Korešpondenčný matematický seminár
XL. ročník, 2018/2019
KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Zadania 2. kola zimnej časti

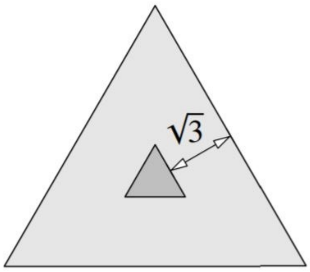
Termín odoslania 29. 10. 2018 (pre zahraničie 26. 10. 2018)

2.1 Kam Miláčikov Skryl? (κ ≤ 1) — kategória **alfa**

Jožo sa balil do Belgicka a ako obvykle, si chcel zbaliť jeho obľúbené prirodzené čísla. Tie však, ako obvykle, zapatrošil. Pomôžte Jožovi nájsť jeho obľúbené prirodzené čísla a, b a c také, že sú všetky rôzne a žiadne z nich nie je druhou mocninou celého čísla, avšak čísla ab, bc a ac sú všetko druhé mocniny celých čísel a súčet $a+b+c$ je najmenší možný. Ktoré čísla Jožo hľadá?

2.2 Krásny Medzinárodný Symbol (κ ≤ 2) — kategória **alfa**

Jožo na letisku narazil na zaujímavý amulet ako na obrázku. Pozostával z dvoch rovnostranných trojuholníkov. Predavačka mu prezradila, že vzdialenosť každého bodu obvodu malého trojuholníčka k najbližšiemu bodu obvodu veľkého trojuholníka je $\sqrt{3}$. Určte rozdiel medzi dĺžkami strán malého a veľkého trojuholníka.



2.3 Konvexne Mysliaci Skalpel (κ ≤ 3) — kategória **alfa**

Na letenke mal Jožo zaujímavý útvar, trojuholník. Pri svojom čakaní na lietadlo sa zamyslel, či ho možno rozrezať na štyri konvexné[1] útvary: trojuholník, štvoruholník, päťuholník a šesťuholník. Zodpovedajte mu túto otázku.

2.4 Kustomeri Míňajú Syr (κ ≤ 4) — kategórie **alfa** a **beta**

Jožo prišiel ráno do obchodu so syrom a zaradil sa do radu ako osemnásty zákazník. V obchode bolo pred otvorením 20 kilogramov syra. Predavačka po každom vybavenom zákazníkovi prehlásila, že ak si každý nasledujúci zákazník kúpi presne toľko, koľko bol priemerný nákup všetkých predošlých zákazníkov, zostane ešte presne pre ďalších 17 zákazníkov. Môže sa stať, že po každom zo 17 prvých zákazníkov bude toto tvrdenie pravdivé? Ak áno, koľko syra zostane, keď sa Jožo dostane na rad?

2.5 Korešpondenčný Matematický Seminár (κ ≤ 7) — kategórie **alfa** a **beta**

Po Jožovi ostalo v KMS veľa roboty, medzi iným rozdeliť vedúcim opravovanie riešení. Máme n úloh, z každej k riešení na opravovanie a k vedúcich KMS. Jožo pred odchodom, nestíhajúc, dal každému vedúcemu n náhodných riešení. Vedúci by chceli, aby to bolo rozdelené *spravodlivo*, t. j. nech každý z nich opravuje práve

[1] konvexný útvar je taký, ktorý má všetky vnútorné uhly menšie ako 180°

jedno riešenie z každej úlohy. Preto sa rozhodli, že si budú meniť riešenia. Dvaja vedúci sú ochotní vymeniť riešenie za riešenie, ak každý z nich dostane riešenie úlohy, z ktorej riešenie ešte nemá. Dokážte, že bez ohľadu na to, ako boli na začiatku rozdané riešenia, si takýmito výmenami môžu prerozdeliť riešenia spravodlivo.

2.6 Konečne Môžem Spať — kategórie **alfa** a **beta**

Keď Jožo v noci nevie zaspať, počíta svoje obľúbené prvočísla. Prvočíslo p sa nazýva *Jožovo obľúbené*, ak preň existuje prirodzené číslo k, pre ktoré platí, že p delí $k^3 + 6$. Ukážte, že nech by sa Jožo snažil ako chcel, všetky svoje obľúbené prvočísla by sa mu spočítať nepodarilo. Inak povedané, dokážte, že Jožovych obľúbených prvočísel je nekonečne veľa.

2.7 Kubisti Modelovali Siluety — kategórie **alfa** a **beta**

Keď sa Kika s úžasom pochválila Jožovi o svojom zistení o rovnoramenných a rovno bežiacich Dánoch, rozhodol sa Jožo, že preskúma aj Belgičanov. Zistil, že Belgičania tiež rovno bežia, tiež majú ramená rovnako dlhé, ale čo viac, ich ramená sú dokonca kolmé na ich krk!

Vnútri rovnobežníka $ABCD$ leží bod P tak, že $|PC| = |BC|$. Stredy úsečiek AP a CD označme postupne M, N. Ukážte, že priamky BP a MN sú na seba kolmé.

2.8 Karty Musíme Spermutovať — kategória **beta**

Počas dlhých zimných večerov hrajú Jožo s Kikou cez videohovor zaujímavú hru. Kika zamieša balík 52 kariet a uloží karty do kruhu lícom nahor, pričom jedno miesto v kruhu nechá prázdne. Jožo, ktorý na karty nevidí (keďže Kika si omylom zabudla odlepiť pásku z kamery), jednu menuje. Ak táto karta susedí s prázdnym miestom, Kika posunie kartu na prázdne miesto, bez toho, aby to povedala Jožovi. Ináč sa nič nestane. Potom Jožo menuje ďalšiu kartu atď. toľkokrát, koľko chce, kým nepovie „KMS“.

a) Môže Jožo zaručiť, že po vyrieknutí „KMS“ nie je žiadna karta na svojom pôvodnom mieste?

b) Môže Jožo zaručiť, že po vyrieknutí „KMS“ nesusedí piková dáma s prázdnym miestom?

2.9 Krádež Matematických Šperkov — kategória **beta**

Škandál! Z trezoru s prirodzenými číslami v Belgickej národnej banke zmizli všetky prirodzené čísla n také, pre ktoré možno číslo $36^n - 6$ zapísať ako súčin aspoň dvoch za sebou idúcich prirodzených čísel. Za nájdenie každého z nich vypísala banka zaujímavú odmenu. Pomôžte Jožovi zarobiť slušný balík a nájdite ich všetky! Možno sa s vami podelí o apanáž.

2.10 Koho Máme Súdiť? — kategória **beta**

Slávny Belgický detektív Hercule Poirot sa rozhodol dolapiť zlodeja vzácnych prirodzených čísel. Ako prvé získal plán národnej banky a svojimi dedukčnými schopnosťami sa mu podarilo určiť trajektóriu úteku zlodeja. Všimol si, že zlodej počas úteku zabočil kolmo, čo mu dopomohlo usvedčiť vinníka (musel byť cudzinec, lebo Belgičania rovno bežia). Žiaľ, nemá dostatok dôkazov, že zlodej naozaj zabočil kolmo. Potrápte svoje šedé mozgové bunky a pomôžte Poirotovi jeho tvrdenie dokázať!

Daný je trojuholník ABC. Body D, E ležia postupne v polrovinách opačným k ABC, ACB tak, že platí: $|AB| = |AD|$, $|AC| = |AE|$, $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle CAE|$. Priesečník priamok CD a BE označme P. Označme O stred opísanej kružnice trojuholníku BCP. Dokážte, že priamky AO a DE sú na seba kolmé.