Nerovnosti - ťažké

Nerovnosti - ťažké 1
1. Na rozbeh, čo by sme mali poznať 2
2. Holder 5
3. Z kútov sveta 6
4. Bonus 9
5. Zdroje 10

1. Na rozbeh, čo by sme mali poznať

1.1.

Příklad. Pro $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ dokažte

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

1.1.1. ag

1.2.

Cvičení. Dokažte pro a, b taková, že $a + b > 0$, nerovnost

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

1.2.1. ag

1.3.

Příklad. (Schurova nerovnost) Pro všechna $a, b, c \geq 0$ dokažte

$$a(a-b)(a-c)+b(b-a)(b-c)+c(c-a)(c-b) \geq 0.$$

1.3.1. symetricky a>=b>=c

1.4.

Příklad. Pro $a, b, c > 0$ splňující $abc = 1$ dokažte

$$(ab+bc+ca)(a+b+c) \geq 9.$$

1.4.1. homogenizovat a AG

1.5. kladné x,y,z

(v) $x^3(x+2y)+y^3(y+2x) \geq 6x^2y^2$.

1.5.1. scitanie AG

1.6. kladné x,y,z

(iv) $(x+y+z)^2 \geq 3(x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy})$.

1.6.1. scitanie AG, odmocniny substitucia

1.7.

Příklad. Pro kladná a, b, c splňující $abc = 1$ dokažte

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c.$$

(Česká MO, 2003)

1.7.1. homogenizovat

1.8.

Příklad. Dokažte pro $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ nerovnost

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

1.8.1. CS zlomkobijec, uprav citatel na stvorec

1.9.

Cvičení. Pro kladná čísla a, b, c dokažte nerovnost

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1.$$

(Česko-slovensko-polské střetnutí)

1.9.1. CS zlomkobijec, uprav citatel na stvorec

1.10.

Cvičení. Pro kladná čísla a, b, c, d platí $abcd = 1$. Ukažte nerovnost

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geq 1.$$

(Čínská MO 2004)

1.10.1. plati to pre dve, co vyplyva z upravy na stvorec a to len pouzijes

1.11.

Tvrzení. *Pro kladná čísla $x_1, \dots, x_n$, $n \in \mathbb{N}$, platí*

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$

1.11.1. Jensen, zlogaritmujem obe strany, pravu rozlozim a to je to co chceme

1.12. IMO 2001

Příklad. Pro kladná a, b, c dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} \geq 1.$$

1.12.1. vela veci, ale jensen, a+b+c=1, f(x)=1/sqrt(x) staci potom ukazat 1>=..

1.13.

Cvičení. Pro kladná a, b, c dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{(b+c)^2} \geq \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

1.13.1. f(x)=x/(1-x)^2 konvexna na (0,1), a+b+c=1 a koniec

1.14. IMO 1964

Cvičení. Nechť a, b, c jsou strany trojúhelníka. Dokažte

(i) $\sum_{\text{cyc}} a^2(b + c - a) \leq 3abc$,

1.14.1. substitucia a koniec

1.15.

Příklad. Pro kladná x, y, z splňující $x + y + z + 2 = xyz$ dokažte

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{2(x + y + z + 3)}.$$

1.15.1.

Řešení. Na první pohled se zdá, že možná ani nebudeme substituci potřebovat, protože nerovnost vybízí k použití CS na odmocniny.

Podle CS na odmocniny platí $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \leq \sqrt{3(x+y+z)}$. To bychom ale potom potřebovali dokázat nerovnost $\sqrt{3(x+y+z)} \leq \sqrt{2(x+y+z+3)}$, neboli $x+y+z \leq 6$, která podle jednoho z předchozích cvičení neplatí.

Substituce nám ale pomůže velmi efektivně. Nerovnost přejde na

$$\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}+\sqrt{\frac{a+b}{c}} \leq \sqrt{2\left(\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}+3\right)} =$$
$$= \sqrt{2(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}.$$

Poslední rovnost je vidět přičtením jedničky ke každému zlomku. A teď už můžeme slavit úspěch s toutéž myšlenkou

$$\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}+\sqrt{\frac{a+b}{c}} \leq \sqrt{(b+c+c+a+a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}.$$

2. Holder

2.1.

