Korešpondenčný matematický seminár
XL. ročník, 2018/2019
KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Zadania 1. kola zimnej časti

Termín odoslania 01. 10. 2018 (pre zahraničie 28. 09. 2018)

1.1 Kike Mešká Spoj ($\kappa \leq 1$)

kategória **alfa**

Kika čaká na lietadlo do Dánska. Z dlhej chvíle začala postupne písať do štvorčekovej siete prirodzené čísla. Začala od jednotky a vpisovala ich v protismere hodinových ručičiek tak, ako vidíte na obrázku. Ktoré číslo je napísané pod číslom 2018?

					···	32	31	
		17	16	15	14	13	30	
		18	5	4	3	12	29	
		19	6	1	2	11	28	
		20	7	8	9	10	27	
		21	22	23	24	25	26	

1.2 Klábosenie Medzi Spolupasažiermi ($\kappa \leq 2$)

kategória **alfa**

Kika sedí v lietadle a keďže je zhovorčivá, už stihla vyzistiť o ostatných pasažieroch nasledovné: V lietadle je n pasažierov, niektorí sa poznajú (známosti sú vzájomné) a každý pasažier sa cez niekoľko známostí pozná s ľubovoľným iným. Ešte si všimla, že keď rozdelíme pasažierov na ľubovoľné dve neprázdne skupiny, tak určite aspoň v jednej z nich existuje dvojica pasažierov, ktorá sa pozná. Ukážte, že vieme nájsť aspoň troch ľudí, ktorých vieme postaviť do kruhu tak, že každý pozná svojich dvoch susedov.

1.3 Kufre Medzi Súdeliteľnými ($\kappa \leq 3$)

kategória **alfa**

Kika má 10 kufrov očíslovaných desiatimi po sebe idúcimi kladnými celými číslami. Všimla si, že jedno z nich je nesúdeliteľné s ostatnými. Pri tomto pozorovaní sa zamyslela, pre aké iné desatice po sebe idúcich čísel to platí. Dokážte, že jej desatica nie je špeciálna, pretože táto vlastnosť platí pre všetky desatice po sebe idúcich kladných celých čísel.

1.4 Kika, Mince, Šarlatán ($\kappa \leq 4$)

kategórie **alfa** a **beta**

Kika narazila na letisku na šarlatána. Ten mal na stole dve kôpky po n mincí. Kika sa rozhodla, že šarlatána niečo naučí, a preto sa s ním pustila do nasledujúcej hry.

Kika a šarlatán hrajú proti sebe hru. Na stole majú položené dve kôpky, na každej je n mincí. Kika začína a následne sa so šarlatánom striedajú v ťahoch. Hráč na ťahu musí vykonať práve jednu z nasledujúcich akcií:

- vyberie si jednu kôpku a zoberie z nej ľubovoľný kladný celočíselný počet mincí,
- zoberie po jednej minci z oboch kôpok (ak je na oboch kôpkach aspoň 1 minca).

Hráč, ktorý zoberie svojím ťahom zo stola poslednú mincu, vyhráva. Zistite v závislosti od kladného celého čísla n, ktorý hráč má víťaznú stratégiu.[1]

[1] Hráč má víťaznú stratégiu, ak si vie svojimi ťahmi zaručiť výhru bez ohľadu na to, ako hrá jeho súper.

1.5 Koláč Mojich Spoluvedúcich ($\kappa \leq 7$) — kategórie **alfa** a **beta**

Betka na rozlúčku s Kikou a Jožom napiekla štvorcový perník. Jožo a Kika sa o neho podelia nasledujúcim spôsobom. Najprv Jožo umiestni sviečku na perník, potom Kika spraví rez od sviečky niekam po okraj perníka. Následne Jožo spraví druhý rez od sviečky po okraj perníka tak, aby bol kolmý na Kikin rez. Ako výsledok máme perník rozdelený na dve časti, z ktorých Kika dostane menšiu časť. Ukážte, že Kika si môže vhodným rezom zabezpečiť získanie aspoň štvrtiny perníka bez ohľadu na to, čo spraví Jožo.

