



Zadania 2. kola letnej časti

Termín odoslania 04. 04. 2017 (pre zahraničie 30. 03. 2018)

2.1 Králici Medzi Sysľami ($\kappa \leq 1$)

kategória **alfa**

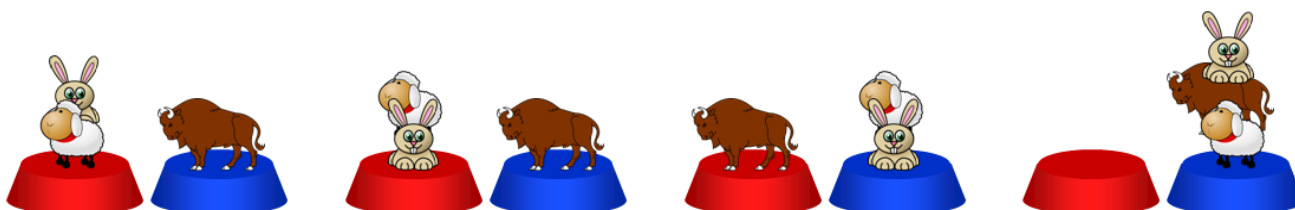
V cirkuse Crazy Monsters Circus predvádzajú číslo s králikmi a sysľami usporiadanými do kruhu. Všetky zvieratká sa pozerajú do stredu kruhu. Medzi zvieratkami je práve 7 králikov, ktoré majú po svojej pravici králika a práve 12 králikov, ktoré majú po svojej pravici sysľa. Ďalej, spomedzi ľubovoľných štyroch sysľov aspoň tri sysle majú po pravici králika. Koľko zvieratiek je v kruhu?

2.2 Krejzy Monstr Sirkus ($\kappa \leq 2$)

kategória **alfa**

Crazy Monsters Circus vlastní n zvieratiek. Predvádzajú s nimi akrobatické kúsky na červenom a modrom podstavci, na ktoré sa zvieratká stavajú do rôznych pozícií. Jedna pozícia vyzerá nasledovne: Všetky zvieratká sú rozdelené na dve skupiny. Jedna skupina tvorí vežu na červenom podstavci, druhá na modrom podstavci. Žiadne zvieratko neostane mimo. Veža z k zvieratiek vyzerá tak, že prvé zvieratko stojí na podstavci, druhé stojí na prvom zvieratku, tretie na druhom a tak ďalej až k -te zvieratko stojí na $(k-1)$ -vom zvieratku. V závislosti od kladného celého čísla n určte, koľko rôznych pozícií môžu zvieratká zaujať.

Pozície, ktoré sa líšia usporiadaním zvieratiek na podstavcoch, pokladáme za rôzne. Pre lepšiu názornosť na obrázku nižšie uvádzame zopár (nie nutne všetky) pozícií pre 3 zvieratká. Všimnite si, že všetky pozície sú rôzne.



2.3 Kostra Mohutného Stanu ($\kappa \leq 3$)

kategória **alfa**

Čo vám napadne, keď sa pozriete na cirkusový stan? Predsa rovnoramenný trojuholník, napríklad takýto. V rovnoramennom trojuholníku ABC so základňou AB označíme D päťu výšky z bodu C na stranu AB . Stred strany CD označíme M . Priamka BM pretína stranu AC v bode E . Dokážte, že $2 \cdot |CE| = |AE|$.

2.4 Kompozícia Mnohých Susedov ($\kappa \leq 4$)

kategórie **alfa a beta**

V cirkuse Crazy Monsters Circus nepredvádzajú žiadne jednoduché čísla, ale zložené. Nech n je zložené kladné celé číslo. Pre každého vlastného deliteľa d (t. j. deliteľa rôzneho od n a 1) napíšeme na papier číslo $d+1$. Nájďte všetky hodnoty n , pre ktoré sme na papier vypísali všetkých vlastných deliteľov nejakého prirodzeného čísla m .

