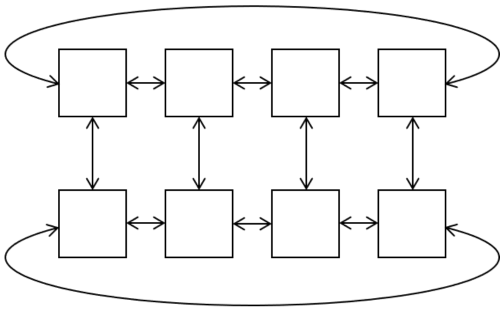
Zadania 3. kola zimnej časti

Termín odoslania 26. 11. 2018 (pre zahraničie 23. 11. 2018)

3.1 Keď Miluješ Spomienky ($\kappa \leq 1$) kategória **alfa**

Jožovi bolo v Belgicku smutno a tak si pospomínal na časy, keď išiel vedúcovať svoje prvé sústredenie. Organizoval tam hru, ktorá sa hrala v ôsmich miestnostiach. Na začiatku hry sa družinka šiestich účastníkov rozdelila do miestností, každý účastník do inej. Po každom kole sa každý účastník presunie do inej miestnosti. Pritom presúvať sa medzi miestnosťami sa dá len tak, ako je naznačené na obrázku. Dokážte, že bez ohľadu na to, ako sa družinka na začiatku rozdelí, nikdy sa nestretnú všetci jej účastníci v jednej miestnosti.[1]



3.2 Komprimácia Možných Súčtov ($\kappa \leq 2$) kategória **alfa**

Maťko napísal na papier čísla $1, 2, \ldots, n$, kde $n \geq 2$. V jednom kroku si vyberie dve čísla napísané na papieri a nahradí ich novým číslom podľa nasledujúcich pravidiel:

- Ak sú vybrané čísla obe párne, nahradí ich ich súčtom.
- Ak je práve jedno z vybraných čísel nepárne, nahradí ich tým nepárnym číslom.
- Ak sú obe vybrané čísla nepárne, nahradí ich nulou.

Tento krok Maťko opakuje dovtedy, dokým mu neostane na papieri len jedno číslo. V závislosti od celého čísla $n \geq 2$ určte najmenšiu a najväčšiu možnú hodnotu čísla, ktoré Maťkovi ostane.

3.3 Kohle Messen Synthetisch ($\kappa \leq 3$) kategória **alfa**

Maťko po šokujúcich zisteniach Kiky a Joža o rovnobežiacich Dánoch a Belgičanov začal svoj výskum na Nemcoch. Štvoruholníku $ABCD$, ktorému vieme vpísať kružnicu, platí navyše, že $|AB| = |CD|$, $|BC| < |AD|$ a strany BC a AD sú rovnobežné. Dokážte, že os uhla BCD rozpoľuje plochu štvoruholníka $ABCD$.

[1] Bolo by blbé, keby sa takáto hra hrala na sústredení, obzvlášť ak by pre výhru bolo potrebné stretnúť sa jednej miestnosti. Našťastie si vedúci pomáhajú a Viťo pomohol odhaliť Jožovi túto chybičku.

3.4 Konečná Mramorová Sieť ($\kappa \leq 4$) kategórie **alfa** a **beta**

Maťko a Vodička sa vydali do lokálneho múzea hornín. Tam našli mramorovú dosku so štvorčekovou sieťou. Maťko s Vodkom sa začali hrať nasledujúcu hru na štvorčekovom mramore[2]. Maťko otvorí hru tým, že nakreslí krížik do ľubovoľného štvorčeka. V každom svojom ďalšom ťahu musí nakresliť krížik do voľného štovrčeka, ktorý aspoň vrcholom susedí so štvorčekom, v ktorom je krížik. Vodka môže v jednom ťahu nakresliť tri koliečka do ľubovoľných voľných políčok. Ak Maťko môže nakresliť siedmy krížik, vyhráva. Inak vyhráva Vodička. Zistite, či existuje stratégia pre Vodičku taká, že Maťko zaručene nevie vyhrať.

3.5 Konzultácia Machinelearningu Slava ($\kappa \leq 7$) kategórie **alfa** a **beta**

Slavo sa rozhodol naučiť počítač hrať nasledovnú hru:

Najprv Slavo nakreslí do roviny n bodov. Potom počítač ofarbí tieto body dvomi farbami, zelenou a červenou. Nakoniec Slavo nakreslí do roviny kruh. Pokiaľ sa všetky zelené body nachádzajú vnútri kruhu (alebo aj na obvode) a všetky červené body mimo kruhu, tak Slavo vyhrá. Inak vyhrá počítač.

