Korešpondenčný matematický seminár
XXXIX. ročník, 2017/2018
KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Zadania 3. kola letnej časti

Termín odoslania 30. 04. 2018

3.1 Kapitán Modrobrada Súperí ($\kappa \leq 1$) — kategória **alfa**

Kapítan Modrobrada sa plaví za kolonizáciou Ameriky. Jeho posádka sa rozhola skrátiť si dlhú plavbu turnajom v pretláčaní sa.

Posádka lode má 32 námorníkov. Prvý deň hral každý námorník práve 1 zápas (každý zápas hrajú vždy dvaja námorníci proti sebe). Druhý deň takisto hral každý námorník práve 1 zápas. Ukážte, že po týchto dvoch dňoch vieme vybrať 16 námorníkov tak, že žiadni dvaja z nich proti sebe ešte nezápasili, a to bez ohľadu na to, ako námorníci zápasili v prvé dva dni.

3.2 Kde Miznú Stopy ($\kappa \leq 2$) — kategória **alfa**

Posádku čaká náročná plavba Bermudským trojuholníkom. Aby v ňom nezmizli, potrebuje kapitán Modrobrada o ňom niečo zistiť.

Nech ABC je rovnoramenný trojuholník so základňou AB. Označme obraz bodu A v stredovej súmernosti podľa stredu úsečky BC ako D. Stred úsečky AC označme M_1 a stred úsečky CD označme M_2. Vieme tiež, že $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle M_1BA|$. Zistite súčet $|\sphericalangle M_1BM_2| + |\sphericalangle ACB|$.

3.3 Kompletne Magický Štvorec ($\kappa \leq 3$) — kategória **alfa**

Po úspešnom zdolaní Bermudského trojuholníka však posádku zastihol Bermudský štvoruholník. Ide o štvorcovú tabuľku, do ktorej musí námorník správne povpisovať čísla, aby sa mohol plaviť ďalej.

Doplňte do tabuľky 3×3 navzájom rôzne kladné celé čísla tak, aby sa súčet čísel v každom riadku, stĺpci aj uhlopriečke rovnal 47.

3.4 Kapitán Manipuluje Súmernosťou ($\kappa \leq 4$) — kategórie **alfa** a **beta**

Kapitán sa zapozeral do lodného radaru, aby si pozrel, kde pristáť. Radar ohraničuje kružnica r, na ktorej ležia body A, B, C, D tak, že úsečky AC a BD sú na seba kolmé. Kapitán si zobral priamku AC a jej obraz v osovej súmernosti podľa osi uhla BAD označil g. Dokážte, že priamka g prechádza stredom kružnice r.

3.5 Kladných Máme Silákov ($\kappa \leq 7$) — kategórie **alfa** a **beta**

Kapitán Modrobrada sa pripravuje na pristátie. Na to si povolal svoju navigačnú jednotku. Tá sa skladá so štyroch kladne naladených námorníkov a, b, c, d. Avšak v ich silách sú značné nerovnosti.

Nech a, b, c, d sú kladné reálne čísla spĺňajúce $a + b + c + d = 1$. Ukážte, že

$$\frac{2}{(a+b)(c+d)} \leq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{cd}}.$$

3.6 Kolonizácia Morského Súostrovia

kategórie **alfa** a **beta**

Modrobradova posádka obsadila súostrovie $n \geq 2$ ostrovov. Práve dva z týchto ostrovov sú obývané, každý jedným kmeňom, ktoré sú navzájom znepriatelené. Medzi ostrovmi nie sú žiadne mosty, preto sa kapitán Modrobrada spolu so svojím plukovníkom Zelenovlasom rozhodli vybudovať ich nasledovnou hrou.

Modrobrada začína a následne sa so Zelenovlasom striedajú v ťahoch. Hráč na ťahu musí postaviť práve jeden most medzi dvoma ostrovmi O a P, medzi ktorými ešte most nie je postavený. Medzi ostrovmi O a P však môže postaviť most len vtedy, ak sa aspoň do jedného z nich dá dostať po mostoch z niektorého z dvoch obývaných ostrovov. Ak sa po ťahu hráča H vie dostať jeden domorodý kmeň po mostoch k druhému kmeňu, tak hráč H prehráva. Zistite v závisloti od celého čísla $n \geq 2$, ktorý z námorníkov má víťaznú stratégiu.[1]

3.7 Kapitán, Maršál, Stotník

kategórie **alfa** a **beta**

Námorníci začali budovať svoju kolóniu. Prišiel čas, aby si rozdelili funkcie. Najprv ich však treba nájsť.

Nájdite všetky funkcie f z kladných reálnych čísel do kladných reálnych čísel také, že pre všetky kladné reálne čísla a, b, c, d spĺňajúce $abcd = 1$ platí

$$(f(a) + f(b)) \cdot (f(c) + f(d)) = (a + b) \cdot (c + d).$$

3.8 Kolmice Môjho Štvoruholníka

kategória **beta**

Štvoruholník $ABCD$ je vpísaný do kružnice k so stredom O. Jeho uhlopriečky AC a BD sú na seba kolmé a pretínajú sa v bode P. Bod O leží vnútri trojuholníka BPC. Na úsečke BO je zvolený bod H tak, aby bol uhol BHP pravý. Kružnica opísaná trojuholníku PHD pretína úsečku PC po druhýkrát v bode Q. Dokážte, že $|AP| = |CQ|$.

3.9 Káčka Množiny S

kategória **beta**

Označme $D(n)$ súčin deliteľov čísla n. Pre každé kladné celé číslo n vieme definovať postupnosť $a_1(n)$, $a_2(n)$, $a_3(n)$, … nasledovne: $a_1(n) = n$ a $a_k(n) = D(a_{k-1}(n))$ pre všetky $k \geq 2$. Dokážte, že pre každú podmnožinu $S \subseteq \{1, 2, \dots 2018\}$ vieme nájsť také kladné celé číslo n, aby platilo, že pre každé $1 \leq k \leq 2018$ je $a_k(n)$ druhou mocninou celého čísla práve vtedy, keď $k \in S$.

3.10 Kynoženie Mestských Snejkov

kategória **beta**

V hlavnom meste kolónie dokončujú námestie. Plochu $(2^n + 1) \times (2^n + 1)$ chcú vydláždiť bielymi a čiernymi dlaždicami rozmeru 1×1. Dláždiť musia tak, aby z čiernych dlaždíc nevznikol uzavretý hadík. V závislosti od kladného celého čísla n určte, koľko najviac čiernych dlaždíc môžu použiť?

Poznámka. Uzavretý hadík je postupnosť $k \geq 4$ rôznych čiernych dlaždíc a_1, a_2, …, a_k takých, že dlaždice a_i a a_{i+1} pre $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ a taktiež dlaždice a_k a a_1 majú spoločnú hranu.

[1] Hráč má víťaznú stratégiu, ak si vie svojimi ťahmi zaručiť výhru bez ohľadu na to, ako hrá jeho súper.