Tvrzení. (Hölderova nerovnost) *Buď $n \in \mathbb{N}$ a mějme kladná čísla $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ a $c_1, \ldots, c_n$. Platí následující nerovnost*

$$(a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3)(b_1^3+b_2^3+\cdots+b_n^3)(c_1^3+c_2^3+\cdots+c_n^3) \geq (a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+\cdots+a_nb_nc_n)^3,$$

přičemž rovnost nastává, právě když existují reálná čísla λ, κ taková, že $a_i = \lambda b_i = \kappa c_i$ pro každé $i \in \{1, 2 \ldots n\}$.

2.2. Tradične IMO, ktoré sa dá vyriešiť asi všetkým.

Příklad. Pro kladná čísla a, b, c ukažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq 1.$$

(IMO 2001)

2.2.1.

Řešení. Podle Hölderovy nerovnosti platí

$$\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\right)^2 \left(\sum_{\text{cyc}} a(a^2+8bc)\right) \geq (a+b+c)^3.$$

2.3.

Příklad. Kladná čísla a, b, c splňují $ab + bc + ca = 1$. Dokažte nerovnost

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} \leq \frac{1}{abc}.$$

(IMO shortlist 2004)

2.3.1.

Řešení. Hölderovu nerovnost použijeme následovně

$$\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a}\right)\left(\sum_{\text{cyc}}(6ab+1)\right)(1+1+1) \geq \left(\sum_{\text{cyc}} \left(\frac{1}{a} + 6b\right)^{\frac{1}{3}}\right)^3.$$

V prvních dvou závorkách můžeme použít zadanou podmínku. Zbyde dokázat $\left(\frac{1}{abc}\right)^3 \geq$ $\geq \frac{1}{abc} \cdot 9 \cdot 3$ což už je snadné (opět využijte podmínku).

2.4.

Cvičení. Buďte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kladná čísla. Dokažte nerovnost

$$(a_1^3 + 1) \cdots (a_n^3 + 1) \geq (a_1^2 a_2 + 1) \cdots (a_n^2 a_1 + 1).$$

(Česko–slovensko–polské střetnutí)

2.4.1.

Návod. Vynásobte n Hölderových nerovností.

3. Z kútov sveta

3.1.

5. Show that for all positive reals a, b, c, d,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}$$

3.1.1.

Solution. Upon noticing that the numerators are all squares with $\sqrt{1}+\sqrt{1}+\sqrt{4}+\sqrt{16}=\sqrt{64}$, Cauchy should seem a natural choice. Indeed, multiplying through by $a+b+c+d$ and applying Cauchy, we have

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1^2}{a}+\frac{1^2}{b}+\frac{2^2}{c}+\frac{4^2}{d}\right)\geq(1+1+2+4)^2=64$$

as desired.

3.2. USAMO 1979/3

8. a, b, c, are non-negative reals such that $a+b+c=1$. Prove that

$$a^3+b^3+c^3+6abc\geq\frac{1}{4}$$

3.2.1.

Solution. Multiplying by 4 and homogenizing, we seek

$$\begin{aligned} 4a^3+4b^3+4c^3+24abc &\geq (a+b+c)^3 \\ &= a^3+b^3+c^3+3\left(a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\right)+6abc \\ \iff a^3+b^3+c^3+6abc &\geq a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b) \end{aligned}$$

Recalling that Schur's inequality gives $a^3+b^3+c^3+3abc\geq a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$, the inequality follows. In particular, equality necessitates that the extra $3abc$ on the left is 0. Combined with the equality condition of Schur, we have equality where two of a, b, c are $\frac{1}{2}$ and the third is 0. This is a typical dumbass solution.

3.3.