1.6 Koľko Magnificentných Strelcov? — kategórie **alfa** a **beta**

Jožo nedávno objavil Japonský šach (šógi). Šógi sa hrá na šachovnici 9×9 políčok. Figúrka *povýšený strelec* ohrozuje políčka, ktoré sa nachádzajú v rovnakej uhlopriečke (ako strelec v bežnom šachu) a navyše aj políčka, ktoré majú spoločnú hranu s políčkom, na ktorom povýšený strelec stojí. Koľko najviac povýšených strelcov môže Jožo umiestniť na šachovnicu tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?

1.7 Kodaňčania Majú Symetrie — kategórie **alfa** a **beta**

Kika si v Dánsku všimla zaujímavú vec – všetci Dáni majú ľavé rameno rovnako dlhé ako pravé a navyše, všetci Dáni rovno bežia.

Označme bod X na základni BC rovnoramenného trojuholníka ABC a body P a Q postupne na stranách AB a AC také, že $APXQ$ je rovnobežník. Bod Y je obraz bodu X v osovej súmernosti podľa priamky PQ. Dokážte, že bod Y leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC.

1.8 Krutá Matematická Skúška — kategória **beta**

Pri vstupe do matematicko-fyzikálnej fakulty majú Dáni zaujímavý systém. Namiesto voľného priechodu alebo predkladania ISIC-ov dostanú študenti matematickú úlohu, ktorú musia vyriešiť. Kika sa pri úvodnom vstupe musela popasovať s touto nerovnosťou:

Nech $a_1, a_2, \dots, a_{25}$ sú nezáporné celé čísla a k je hodnota najmenšieho z nich. Dokážte, že

$$\left\lfloor \sqrt{a_1} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{a_2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \sqrt{a_{25}} \right\rfloor \geq \left\lfloor \sqrt{a_1 + a_2 + \dots + a_{25} + 200k} \right\rfloor.$$

Samozrejme, Kika úlohu hravo zvládla. A čo vy?

Poznámka. Označenie $\lfloor x \rfloor$ znamená dolná celá časť x, teda najväčšie celé číslo neprevyšujúce x.

1.9 Koláče Maťko Spapá — kategória **beta**

Keďže Betke je za Kikou smutno, upiekla jej ďalších 20 perníkov s váhami postupne $10, 20, \dots, 200$ gramov, ale nevie, ktorý perník koľko váži. Keď prišla na poštu zistila, že môže Kike poslať len dva perníky. Chvalabohu, Vodka je po ruke a je skúsený vážič jedla. Betka môže dať Vodkovi ľubovoľné dva perníky a Vodka jej povie, ktorý je ťažší. Žiaľbohu, Vodka to nerobí zadarmo. Zakaždým, keď dáva Betka Vodkovi vážiť perníky, musí mu dať spolu s nimi tretí perník, ktorý Vodka zje. Výsledok váženia Vodka povie až po zjedení perníka.

a) Vie Betka týmto spôsobom zaručene nájsť dva perníky, ktoré spolu vážia aspoň 280 gramov?

b) Vie Betka týmto spôsobom zaručene nájsť dva perníky, ktoré spolu vážia aspoň 300 gramov?

1.10 Koniec Mikroténovým Sáčkom!

kategória **beta**

Dáni sú veľkí ochrancovia prírody, a preto používajú výlučne rozložiteľné materiály.

Dokážte, že neexistuje kladné celé číslo n, pre ktoré je číslo

$$10^{10^{10^n}} + 10^{10^n} + 10^n - 1$$

prvočíslom.

Poznámka. Zápis a^{b^c} sa chápe uzátvorkovaný ako $a^{(b^c)}$. Napr. $2^{2^3} = 2^8 = 256$. Pozor, $2^{2^3} \neq (2^2)^3 = 4^3 = 64$.