Po chvíli učenia bol Slavo s výsledkom spokojný, preto sa rozhodol otestovať počítač proti skúsenému oponentovi – Maťkovi. Maťko to však vyhlásil za príliš informatickú úlohu a odmietol to rátať. Dokážete úlohu vyriešiť a pomôcť Slavovi? V závislosti od prirodzeného čísla n, určte, kto má vyhrávajúcu stratégiu.[3]

3.6 Kalorická Mľaskacia Seansa kategórie **alfa** a **beta**

Počas obedovej prestávky išiel Maťko do jedálne a tam s hrôzou zistil, že jeho obľúbené jedlo je vypredané. Našťastie jedáleň robí pizzu, na ktorú si môžu zákazníci objednať prílohy, aké chcú. Maťko by rád dal na svoju pizzu niektorú z obľúbených postupnosti príloh, (prirodzených čísel) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Za chvíľku sa od predavačky dozvedel, že každá postupnosť príloh musí spĺňať následujúcu podmienku

$$a_{n-1} \leq (a_{n+1} - a_n)^2 \leq a_n$$

pre všetky celé čísla $n \geq 2$. Zistite, či môže existovať nejaká Maťkova obľúbená postupnosť príloh, taká, že ju naservírujú v jedálni.

3.7 Keď Mokro Škodí kategórie **alfa** a **beta**

Vodička sa nešiel do Nemecka flákať, ale seriózne študovať. Jedna z vecí, ktorou sa zaoberá, sú vodotesné čísla. Dvojica kladných celých čísel (a, b) sa nazýva *vodotesnou*, ak pre ňu existuje celé číslo $d \geq 2$ (nazývané *tesnenie*) také, že $a^n + b^n + 1$ je deliteľné číslom d pre všetky kladné celé čísla n. Nájdite všetky dvojice vodotesných čísel.

3.8 Kámo, Mokrý Si! kategória **beta**

Po niekoľkých prechádzkach si Vodička všimol, že vždy skončil v Rýne, to je taká veľká Vodička. Kto by však chcel zmoknúť pri každej prechádzke? Ukážte Vodičkovi, že všetky cesty vedú do Rýna. Máme štvoruholník $ABCD$ taký, že existuje bod O taký, že platia následujúce vzťahy: $|\sphericalangle AOB| = |\sphericalangle BOC| = |\sphericalangle COD| = |\sphericalangle DOA| = 90°$. Označme P priesečník kružníc opísaných trojuholníkom ABO a CDO (rôzny od bodu O) a R priesečník kružníc opísaných trojuholníkom DAO a BCO (rôzny od bodu O). Označme T priesečník priamok p, r, pričom $P \in p$, $p \perp OP$ a $R \in r$, $r \perp OR$. Dokážte, že priamka OT a spojnice stredov protiľahlých strán štvoruholníka $ABCD$ sa pretínajú v jednom bode.

[2] Keďže ani Maťko ani Vodička nie sú vagabundi, celú hru odohrali v hlavách, na nekonečnej štvorčekovej sieti.

[3] Hráč má víťaznú stratégiu, ak si vie svojimi ťahmi zaručiť výhru bez ohľadu na to, ako hrá jeho súper.

3.9 Korporátna Mestská Stabilita

kategória **beta**

V Nemecku je $2n$ miest, z ktorých sú niektoré dvojice spojené cestou. Z každého mesta vychádzajú práve tri cesty: čierna, červená a žltá. V závislosti od celého čísla $n \geq 2$ nájdite najmenšie celé číslo k, pre ktoré možno v Nemecku zaviesť *ekonomickú rovnováhu*. To znamená:

- Každá cesta je vlastnená práve jedným z dvoch miest, ktoré spája.
- Ak mesto A vlastní cestu do mesta B, tak mesto B platí mestu A denne x eur, kde x je kladné celé číslo menšie ako k (nie nutne rovnaké pre každú cestu).
- Každé mesto denne zaplatí za prenájom ciest rovnako veľa, ako dostane od iných miest.

3.10 Kadejaké Mnohočleny Študujeme

kategória **beta**

Maťko sa už chystá na prázdniny späť na Slovensko. Potrebuje si však zbaliť polynómy, ktoré študuje. Tie už ako vždy postrácal po svojom pracovisku. Pomôžte Maťkovi nájsť jeho polynómy. Nájdite všetky polynómy s reálnymi koeficientami $P(x)$, pre ktoré existuje polynóm s reálnymi koeficientami $Q(x)$ taký, že pre všetky prirodzené čísla n platí

$$P(1) + P(2) + \cdots + P(n) = P(n)Q(n).$$