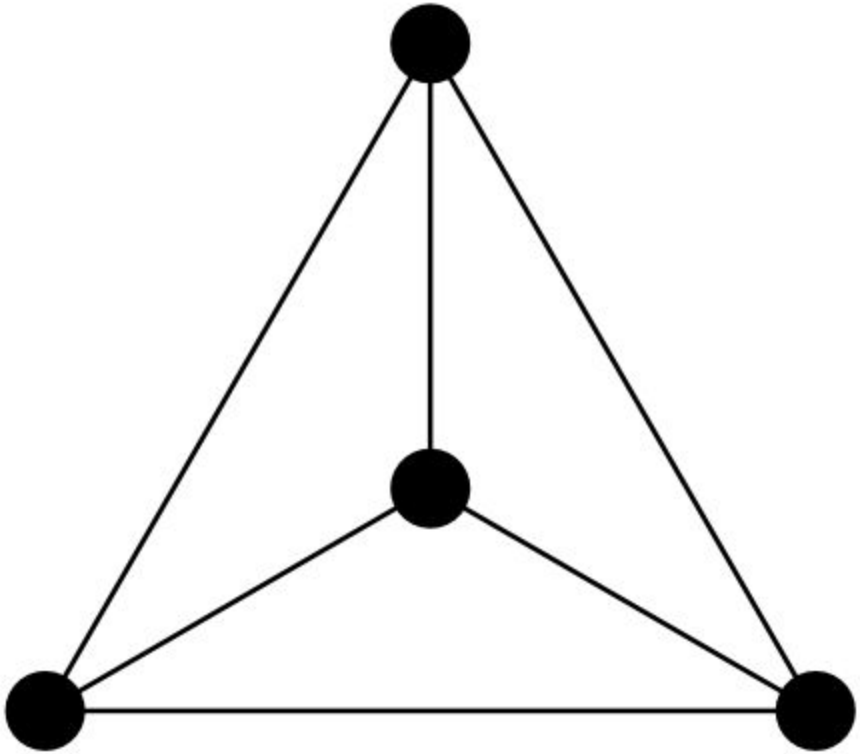


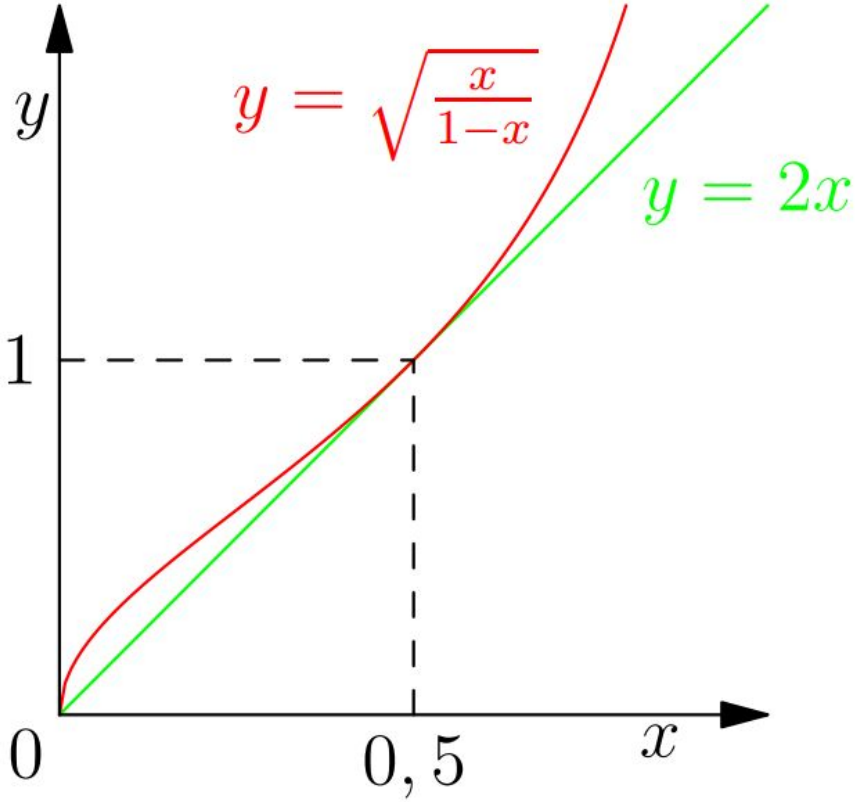
KMS 2018_L_3s_4

Štvoruholník $ABCD$ je vpísaný do kružnice k so stredom O. Jeho uhlopriečky AC a BD sú na seba kolmé a pretínajú sa v bode P. Bod O leží vnútri trojuholníka BPC. Na úsečke BO je zvolený bod H tak, aby bol uhol BHP pravý. Kružnica opísaná trojuholníku PHD pretína úsečku PC po druhýkrát v bode Q. Dokážte, že $|AP| = |CQ|$.



KMS 2018_L_3s_8





lentak