10. (IMO 95/2) a, b, c are positive reals with $abc=1$. Prove that

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$$

3.3.1. substitúcia 1/a 1/b 1/c

Solution 3. Perform the same substitution. Now, multiplying by $(x+y+z)$ and applying Cauchy, we have

$$\frac{1}{2}\left((y+z)+(z+x)+(x+y)\right)\left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\right) \geq \frac{1}{2}(x+y+z)^2$$

Upon recalling that $x+y+z \geq 3$ we are done. Incidentally, the progress of this solution with Cauchy is very similar to the weighted Jensen solution shown above. This is no coincidence, it happens for many convex $f(x) = x^c$.

3.4.

14. (Romanian TST) Let a, b, x, y, z be positive reals. Show that

$$\frac{x}{ay+bz}+\frac{y}{az+bx}+\frac{z}{ax+by} \geq \frac{3}{a+b}$$

3.4.1.

Solution. Note that $(a+b)(xy+yz+xz) = (x(ay+bz)+y(az+bx)+z(ax+by))$. We introduce this factor in the inequality, obtaining

$$(x(ay+bz)+y(az+bx)+z(ax+by))\left(\frac{x}{ay+bz}+\frac{y}{az+bx}+\frac{z}{ax+by}\right) \geq$$
$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+xz)$$

Where the last inequality is simple AM-GM. The desired follows by simple algebra. Again we have used the idea of introducing a convenient factor to clear denominators with Cauchy.

3.5.

Example 11 (USA, 1997). *Prove that, for all positive real numbers a, b, c,*

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

3.5.1.

Solution. Clearing denominators and multiplying by 2, we have

$$\sum_{\text{sym}}(a^3+b^3+abc)(b^3+c^3+abc)abc \leq 2(a^3+b^3+abc)(b^3+c^3+abc)(c^3+a^3+abc),$$

which simplifies to

$$\sum_{\text{sym}} a^7bc + 3a^4b^4c + 4a^5b^2c^2 + a^3b^3c^3 \leq \sum_{\text{sym}} a^3b^3c^3 + 2a^6b^3 + 3a^4b^4c + 2a^5b^2c^2 + a^7bc,$$

and in turn to

$$\sum_{\text{sym}} 2a^6b^3 - 2a^5b^2c^2 \geq 0,$$

which holds by bunching. $\square$

4. Bonus

4.1.

Cvičení. Pro kladná čísla a, b, c dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} \geq 1.$$

4.1.1.

Návod. Použijte Höldera podobně jako v prvním příkladu. Na jeho pravé straně si vyrobte $(a^2+b^2+c^2)^3$. Po roznásobení zbude dokázat nerovnost $3\cdot[4,2,0]+[2,2,2] \geq [3,3,0]+3\cdot[3,2,1]$.

4.2.

Cvičení. Pro nezáporná čísla x, y, z platí $x^2+y^2+z^2=3$. Dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} x\sqrt[3]{y+z} \leq 3\sqrt[3]{2}.$$

4.3. (hard)

Příklad. Pro kladná a, b, c dokažte

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3(a^3b+b^3c+c^3a).$$

4.3.1.

Řešení. Vezměme známou nerovnost

$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$$

platnou pro libovolná reálná čísla x, y, z. Naší snahou bude na ni napasovat dokazovanou nerovnost. To je úkol nesnadný, nicméně není těžké ověřit, že zvolíme-li

$$x = a^2 - ab + bc, \quad y = b^2 - bc + ca, \quad z = c^2 - ca + ab,$$

4.4.

Example 13. *(Japan, 1997)*

(Japan, 1997) Let a, b, c be positive real numbers, Prove that

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \geq \frac{3}{5}.$$

4.5.

5. Prove that for $x, y, z > 0$,

$$\frac{x}{(x+y)(x+z)} + \frac{y}{(y+z)(y+x)} + \frac{z}{(z+x)(z+y)} \leq \frac{9}{4(x+y+z)}.$$

4.6.

3. (Bulgaria, 1998) Let a, b, c be positive real numbers such that $abc = 1$. Prove that

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \leq \frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b} + \frac{1}{2+c}.$$

5. Zdroje

5.1. Prase - seriál nerovnosti

5.2. Kiran Kedlaya - based on notes for the Math Olympiad Program (MOP)

5.3. Thomas Mildorf - Olympiad Inequalities