2.5 Koľko Miesta Separuješ? ($\kappa \leq 7$)

kategórie **alfa** a **beta**

V žiadnom správnom cirkuse nesmie chýbať vystúpenie, v ktorom sa niečo reže. V Crazy Monsters Circuse rozdelujú neuveriteľnú vec – nekonečný papier. Cirkusant najprv nakreslí na nekonečný papier n trojuholníkov. Trojuholníky môžu byť rôzne a môžu sa prekrývať. Potom papier rozreže po každej strane trojuholníka. V závislosti od kladného celého čísla n určte, koľko najviac kusov papiera tak vie cirkusant papier dostať.

2.6 Krotiteľ Mystických Šeliem

kategórie **alfa** a **beta**

Cirkusový krotiteľ šeliem chová mystickú šelmu – trojuholník ABC . Body A_1, A_2 ležia postupne na stranách AB a AC tak, že priamky A_1A_2 a BC sú rovnobežné. Navyše, kružnica opísaná trojuholníku AA_1A_2 sa dotýka strany BC v bode A_3 . Podobným spôsobom definujeme body B_3 a C_3 . Dokážte, že priamky AA_3, BB_3, CC_3 sa pretínajú v jednom bode.

2.7 Kúzelníkové Magické Stĺpce

kategórie **alfa** a **beta**

Kúzelník predvádza nasledovné kúzlo. Ukáže publiku štvorcovú tabuľku $n \times n$ políčok, ktorej dve políčka v protilahlých rohoch sú zafarbené načierno a zvyšné políčka sú biele. Kúzelník si vie vyberať buď jeden riadok, alebo jeden stĺpec tabuľky a mávnutím paličky zmeniť farbu všetkým políčkam v ňom. V závislosti od celého čísla $n \geq 2$ určte, koľko najmenej ďalších políčok (t. j. okrem dvoch protilahlých rohových, ktoré už sú zafarbené) musí kúzelník pred začiatkom kúzlenia zafarbiť načierno, aby potom mohol svojim kúzlením zafarbiť celú tabuľku nabielo.

2.8 Konkurz Menejcenného Štvorca

kategória **beta**

Vystupujúci cirkusu majú zaujímavé vlastnosti, napr. vedia hltat meče. Prirodzené číslo a by tiež chcelo vystupovať v cirkuse. Chváli sa nasledovnou vlastnosťou: Pre ľubovoľné kladné celé číslo $n > 1$ má číslo $n^2a - 1$ deliteľa väčšieho ako 1, ktorý dáva zvyšok 1 po delení číslom n . Žiaľ, až taká zaujímavá vlastnosť to nie je. Dokážte, že číslo a je štvorec, t. j. druhá mocnina celého čísla.

2.9 Koľko Miestenka Stojí?

kategória **beta**

Lístok na cirkusové predstavenie pozostávajúce z $n \geq 2$ čísel stojí C_n . Cena C_n je určená ako najmenšie kladné reálne číslo, pre ktoré existuje postupnosť reálnych čísel x_1, x_2, \dots, x_n , pre ktorú platí:

- $(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$,
- $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$,
- pre každé celé číslo i také, že $1 \leq i \leq n$, platí $x_i \leq x_{i+1}$ alebo $x_i \leq x_{i+1} + C_n x_{i+2}$ (indexy členov postupnosti berieme modulo n , teda x_{n+1} považujeme za x_1 , x_{n+2} považujeme za x_2 a pod.).

Dokážte, že pre každé celé číslo $n \geq 2$ platí $C_n \geq 2$ a že $C_n = 2$ práve vtedy, keď n je párne.

2.10 Krotenie Monštra Skazy

kategória **beta**

Jedna starodávna legenda hovorí o monštre skazy, ktorú sa už niekoľko krotiteľov pokúsilo skrotiť do svojho cirkusu. Žiaľ, neúspešne. Podarí sa vám skrotiť monštrum a vyliezť mu na rovnako dlhé ramená?

Daný je trojuholník ABC s opísanou kružnicou k a so stredom vpísanej kružnice I . Označme J obraz bodu I v osovej súmernosti podľa priamky BC . Nech \check{S} je priesečník kružnice k s priamkou AI . Ďalej nech P je druhý priesečník kružnice k s priamkou $\check{S}J$. Dokážte, že $|PI| = |AI|$.